

Partiel du 13 novembre

Durée : 1h. Tous documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques interdits.
La correction (p.2) devrait être sous forme finale, signalez les éventuelles fautes de frappe qui resteraient, ou demandez plus de détails sur une correction si nécessaire. A plusieurs endroits, on donne plusieurs rédactions possibles pour que vous puissiez vérifier vos raisonnements.

Dans tout le sujet, on utilise l'identification naturelle $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x + iy$. On notera de la même manière les fonctions définies sur $\mathbb{C}$ et celles définies sur $\mathbb{R}^2$ via cette identification.

Exercice 1. — Les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{C}^*$ (identifié à $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$) sont-elles holomorphes?

1. $f : (x, y) \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}$.
2. $g : (x, y) \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$.

Exercice 2. — Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels k et ℓ pour que la fonction

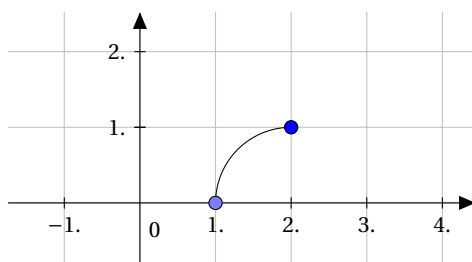
$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^3 + kxy^2 + \ell x^2 + 3x + 4y^2$$

soit la partie réelle d'une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Exercice 3. — Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{2z+3}{z^2+1}$. On note $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z-1)^n$ son développement en série entière au voisinage de $z=1$.

1. Quel est le rayon de convergence de ce développement en série entière?
2. Calculer a_0 et a_1 .

Exercice 4. — Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2$. Soit γ un chemin reliant le point d'affixe 1 au point d'affixe $2+i$ et dont l'image est donnée par la figure suivante :



Calculer $\int_{\gamma} f(z) dz$.

Exercice 5. — Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1. Montrer que si elle vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq \sqrt{|z|},$$

alors elle est nulle.

2. Montrer que si elle vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}, (|f(z)| \leq |z| \text{ et } |f(z)| \leq |z|^2),$$

alors elle est nulle.

Correction

Correction de l'exercice 1.

Plusieurs rédactions possibles. On peut par exemple remarquer que $g(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}$ et que $f = \bar{g}$. On en déduit que g est holomorphe, et que f ne l'est pas.

Sinon, on peut écrire les relations de Cauchy-Riemann. Montrons par exemple que g est holomorphe. Notons u et v ses parties réelle et imaginaire, de sorte que $g = u + iv$. La matrice jacobienne de g s'écrit

$$\text{Jac}(g) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-x(2y)}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{y(2x)}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{(x^2+y^2)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Les relations de Cauchy-Riemann sont bien vérifiées, donc la fonction g , qui par ailleurs est $\mathcal{C}^\infty$, est holomorphe. Comme $f = \bar{g}$, f n'est pas holomorphe. (Elle est ce qu'on appelle *anti-holomorphe*.)

Correction de l'exercice 2.

On a $\partial_x u = 3x^2 + ky^2 + 2\ell x + 3$. Si l'on veut $f = u + iv$ holomorphe, par Cauchy-Riemann on doit avoir $\partial_y v = \partial_x u = 3x^2 + ky^2 + 2\ell x + 3$. Donc, en intégrant ceci par rapport à y on obtient

$$v(x, y) = 3x^2 y + \frac{k}{3} y^3 + 2\ell xy + 3y + \alpha(x),$$

où $\alpha(x)$ est une fonction ne dépendant que de x . En procédant de même avec $\partial_x u$ on obtient

$$v(x, y) = -kx^2 y + 8xy + \beta(y),$$

où $\beta(y)$ est une fonction ne dépendant que de y . En comparant ces deux expressions on trouve

$$3y + \frac{k}{3} y^3 - \beta(y) = -kx^2 y - 8xy - \alpha(x) - 3x^2 y - 2\ell xy. \quad (1)$$

De cela on déduit que $3y + \frac{k}{3} y^3 - \beta(y) = c_1$, i.e. $\beta(y) = 3y + \frac{k}{3} - c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$, et de manière analogue on trouve $\alpha(x) = c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$. On trouve alors que l'égalité (1) est vérifiée seulement si $k = -3$ et $\ell = -4$.

Réciproquement on sait que si les dérivées partielles de u et v existent et sont continues et les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées, alors $f = u + iv$ est holomorphe. On trouve alors que si $k = -3$ et $\ell = -4$, alors f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 3.

1. La fonction est définie et holomorphe sur le disque ouvert de centre 1 et de rayon $\sqrt{2}$ car ce disque est inclus dans $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Elle est donc développable en série entière au centre de ce disque et le rayon de convergence de la série est au moins le rayon de ce disque. D'autre part, le rayon ne peut être supérieur à $\sqrt{2}$ car la fonction n'est même pas définie en i , qui est à distance $\sqrt{2}$ de 1. Finalement, le rayon est $\sqrt{2}$.

2. Le coefficient a_0 est simplement la valeur en 1 : il vaut donc $a_0 = \frac{5}{2}$. Le coefficient a_1 lui, vaut $f'(1)$.

On commence par dériver f :

$$f'(z) = \frac{2(z^2+1) - (2z+3)(2z)}{(z^2+1)^2} = \frac{-2z^2-6z+2}{(z^2+1)^2}.$$

En évaluant en 1, on obtient $a_1 = f'(1) = -\frac{3}{2}$.

Méthode alternative : on peut aussi calculer le DSE en $z = 1$, ou simplement juste le DL d'ordre un. Pour cela, on peut poser $w = z - 1$ autrement dit $z = w + 1$, remplacer et faire le DL en $w = 0$. On obtient :

$$f(z) = \frac{2z+3}{z^2+1} = \frac{2w+5}{w^2+2w+2} = \frac{1}{2} \frac{2w+5}{1+(w+w^2/2)} \stackrel{\text{en } w=0}{=} \frac{1}{2} (5+2w)(1-w+o(w)) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}w + o(w)$$

On en déduit donc que $\boxed{a_0 = \frac{5}{2} \text{ et } a_1 = -\frac{3}{2}}.$

Pour vous entraîner aux futurs exercices de calculs de résidus en des pôles multiples, vous pouvez calculer les termes suivants du DSE : on trouve $1/4$ et $1/2$.

Correction de l'exercice 4.

Il y a plusieurs façons de répondre à la question.

1. On peut paramétrer le chemin et calculer l'intégrale curviligne. Ici, on est tenté de paramétrer par

$$\gamma : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto 2 - e^{-it}.$$

Ce chemin admet pour vecteur vitesse $\gamma'(t) = ie^{-it}$. On écrit ensuite

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{\pi/2} (2 - e^{-it})^2 ie^{-it} dt = i \int_0^{\pi/2} (4e^{-it} - 4e^{-2it} + e^{-3it}) dt \\ &= i \left(4 \left[\frac{e^{-it}}{-i} \right]_0^{\pi/2} - 4 \left[\frac{e^{-2it}}{-2i} \right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{e^{-3it}}{-3i} \right]_0^{\pi/2} \right) \\ &= i \left(4 \frac{-i-1}{-i} - 4 \frac{-1-1}{-2i} + \frac{i-1}{-3i} \right) = 4 \frac{-i-1}{-1} - 4 \frac{-1-1}{-2} + \frac{i-1}{-3} = 4 + 4i - 4 + \frac{1-i}{3} = \boxed{\frac{1+11i}{3}} \end{aligned}$$

2. Deuxième solution. La fonction f à intégrer est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. D'après le théorème intégral de Cauchy, son intégrale sur un contour fermé est nulle, et donc l'intégrale curviligne demandée ne dépend que des points de départ et d'arrivée, on peut changer le chemin. Choisissons donc de remplacer le chemin γ par la concaténation de $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto 1 + t$, suivi de $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto 2 + it$. En d'autres termes, on commence par se déplacer vers la droite d'une unité, puis vers le haut d'une unité. Ces chemins ont des dérivées constantes : $\gamma'_1 = 1$ et $\gamma'_2 = i$. On note I_1 et I_2 les intégrales correspondantes. On a alors :

$$I_1 = \int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma'_1(t)dt = \int_0^1 f(1+t)dt = \int_0^1 (1+t)^2 dt = \int_1^2 u^2 du = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}. \text{ (avec } u = t+1 \text{)}$$

Pour la deuxième intégrale, on obtient :

$$I_2 = \int_0^1 f(\gamma_2(t))\gamma'_2(t)dt = \int_0^1 f(2+it)idt = i \int_0^1 (2+it)^2 dt = i \int_0^1 (4+4it-t^2)dt = i \left(4 + 4i \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{11i}{3} - 2.$$

Finalement on obtient

$$I = I_1 + I_2 = \boxed{\frac{1+11i}{3}}$$

3. Variante de la solution précédente : avec le même raisonnement, on remplace γ par le chemin « diagonal » $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto 1 + t(1+i)$, que l'on note toujours γ pour simplifier. On a alors $\gamma' = 1+i$, et

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1+t+it)^2 (1+i)dt = (1+i) \int_0^1 ((1+t)^2 - t^2 + 2it(1+t))dt \\ &= (1+i) \int_0^1 (1+2t+2i(t+t^2))dt = (1+i) \left(1 + 1 + 2i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \right) = (1+i) \left(2 + i\frac{5}{3} \right) = \boxed{\frac{1+11i}{3}} \end{aligned}$$

4. Dernière méthode, la plus efficace, qui utilise la méthode de la primitive holomorphe (poly lemme 27 et corrections en ligne des exercices 6 et 8, technique non vue en séance cependant). La fonction f possède une primitive holomorphe, à savoir $F : z \mapsto z^3/3$. On peut donc calculer directement l'intégrale curviligne avec cette primitive :

$$I = F(2+i) - F(1) = \frac{(2+i)^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8+3 \cdot 4i+3 \cdot 2i^2+i^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2+11i}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1+11i}{3}}$$

Correction de l'exercice 5.

Cet exercice fait penser à Liouville ou aux variations traitées en TD, ce qui pousse à utiliser les formules intégrales pour les coefficients.

1. Commençons par montrer que f est constante. Comme la condition impose que $f(0) = 0$, ceci suffit à montrer que f est nulle. Pour montrer que f est constante, on écrit son développement en série entière en l'origine, qui est de rayon infini : $f(z) = \sum a_n z^n$, et on montre que $n \geq 1 \implies a_n = 0$. Or, pour tout $r > 0$, la formule de Cauchy sur le disque de rayon r permet d'écrire :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt$$

En majorant par inégalité triangulaire, on a donc :

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \sqrt{r} dt = \frac{\sqrt{r}}{r^n}.$$

On voit que si $n \geq 1$, cette quantité tend vers zéro lorsque $r \rightarrow +\infty$, et donc est nulle. Ceci montre que f est constante. Comme $f(0) = 0$, cette constante est nulle.

2. En utilisant la condition $|f(z)| \leq |z|$ ne variante du même raisonnement (utilisée dans l'exercice du TD), montre que f est un polynôme de degré ≤ 1 .

La condition supplémentaire $|f(z)| \leq |z|^2$ montre que f s'annule au minimum à l'ordre deux en zéro. Un polynôme de degré au plus un ne peut pas s'annuler à l'ordre deux en l'origine à part s'il est nul.

Version plus détaillée : la première condition montre que f est un polynôme de degré ≤ 1 , donc de la forme $z \mapsto az + b$. Comme $f(0) = 0$, on obtient $b = 0$. La deuxième condition donne $|a||z| \leq |z|^2$ pour tout z , en particulier pour tout $z \neq 0$ on a, en divisant par $|z|$, l'inégalité $|a| \leq |z|$, ce qui implique $a = 0$.