

Corrigé du Partiel 1 du 14 novembre

**Début : 8h ; A rendre au plus tard à 10h35 sur ARCHE ou
 par email (frederic.robert@univ-lorraine.fr)**

**On n'hésitera pas à utiliser un résultat énoncé dans une question précédente,
 en veillant cependant à bien en indiquer la référence.**

Les exercices et problèmes peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^2$. Pour chacun des sous-ensembles suivant, indiquez s'il est ouvert, fermé ou bien ni l'un ni l'autre :

- $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 3y^8 = 2 \text{ et } \cos x \geq 0\}$
- $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 + y^2 \geq 1 \text{ et } x - y < 0\}$

Chaque réponse devra être démontrée.

Solution : A est fermé comme intersection d'images réciproques de fermés par des fonction continues. Montrons que B n'est ni ouvert ni fermé :

- On a $(0, 1) \in B$ et $P_n := (0, 1 - 1/n) \in B^c$ pour $n \geq 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = (0, 1)$. Si B ouvert, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P_n \in B$ pour $n \geq n_0$. Absurde. Donc B pas ouvert.
- On pose $Q_n := (1, 1 + 1/n)$ pour $n \geq 1$. On a $Q_n \in B$ pour tout n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = (1, 1) \notin B$. Donc B pas fermé.

Exercice 2. On définit $C_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \text{ tq } f(x + 2\pi) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$.

- (1) Soit $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Montrez que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ est atteint.

Solution : La fonction f est continue sur $[0, 2\pi]$ compact, donc il existe $x_0 \in [0, 2\pi]$ tel que $|f(x_0)| = \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $n \in \mathbb{N}$ la partie entière de $\frac{x}{2\pi}$, donc $\theta := x - 2\pi n \in [0, 2\pi[$ et $|f(x)| = |f(\theta + 2\pi n)| = |f(\theta)| \leq |f(x_0)|$. Donc f bornée et le sup est atteint en x_0 .

- (2) Montrez que $(C_{2\pi}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Solution : Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(C_{2\pi}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $p, q \geq n_0$, on a $\|f_p - f_q\|_\infty < \epsilon$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon \text{ pour tous } p, q \geq n_0. \quad (*)$$

Donc $(f_n(x))_n$ de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle converge, soit $f(x)$ sa limite. Ceci définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. En prenant $q \rightarrow +\infty$ dans $(*)$, il vient que pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $p \geq n_0$ $|f_p(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc (f_n) converge uniformément vers f : comme f_n continue pour tout n , alors f est continue. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout n on a $f_n(x + 2\pi) = f_n(x)$: à la limite $n \rightarrow +\infty$, on a $f(x + 2\pi) = f(x)$. Donc $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ et (f_n) converge vers f dans $(C_{2\pi}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. On a donc un espace complet, puis un Banach.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique. Soit K un compact non-vide et soit U ouvert tels que $K \subset U$. Montrez qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$ pour tout $x \in K$.

Solution : Par l'absurde, sion pour tout $r > 0$, il existe $x \in K$ tel que $B(x, r) \not\subset U$. Avec $r = 1/n$, $n \geq 1$, il existe $x_n \in K$ tel que $B(x_n, 1/n) \not\subset U$, donc il existe $y_n \in B(x_n, 1/n)$ tel que $y_n \notin U$. Comme K est compact, il existe une sous-suite $(x_{j(n)})_n$ qui converge vers $x \in K$. On a $d(y_{j(n)}, x) \leq d(y_{j(n)}, x_{j(n)}) + d(x_{j(n)}, x) \leq \frac{1}{j(n)} + d(x_{j(n)}, x) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, donc $y_{j(n)} \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$. Or $y_{j(n)} \in U^c$ fermé pour tout n , donc $x \in U^c$: absurde car $x \in K \subset U$. Ceci prouve le résultat.

Exercice 4. Soit $E = C^0([0, 1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On définit les fonctions

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T_1 : C^0([0, 1]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(1) - f(0) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} T_2 : C^0([0, 1]) & \rightarrow & C^0([0, 1]) \\ f & \mapsto & \left(x \mapsto f(x) - \int_0^1 f(t) dt \right) \end{array} \right.$$

- (1) Montrez que T_1 et T_2 sont linéaires continues

Corrigé : La linéarité provient de la linéarité de l'intégrale. Pour $f \in E$, on a

$$|T_1(f)| = |f(0) - f(1)| \leq |f(0)| + |f(1)| \leq 2\|f\|_\infty$$

donc T_1 est continue. Pour $x \in [0, 1]$, on a

$$|T_2(f)(x)| = |f(x) - \int_0^1 f(t) dt| \leq |f(x)| + \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty + (1-0)\|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty,$$

Donc $\|T_2(f)\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$ et T_2 est continue.

- (2) Montrez que $\|T_1\|_{E \rightarrow \mathbb{R}} \leq 2$ et $\|T_2\|_{E \rightarrow E} \leq 2$.

Corrigé : Conséquence de la question précédente.

- (3) Montrez que $\|T_1\|_{E \rightarrow \mathbb{R}} = 2$ et que cette norme est atteinte.

Corrigé : On pose $g(x) = 2x - 1$ pour $x \in [0, 1]$. On a $\min g = g(0) = -1$ et $\max g = g(1) = 1$, donc $\|g\|_\infty = 1$ et $|T_1(g)| = |-1 - 1| = 2$, donc $\|T_1\|_{E \rightarrow \mathbb{R}} \geq 2$, puis $= 2$ et atteint en g .

- (4) En utilisant une famille de fonctions $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ qui vaut 1 en 0 et "quasiment" partout -1 sinon, montrez que $\|T_2\|_{E \rightarrow E} = 2$.

Corrigé : On définit f_n telle que $f_n(0) = 1$, $f_n(1/n) = -1$, f_n affine sur $[0, 1/n]$ et $f_n(x) = -1$ si $x \geq 1/n$. On a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $T_2(f_n)[0] = -1 - (0 + 1 - 1/n) = -2 + 1/n$. Du coup

$$\|T_2\|_{E \rightarrow E} \geq \frac{\|T_2(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} \geq \frac{|T_2(f_n)[0]|}{\|f_n\|_\infty} = 2 - \frac{1}{n}.$$

A la limite $n \rightarrow \infty$, $\|T_2\|_{E \rightarrow E} \geq 2$, puis $= 2$.

- (5) Montrez que $\|T_2\|_{E \rightarrow E} = 2$ n'est pas atteinte.

Corrigé : si atteinte, il existe $f \in E$ non nulle telle que $\|T_2(f)\|_\infty = 2\|f\|_\infty$, donc il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que

$$2\|f\|_\infty = |f(x_0) - \int_0^1 f(t) dt| \leq |f(x_0)| + \int_0^1 |f(t)| dt \leq 2\|f\|_\infty$$

donc on a égalité partout et en particulier $\int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_\infty$, donc $\int_0^1 (\|f\|_\infty - |f(t)|) dt = 0$: intégrale d'une fonction continue ≥ 0 qui vaut 0, donc $|f(t)| = \|f\|_\infty$ pour tout t est constante, puis f est constante par continuité, et donc $T_2(f) = 0$: absurde. Donc norme pas atteinte.

1. UNE APPLICATION DU THÉORÈME DU POINT FIXE : THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

On se donne $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. On suppose qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ qui seront précisés plus tard, on définit :

$$\begin{cases} \varphi_x : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & y - af(x, y) \end{cases}$$

- (1) Déterminez $\varphi'_x(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Corrigé : $1 - a\partial_y f(x, y)$.

- (2) Montrez que pour un choix judicieux de $a \in \mathbb{R}$, il existe $r > 0$ tel que $|\varphi'_x(y)| \leq \frac{1}{2}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x| < 2r$ et $|y| < 2r$.

Corrigé : avec $a = \frac{1}{\partial_y f(0, 0)}$, la fonction $(x, y) \mapsto 1 - a\partial_y f(x, y)$ étant continue et nulle en $(0, 0)$, il existe $r > 0$ tel que $\|(x, y)\|_\infty < 2r \implies |1 - a\partial_y f(x, y)| < 1/2$.

- (3) On se donne $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 2r$. Montrez que $\varphi_x([-r, r]) \subset [-r, r]$.

Corrigé : Pour $y, y' \in [-r, r]$, on a $|\varphi_x(y) - \varphi_x(y')| \leq 0,5|y - y'|$, donc $|\varphi_x(y) - 0| \leq |y| \leq r$ ce qui prouve le résultat.

- (4) Que peut-on dire de φ_x sur $[-r, r]$?

Corrigé : contractante.

- (5) Toujours pour $|x| < 2r$, montrez qu'il existe un unique $y \in [-r, r]$ tel que $f(x, y) = 0$. On notera $g(x) := y$.

Corrigé : comme φ_x contractante sur $[-r, r]$ fermé (donc complet), elle possède un unique point fixe noté $g(x)$. On a $g(x) = \varphi_x(g(x)) = g(x) - af(x, g(x))$ donc $f(x, g(x)) = 0$ et $y = g(x)$ convient. Il est unique par unicité du point fixe.

- (6) Montrez que $|y - y_0| \leq 2|a| \cdot |f(x, y) - f(x, y_0)|$ pour tous $x, y, y_0 \in [-r, r]$.

Corrigé : comme φ_x est $1/2$ -contractante, on a

$$|y - y_0 - a(f(x, y) - f(x, y_0))| \leq \frac{1}{2}|y - y_0|$$

et donc

$$\begin{aligned} |y - y_0| &\leq |y - y_0 - a(f(x, y) - f(x, y_0))| + |a(f(x, y) - f(x, y_0))| \\ &\leq \frac{1}{2}|y - y_0| + |a(f(x, y) - f(x, y_0))| \\ &\leq \frac{1}{2}|y - y_0| + |a| \cdot |f(x, y) - f(x, y_0)| \end{aligned}$$

- (7) Déduisez-en que $g : [-r, r] \rightarrow [-r, r]$ est continue.

Corrigé : Avec ce qui précède, pour $x, x_0 \in [-r, r]$, on a

$$|g(x) - g(x_0)| \leq 2|a| \cdot |f(x, g(x)) - f(x, g(x_0))| = 2|a| \cdot |f(x, g(x_0))| = 2|a| \cdot |f(x_0, g(x_0)) - f(x, g(x_0))| \rightarrow 0$$

lorsque $x \rightarrow x_0$. Donc g est continue.

On a donc démontré l'existence de $g : [-r, r] \rightarrow [-r, r]$ continue telle que $f(x, g(x)) = 0$ pour tout $x \in [-r, r]$. Avec un peu plus d'efforts, on peut montrer que g est dérivable.

2. PROBLÈME : POINT FIXE POUR DES APPLICATIONS AFFINES

On se donne un evn $(E, \|\cdot\|)$ et $K \subset E$ un compact convexe non-vide. On définit

$$\mathcal{A}_K := \{T : E \rightarrow E \text{ affine continue telle que } T(K) \subset K\}.$$

On rappelle que $T : E \rightarrow E$ est affine s'il existe $\vec{T} : E \rightarrow E$ linéaire telle que $T(x) = T(0) + \vec{T}(x)$ pour tout $x \in E$.

L'objectif de ce problème est de montrer que pour toute famille de fonctions affines continues qui commutent et fixent K , alors il existe un point fixe commun à toutes ces fonctions affines.

- (1) On se donne $T, S \in \mathcal{A}_K$ telles que $T \circ S = S \circ T$. Montrez que $(T \circ S)(K) \subset T(K) \cap S(K)$.

Corrigé : On a $S(K) \subset K$ et donc $(T \circ S)(K) = T(S(K)) \subset T(K)$. De même $(T \circ S)(K) = (S \circ T)(K) \subset S(K)$. Et donc $(T \circ S)(K) \subset T(K) \cap S(K)$.

- (2) Plus généralement, Soit $\mathcal{F}_f \subset \mathcal{A}_K$ une famille finie telle que $T \circ S = S \circ T$ pour tous $T, S \in \mathcal{F}_f$. Montrez alors que $\bigcap_{T \in \mathcal{F}_f} T(K) \neq \emptyset$.

Corrigé : En procédant comme plus haut, si $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont dans $\mathcal{A}_K$ et commutent, on montre par récurrence que $T_1 \circ \dots \circ T_n(K) \subset T_k(K)$ pour tout k , et donc $T_1 \circ \dots \circ T_n(K) \subset \bigcap_{k=1, \dots, n} T_k(K)$, qui est donc non-vide.

Pour $n \geq 1$ et $T : E \rightarrow E$, on note la moyenne

$$T_n := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i \text{ avec } T^i = T \circ \dots \circ T \text{ (} i \text{ fois)}.$$

- (3) Montrez que pour tout $T \in \mathcal{A}_K$, alors T_n commute avec T_p pour tous $n, p \geq 1$ et que $T_n(K) \subset K$.

Corrigé : Ce sont des polynômes en T , donc ils commutent. Pour tout $x \in K$, $T^i(x) \in K$ car K est stable par T . Donc $T_n(x)$ est un barycentre d'éléments de K , donc est dans K car il est convexe.

On se donne une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_K$ telle que $T \circ S = S \circ T$ pour tous $S, T \in \mathcal{F}$.

- (4) Montrez que

$$\bigcap_{T \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}} T_n(K) \neq \emptyset.$$

Indication : On pourra raisonner par l'absurde et utiliser un recouvrement ouvert.

Corrigé : Comme T_n est continue et K compact, alors $T_n(K)$ compact pour tout n , donc fermé. Si l'intersection est vide, alors K est recouvert par l'union des ouverts $O_{T,n} := E \setminus T_n(K)$, donc on en extrait un recouvrement fini $K \subset \bigcup_{finie} O_{T,n}$. Donc en repassant au complémentaire, et sachant que $T_n(K) \subset K$, on a $\bigcap_{finie} T_n(K) = \emptyset$, ce qui est absurde.

Soit alors $x \in E$ un élément de cet intersection. On fixe $T \in \mathcal{F}$. Pour tout $n \geq 1$, il existe donc $x_n \in K$ tel que $x = T_n(x_n)$.

- (5) Exprimez $T_{n+1} - T_n$ en fonction de T^n et T_n ; ainsi que $T \circ T_n$ en fonction de T_{n+1} (et d'un reste).

Corrigé : Pour $z \in E$, on écrit

$$(n+1)T_n(z) = \sum_{i=0}^n T^i(z) = nT_n(z) + T^n(z) \Rightarrow T_{n+1}(z) = \frac{n}{n+1}T_n(z) + \frac{T^n(z)}{n+1}$$

puis

$$T_{n+1}(z) - T_n(z) = \frac{1}{n+1} (T^n(z) - T_{n+1}(z)).$$

Comme le barycentre est préservé par une fonction affine, on a

$$\begin{aligned} (T \circ T_n)(z) &= T_n(T(z)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^i(z) = \frac{1}{n} ((n+1)T_{n+1}(z) - z) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) T_{n+1}(z) - \frac{z}{n} \end{aligned}$$

(6) Montrez que $x = T(x)$ et concluez.

Corrigé : En prenant $z = x_n$ ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} T(x) &= T(T_n(x_n)) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) T_{n+1}(x_n) - \frac{x_n}{n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) (T_n(x_n) + T_{n+1}(x_n) - T_n(x_n)) - \frac{x_n}{n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) x + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n+1} (T^n(x_n) - T_{n+1}(x_n)) - \frac{x_n}{n} \end{aligned}$$

Or K est compact dans E evn, donc borné. Il existe donc $M > 0$ tel que $\|z\| \leq M$ pour tout $z \in E$. Sachant que $x_n, T^n(x_n), T_{n+1}(z) \in K$, on a donc

$$\|T(x) - x\| \leq \frac{M}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{2M}{n+1} + \frac{M}{n} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. Donc $T(x) = x$ pour tout $T \in \mathcal{F}$.