

Exercices de colles - Algèbre 1

Exercice 1 — (Groupes : exercice plutôt facile.) (*Exercice 11 du TD3.*) Soit un groupe fini G . Pour tout $g \in G$ on considère l'application $L_g : G \rightarrow G, x \mapsto gx$.

- (1) Justifier le fait que, pour tout $g \in G$, $L_g \in \mathfrak{S}(G)$.
- (2) Montrer que l'application $G \rightarrow \mathfrak{S}(G), g \mapsto L_g$ est un homomorphisme injectif.
- (3) En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique.

Exercice 2 — (Permutations : exercice classique.) Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 10 & 11 & 5 & 6 & 9 & 2 & 4 & 12 & 13 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{13}.$$

Déterminer la signature de σ , écrire σ comme composée de cycles à supports deux à deux disjoints, déterminer l'ordre de σ et calculer σ^{2020} (on pourra traiter ces questions dans l'ordre que l'on jugera le plus adéquat).

Exercice 3 — (Permutations : exercice de difficulté moyenne.) (*Extrait de l'examen de janvier 2020.*)

- (1) Dans $\mathfrak{S}_4$, écrire $(1\ 3\ 2\ 4)^2$ comme composée de cycles à supports deux à deux disjoints.
- (2) Déterminer toutes les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ telles que $\sigma^2 = (1\ 2)(3\ 4)$.
- (3) Soit $n \geq 2$. Existe-t-il une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma^2 = (1\ 2)$? (*Indication : on pourra considérer la signature.*)
- (4) Soit $n \geq 6$. Existe-t-il une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma^2 = (1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6)$?

Exercice 4 — (Groupe symétrique : exercice un peu plus difficile.) (*Exercice 12 du TD3.*) Soit $n \geq 2$. Soit H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice 2. On note $K = \mathfrak{S}_n \setminus H$.

- (1) Soit $\rho \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer les cardinaux des ensembles $\rho H = \{\rho h \mid h \in H\}$ et $\rho K = \{\rho k \mid k \in K\}$.
- (2) Soit $h \in H$ et $k \in K$. Montrer que $hH \subset H$, $hK \cap H = \emptyset$, $kH \cap H = \emptyset$ et $kK \cap kH = \emptyset$. En déduire que

$$hH = H, \quad hK = K, \quad kH = K \quad \text{et} \quad kK = H.$$

- (3) Soit $\varphi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ telle que $\varphi|_H = 1$ et $\varphi|_K = -1$. Montrer que φ est un homomorphisme.
- (4) En déduire que $H = \mathfrak{A}_n$. On pourra utiliser le fait que les seuls homomorphismes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$ sont l'application constante 1 et la signature (vu à l'exercice 9 du TD3).

(Note aux colleurs : les anneaux sont supposés unitaires dans la définition donnée en cours.)

Exercice 5 — (Anneaux : exercice classique.) Soit $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 0\}$. Montrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$.

Exercice 6 — (Anneaux : exercice classique ; la question (4) est plus difficile.)
(Adapté d'un exercice de l'examen de janvier 2020.) Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad x \star y = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

- (1) Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ est un anneau. Est-il commutatif ?
- (2) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{R}^2, +, \star)$.
- (3) Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau $(\mathbb{R}^2, +, \star)$. Cet anneau est-il intègre ?
- (4) L'objectif de cette question est de déterminer tous les idéaux de l'anneau $(\mathbb{R}^2, +, \star)$.
 - (a) Montrer que $\{0\} \times \mathbb{R} = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ est un idéal de $(\mathbb{R}^2, +, \star)$.
 - (b) On suppose que I est un idéal possédant un élément (a, b) tel que $a \neq 0$. Montrer que $(1, 0) \in I$ (on pourra utiliser la question 2) puis que $I = \mathbb{R}^2$.
 - (c) On suppose que I est un idéal possédant un élément $(0, b)$ tel que $b \neq 0$. Montrer que $I \supset \{0\} \times \mathbb{R}$.
 - (d) En déduire tous les idéaux de l'anneau $(\mathbb{R}^2, +, \star)$.
- (5) Donner un exemple de sous-anneau de $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ autre que l'anneau tout entier.