

La difficulté des exercices est exprimée à l'aide d'une lettre, de (A) (très facile) à (E) (très difficile)

DÉTERMINANT

EXERCICE 1 - Calcul explicite (A)

1. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -Id_E$. Que dire de la dimension de E ?

EXERCICE 2 - Tridiagonal (C)

Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$. On pourra développer suivant la première colonne.
2. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$. On pourra calculer les premières valeurs de Δ_n , conjecturer une formule, et la démontrer par récurrence.

EXERCICE 3 - Déterminant de Vandermonde (C, classique)

Soit $n \geq 2$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n nombres complexes distincts. On se propose de calculer le déterminant suivant :

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(\alpha_1, \alpha_2)$ et $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. On les donnera sous forme factorisée.
2. Démontrer que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$ est une fonction polynômiale de x dont on précisera le degré. On pourra pour cela développer par rapport à la dernière colonne.
3. En déduire que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - \alpha_i)$. On pourra se demander quelles sont les racines de l'expression polynômiale précédente.
4. En déduire l'expression générale de $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On pourra deviner la formule à l'aide de la première question, puis procéder par récurrence.

EXERCICE 4 - Tridiagonal (C)

Soient a, b, c des réels et Δ_n le déterminant de la matrice $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2 = 4bc$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n}$.

EXERCICE 5 - Sur des polynômes (C)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Calculer $\det(u)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u(P) = P + P'$;
2. $u(P) = P(X + 1) - P(X)$;
3. $u(P) = XP' + P(1)$.

EXERCICE 6 - Déterminant de la transposition (D)

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(A) = {}^t A$. Calculer le déterminant de ϕ .

EXERCICE 7 - Rang de la comatrice et applications (C)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\text{comat } A$ la comatrice de A .

1. Discuter le rang de comat A en fonction du rang de A .
2. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation comat $A = A$ est équivalente aux équations ${}^tAA = I_n$ et $\det(A) = 1$.

EXERCICE 8 - Polynômes (C)

Soient $(z_0, \dots, z_n)$ des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille

$$((X - z_0)^n, (X - z_1)^n, \dots, (X - z_n)^n)$$

est une base de $\mathbb{C}_n[X]$. Pour ceci, calculer le déterminant de cette famille dans la base $(1, X, \dots, X_n)$. On se ramènera à un déterminant de Vandermonde.

EXERCICE 9 - Similarité (D)

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, ie qu'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$. On pourra considérer P_1, P_2 les parties réelles et imaginaires de P et montrer qu'il existe un réel x tel que $P_1 + xP_2$ est inversible.

EXERCICE 10 - Densité des matrices inversibles (C)

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes. Montrer :

$$\exists \alpha > 0, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, 0 < |\varepsilon| < \alpha, A + \varepsilon I_n \text{ est inversible.}$$

On pourra considérer les racines du polynôme $P(x) = \det(A + xI)$.

EXERCICE 11 - Déterminant d'une somme (C)

Soit $n \geq 2$. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on ait $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$. On pourra commencer par démontrer que A n'est pas inversible. Ensuite, si A a une colonne non-nulle (mais n'est pas inversible), construire B telle que B n'est pas inversible et $A + B$ est inversible.

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

EXERCICE 1 - Matrices élémentaires (B)

Parmi les matrices élémentaires $E_{i,j}$, lesquelles sont diagonalisables ?

EXERCICE 2 - Diagonalisation par polynôme minimal (C)

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer U^2 et en déduire une relation simple liant U^2 , U et I_4 .
2. En déduire que U est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
3. Diagonaliser U .

EXERCICE 3 - De rang 2 ! (B)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice carrée de taille $2n$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A . En déduire que si $n > 1$, alors 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
2. Déterminer deux vecteurs propres associés à deux autres valeurs propres, et en déduire que A est diagonalisable.

EXERCICE 4 (D)

Pour $n \geq 1$, soit

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$ son polynôme caractéristique.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$

Calculer P_1 et P_2 .

2. Pour tout $x \in]-2, 2[$, on pose $x = 2 \cos \alpha$ avec $\alpha \in]0, \pi[$. Démontrer que

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha}.$$

3. En déduire que A_n est diagonalisable. On pourra pour cela montrer que A_n a n valeurs propres distinctes.

EXERCICE 5 - Un bloc (C)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Donner les valeurs propres de B et la dimension des sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable?

INDICATION : pour $x, y \in \mathbb{C}^n$, résoudre l'équation $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et trouver quelles sont les valeurs de λ possibles.

EXERCICE 6 - Calcul d'une puissance n -ième (B, classique)

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 7 - Racine cubique (B, classique)

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres.

En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

EXERCICE 8 - Application à des suites récurrentes (C)

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .
2. Calculer A^n en fonction de n .
3. On considère les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0 , v_0 et w_0 et les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} &= 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} &= 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

pour $n \geq 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n . En déduire u_n , v_n et w_n en fonction de n .

EXERCICE 9 - Commutant d'une matrice (D)

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser A .
2. En déduire toutes les matrices M qui commutent avec A .

EXERCICE 10 - Trigonalisation - avec indication (C)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est trigonalisable.
2. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Montrer que $u = (1, 1, 0)$ est un vecteur non-nul de cet espace propre.
3. Montrer que $v = (0, 0, 1)$ est tel que $(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u$.
4. Chercher un vecteur propre w associé à la valeur propre 2. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice T de f dans la base (u, v, w) .
5. Calculer $f^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire T^k .

6. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 11 - Matrice nilpotente (D)

Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Le but de l'exercice est de démontrer que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.
2. On considère

$$\begin{aligned}\phi_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto MB - BM.\end{aligned}$$

Vérifier que ϕ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Justifier que si $A^k \neq 0$, alors k est une valeur propre de ϕ_B .
4. En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $A^k = 0$.