

## Liste d'exercices de colle

Les étoiles signalent des niveaux de difficulté. Plus il y a d'étoiles, plus l'exercice est considéré comme difficile.

### 1. SÉRIES NUMÉRIQUES

**Exercice 1.** Déterminer si la série de terme général  $u_n$  est divergente, semi-convergente ou absolument convergente dans les cas suivants.

*On ne traitera qu'un terme par ligne.*

|                                                               |                                             |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1.a) $u_n = \frac{\sin(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$                | 1.b) $u_n = \frac{1 - \cos(2/\sqrt{n})}{n}$ |
| 2.a) $u_n = \frac{n^3 + \ln n}{n + n^4}$                      | 2.b) $u_n = \frac{2^n \ln n}{n!}$           |
| 3.a) $u_n = \frac{n!}{(2n)!} e^n$                             | 3.b) $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$           |
| 4.a) $u_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n^2}$                         | 4.b) $u_n = \frac{(-1)^n + 2n}{3n^2}$       |
| 5.a) * $u_n = \frac{\sin(2n)}{n+1}$                           | 5.b) $u_n = \frac{\cos(n\pi/2)}{\sqrt{n}}$  |
| 6.a) * $u_n = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$ | 6.b) * $u_n = \frac{n}{(-1)^n n^2 + 1}$     |

**Exercice 2.** \* En utilisant les critères vus en cours, déterminer la convergence ou la divergence des séries suivantes en fonction des paramètres  $a, b \in \mathbb{R}$  :

$$\sum_{n \geq 1} \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n - a - \frac{b}{n} \right).$$

**Exercice 3.** \* Soient  $(u_n)_n$  et  $(w_n)_n$  deux suites de réels positifs. On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$ .

- (1) Si  $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$  déterminer la nature de  $\sum_n v_n$  en fonction de  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (2) Si  $\sum_n u_n$  et  $\sum_n w_n$  convergent, montrer que  $\sum_n \sqrt{u_n w_n}$  converge.
- (3) Montrer que si  $\sum_n u_n$  converge, alors  $\sum_n v_n$  diverge.

**Exercice 4.** \*\* On considère dans cet exercice des séries de la forme  $\sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon_n}{n}$  avec  $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ .

- (1) Montrer que si  $\epsilon_n = (-1)^n$ , alors la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon_n}{n}$  converge.
- (2) Montrer que si pour tout  $n \geq 0$ ,  $\epsilon_{3n+3} = -1$  et  $\epsilon_{3n+1} = \epsilon_{3n+2} = 1$ , alors la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon_n}{n}$  diverge.
- (3) (a) Montrer que pour tout entier naturel  $N$ , on a

$$\sum_{n=0}^N \left( \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \int_0^1 \frac{1 - x^{4N+4}}{1 + x^2} dx.$$

- (b) En déduire la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right)$  et calculer la somme de cette série.
- (c) Montrer de même la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} \right)$  et calculer la somme de cette série.

- (d) En déduire que si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon_{4n+1} = \epsilon_{4n+2} = 1$  et  $\epsilon_{4n+3} = \epsilon_{4n+4} = -1$ , alors  $\sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon_n}{n}$  converge et calculer sa somme.

## 2. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

**Exercice 5.** Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  la suite de fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^3 x^2}$

- (1) Montrer que  $(f_n)_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  que l'on déterminera.
- (2) Soit  $a > 0$ . Montrer que  $(f_n)_n$  converge uniformément sur  $[a, +\infty[$ .
- (3) Montrer que  $(f_n)_n$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}$ .
- (4) Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  mais pas absolument sur  $\mathbb{R}^*$ .
- (5) Soit  $a > 0$ . Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n f_n$  converge uniformément sur  $[a, +\infty[$ .
- (6) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n f_n$  converge-t-elle normalement sur  $\mathbb{R}^*$ ? Sur  $[a, +\infty[$ ?

**Exercice 6.** On considère la suite  $f_n(x) := e^{-n x^2} \sin(nx) + \sqrt{1-x^2}$  pour  $x \in [-1, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

- (1) Montrer que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement vers une fonction  $f$  qu'on déterminera.
- (2) Montrer que pour tout  $a$  tel que  $0 < a < 1$ ,  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[a, 1]$ .
- (3) En calculant  $f_n(n^{-1/2})$ , montrer que la convergence n'est pas uniforme sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 7.** (1) Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n^2 x)}{n^5 + e^x}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

- (2) \* Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^5 + e^x}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 8.** \* On se donne un réel  $a \in [0, 1]$ .

- (1) Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} a^n \cos(\sqrt{n}x)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .
- (2) Montrer que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(\sqrt{n}x)$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

## 3. INTÉGRATION

**Exercice 9.** Calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_0^1 x \arctan(x) dx \quad 2) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(x)}{\cos^2 x + 1} dx \quad 3) \int_1^5 \ln x e^{-x} dx$$

**Exercice 10.** (1) Montrer que pour tout  $x \geq 0$ , on a

$$x - x^2 \leq \log(1+x) \leq x.$$

(2) Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4}.$$

(3) En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

**Exercice 11.** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{2n} \frac{\arctan(x)}{x} dx \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{2n} \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$$

**Exercice 12.** \* On pose

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)} dt.$$

(1) Calculer  $I - J$ .

(2) Calculer  $I + J$  en posant  $u = \tan(t)$ .

(3) En déduire  $I$  et  $J$ .

**Exercice 13.** \* On définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $G$  par

$$G(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

(1) Montrer que  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $G'$ .

(2) Étudier les variations de  $G$  sur  $\mathbb{R}$ .

(3) Déterminer la limite de  $G$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

(4) Donner l'allure du graphe de la fonction  $G$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### 4. INTÉGRALES IMPROPRES

**Exercice 14.** Donner la nature des intégrales suivantes (semi convergente, absolument convergente, divergente).

$$\begin{array}{ll} 1) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx & 2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^3+2x}} dx \\ 3) \int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x} dx & 4)* \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \\ 5) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin(1/x^2)}{\ln(1+x)} dx & \end{array}$$

**Exercice 15.** Déterminer, suivant la valeur de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la nature des intégrales suivantes :

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt \quad 2)* \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) dx$$

**Exercice 16.** \* Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t \sin t} dt$  diverge.  
On pourra utiliser le critère de Cauchy.

**Exercice 17.** \*\* Soit  $f$  une fonction continue de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ .  
On suppose que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f^2(t) dt$  converge.

- (1) Prouver que, pour tous  $0 \leq a \leq b$ , on a

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sqrt{b-a} \left( \int_a^b f^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

- (2) En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t) dt = 0.$$

*Indication : couper l'intégrale au bon endroit*

## 5. SÉRIES ENTIÈRES

**Exercice 18.** \* Pour quelles valeurs de  $z \in \mathbb{C}$  la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$  converge-t-elle ?  
Et  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n + \ln n}$  ?

**Exercice 19.** On considère les séries entières suivantes.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{n}; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{2^{(-1)^n n}}{n} x^n; \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} x^{2n+1}.$$

- (1) Déterminer les rayons de convergence  $R$  de chacune de ces séries entières.  
(2) Calculer les sommes sur  $] -R, R[$  de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{n}; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{2^{(-1)^n n}}{n} x^n.$$

**Exercice 20.** Donner le développement en série entière des fonctions suivantes et déterminer le rayon de convergence des séries entières obtenues.

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)}; \quad g(x) = \ln(1-2x+x^2); \quad h(x) = \exp(1+x^3).$$

**Exercice 21.** On considère la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  où les  $a_n$  sont définis par  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 3$  et pour  $n \geq 2$ ,  $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ . On note  $f(z)$  sa somme.

- (1) Montrer que le rayon de convergence  $R$  de cette série vérifie  $R \geq 1/4$ .  
(2) Montrer que pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $|z| < R$ , on a

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}.$$

- (3) En déduire la valeur de  $R$  ainsi que l'expression de  $a_n$  en fonction de  $n$ .

## 6. EXERCICES BILAN

**Exercice 22** (Chapitres 4 et 5). On définit pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \frac{1-t^2}{1-t^6}$ .

- (1) Rappeler le développement en série entière de  $1/(1-x)$  sur  $] -1, 1[$ .  
(2) Déterminer le développement en série entière de  $f$  sur  $] -1, 1[$ .  
(3) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  l'intégrale impropre suivante converge

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}$$

et définit une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  dont on exprimera la dérivée en fonction de  $f$ .

- (4) Déterminer le développement en série entière de  $F$  sur  $] -1, 1[$  en fonction de  $F(0)$ .
- (5) Calculer  $F(0)$ .

**Exercice 23.** \*\* Soient  $(a_n)_n$  et  $(b_n)_n$  deux suites réelles. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ .

- (1) Montrer que la série de fonction  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si les séries numériques  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n$  sont absolument convergentes.
- (2) Montrer que si  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  alors la somme  $S$  de cette série est une fonction continue  $2\pi$ -périodique.
- (3) Montrer que si  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  alors pour  $n \neq 0$ ,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

- (4) Soit  $f$  la fonction continue  $2\pi$ -périodique vérifiant  $f(x) = x^2$  pour  $x \in [-\pi, \pi]$ .

(a) Calculer

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

- (b) Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)$  converge normalement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (c) En déduire la valeur des sommes  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

## 7. INTÉGRALES À PARAMÈTRE (PROGRAMME SPÉCIFIQUE CPU)

**Exercice 24.** \*\*  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{ixt} dt$

- (1) Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $F'$ .
- (2) Montrer que  $F$  vérifie une équation différentielle que l'on explicitera et calculer la valeur de  $F$ .

**Exercice 25.** \*\*  $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$

- (1) Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $F'$ . Étudier les variations de  $F$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (2) Étudier les limites et les branches infinies de  $F$ . Tracer le graphe de  $F$ .