

Exercices colles Méthodes Numériques

mise en garde : Les exercices sont de difficulté variable (précisée par des $\star$). Certains exercices sont longs, on pourra ne traiter que les premières questions.

Exercice 1. $\star$ (racine d'une équation). On considère la fonction :

$$f(x) = 2\ln(x) + x^2 + x - 4$$

définie pour $x > 0$.

1. Via une étude de fonction, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique r . Localiser r dans un intervalle $I = [a, a + 1]$ où $a \in \mathbb{N}$.
2. Pour calculer approximativement r , on propose la méthode :

$$x_{n+1} = x_n - \alpha f(x_n) = g(x_n), \quad x_0 \in I, \quad \alpha = \frac{1}{6}$$

- (a) Montrer que la restriction de g sur I répond aux 3 hypothèses du théorème du point fixe des applications contractantes. Qu'en concluez-vous ?
- (b) Quelle est la constante de contraction de g ? En déduire le nombre N d'itérations suffisant pour assurer :

$$|x_N - r| \leq 10^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

en partant du milieu de I (càd de $x_0 = a + \frac{1}{2}$).

3. Comme troisième méthode, écrire une itération de la méthode de Newton (ne rien démontrer).

Exercice 2. $\star$ (Moyenne arithmético-harmonique). On considère deux nombres réels strictement positifs a et b vérifiant $a < b$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad (n \geq 0).$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et admettent la même limite. Indication : On pourra étudier le signe de $u_n - v_n$ afin de déterminer la monotonie des suites (u_n) et (v_n) .
2. Montrer que :

$$u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En déduire la limite commune à (u_n) et (v_n) .

3. Démontrer que :

$$|u_{n+1} - v_{n+1}| = \frac{1}{2} \frac{(u_n - v_n)^2}{u_n + v_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Démontrer que :

$$|u_n - v_n| \leq 2^{-n}|a - b|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En déduire une condition suffisante portant sur n pour que $|u_n - v_n| \leq 10^{-k}$ où $k \in \mathbb{N}$.

5. Déduire de la question 3) la majoration pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{4a}|u_n - v_n|^2$
6. Déduire de la question précédente que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{m+n} - v_{m+n}| \leq 4a \left(\frac{1}{4a}|u_m - v_m| \right)^{2^n}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

Indication : on pourra mettre en oeuvre une récurrence sur n .

7. En utilisant le résultat de la question 4), déterminer, en fonction de a et b une valeur de m telle que $\frac{1}{4a}|u_m - v_m| \leq \frac{1}{10}$.
8. En utilisant les résultats des questions 6) et 7), déterminer, en fonction de a et b une condition suffisante portant sur n pour que $|u_{m+n} - v_{m+n}| \leq 10^{-k}$ où $k \in \mathbb{N}$.

Comparer la valeur $m + n$ obtenue avec le résultat obtenu à la question 4).

Exercice 3. $\star$

On considère la fonction :

$$g : \begin{cases} [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + \frac{1}{2} \sin(x) \end{cases}$$

1. Montrer qu'elle répond aux trois hypothèses du théorème du point fixe des applications contractantes. Que peut-on en conclure ?
2. En déduire une méthode itérative pour calculer le point fixe ξ de g . En choisissant $x_0 = 1$, quel nombre d'itérations N assure que $|x_N - \xi| \leq \frac{1}{2^{20}}$?

Exercice 4. * (*De nombreux points fixes.*). Soit la fonction $g(x) = x + \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer tous les points fixes de g .
2. Déterminer la stabilité de chacun de ces points fixes.
3. Soit $I_k = [2k\pi, 2(k+1)\pi]$. Montrer que g est strictement croissante sur I_k et que $g(I_k) = I_k$.
4. Déduire des questions précédentes la convergence de la suite $u_{n+1} = g(u_n)$, avec $u_0 \in I_k$ (aide : considérer le signe de $g(x) - x$).

Exercice 5. **

On considère deux nombres réels strictement positifs a et b vérifiant $a < b$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad (n \geq 0).$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et admettent la même limite (aide : montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, $v_n > 0$, $u_n < v_n$ puis montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante).
2. Démontrer que :

$$|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |u_n - v_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et en déduire par récurrence que :

$$|u_n - v_n| \leq 2^{-n} |a - b|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En déduire finalement une condition suffisante portant sur n pour que $|u_n - v_n| \leq 10^{-k}$ où $k \in \mathbb{N}$.

3. Démontrer que

$$|u_{n+1} - v_{n+1}| = \frac{1}{2} \frac{(u_n - v_n)^2}{(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En déduire la majoration pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{8a} |u_n - v_n|^2$

4. Déduire de la question précédente que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{m+n} - v_{m+n}| \leq 8a \left(\frac{1}{8a} |u_m - v_m| \right)^{2^n}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

Indication : on pourra mettre en oeuvre une récurrence sur n .

5. En utilisant le résultat de la question 2), déterminer, en fonction de a et b une valeur de m telle que $\frac{1}{8a} |u_m - v_m| \leq \frac{1}{10}$.
6. En utilisant les résultats des questions 4) et 5), déterminer, en fonction de a et b une condition suffisante portant sur n pour que $|u_{m+n} - v_{m+n}| \leq 10^{-k}$ où $k \in \mathbb{N}$.

Comparer la valeur $m + n$ obtenue avec le résultat obtenu en question 2).

Exercice 6. *

Soit $f(x) = x^3 - x^2 - 1$. On se propose de trouver les racines réelles de f .

1. Situer la ou les racines de f . Montrer qu'il y a une racine $r \in I = [1, 2]$.
2. On définit la méthode itérative $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $x_0 \in [1, 2]$ et :

$$g(x) = (x^2 + 1)^{1/3}.$$

- (a) Vérifier que r est bien un point fixe de g .
- (b) Par une étude de fonction, montrer que $g(I) \subset I$.
- (c) En étudiant g' sur I , montrer que g est une contraction sur I , la constante de contraction étant égale à :

$$L = \frac{2}{\sqrt{3} \times 4^{2/3}} \simeq 0,458.$$

- (d) En déduire que la suite (x_n) converge vers r .

(e) Montrer que :

$$|x_n - r| \leq L^n |x_0 - r|, \quad \forall n \geq 0.$$

(f) On cherche une approximation x_N telle que $|x_N - r| \leq \epsilon$ ($0 < \epsilon < 1$). En majorant l'erreur initiale $|x_0 - r|$ par 1, quel nombre d'itérations assure $|x_N - r| \leq \epsilon$?

Exercice 7. ★★ Soit m un nombre réel et $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable (c-à-d dérivable et la fonction dérivée est continue). On suppose de plus qu'un nombre réel ℓ vérifie $f(\ell) = 0$.

On définit la suite (x_n) par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}$.

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout n il existe un réel c_n compris entre ℓ et x_n vérifiant

$$x_{n+1} - \ell = \left(1 - \frac{f'(c_n)}{m}\right) (x_n - \ell).$$

2. On suppose dans cette question (**uniquement**) que m et f vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{f'(x)}{m} \leq \frac{3}{2}.$$

Déduire de la question précédente que (x_n) converge vers ℓ .

3. La condition imposée à la question précédente étant très contraignante, on cherche à améliorer le procédé. On suppose désormais (**pour la suite de l'exercice**) que f est strictement croissante et que sa dérivée ne s'annule pas.

(a) En utilisant la définition de la continuité de f' en ℓ , démontrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [\ell - \eta, \ell + \eta], \quad \frac{4}{5} f'(\ell) \leq f'(x) \leq \frac{6}{5} f'(\ell).$$

(b) On suppose de plus que m vérifie $|m - f'(\ell)| \leq \frac{1}{5} f'(\ell)$. En utilisant les résultats des questions 1 et 3 (a), démontrer que si $x_n \in [\ell - \eta, \ell + \eta]$, on a alors :

$$|x_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |x_n - \ell| < \eta.$$

(c) Démontrer que si $x_0 \in [\ell - \eta, \ell + \eta]$, alors la suite (x_n) converge vers ℓ .

(d) Déterminer alors la rapidité de convergence de cette suite en fonction de m . Quelle est la meilleure valeur possible pour m ?

Exercice 8. ★

Soit la fonction $f(x) = \ln(x) + x^2 + 2x - 5$ définie pour $x > 0$.

1. Montrer que f possède une racine unique r . Localiser r dans l'intervalle $I = [n, n+1]$ où $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour approcher r on considère la méthode de point fixe $x_{k+1} = g(x_k)$ avec $g(x) = x - f(x)$, g définie sur I . Montrer que r est un point fixe instable de g , c-à-d que $|g'(r)| > 1$.

3. On considère maintenant que $g(x) = x - f(x)/m$ avec $m > 0$. Montrer que g est une contraction sur I si et seulement si $m > 13/4$.

4. On choisit $m = 5$. Montrer que la suite $x_{k+1} = g(x_k)$, $x_0 \in I$ est bien définie et converge vers r .

5. Quelle est la constante de la contraction pour $m = 5$? On cherche une approximation x_N telle que $|x_N - r| \leq \epsilon$ ($0 < \epsilon < 1$). En majorant l'erreur initiale par 1, quel nombre d'itérations assure $|x_N - r| \leq \epsilon$?

Exercice 9. ★★ (*Racine p -ième*). Soit p un entier ≥ 2 , et a un réel > 1 . On cherche une méthode pour approcher $r = \sqrt[p]{a} = a^{1/p}$ en se basant sur la méthode de Héron vue en TD (pour $p = 2$ on obtiendra exactement la méthode de Héron), c-à-d que l'on va chercher la racine de la fonction :

$$f(x) = x^p - a$$

en considérant f définie sur $I = [a^{1/p}, +\infty[$.

1. Ecrire une itération de la méthode de Newton appliquée sur f .

2. Quelle est la fonction de point fixe g associée ? (c-à-d quelle est la fonction g permettant d'écrire l'itération de Newton sous la forme $x_{n+1} = g(x_n)$). De même on considèrera que g est définie sur I .

3. En faisant une étude de fonction, montrer que $g(I) \subset I$, et que g est lipschitzienne sur I de constante $L = \frac{p-1}{p}$.

4. Que peut-on en déduire sur la suite $x_{n+1} = g(x_n)$, $n \geq 0$, $x_0 \in I$?

5. Montrer que :

$$x_{n+1} - a^{1/p} = (x_n - a^{1/p}) \left(1 - \frac{\sum_{k=0}^{p-1} a^{(p-1-k)/p} x_n^k}{p x_n^{p-1}} \right)$$

puis que :

$$x_{n+1} - a^{1/p} = \left(x_n - a^{1/p} \right)^2 \frac{\sum_{k=0}^{p-2} c_k x_n^k}{p x_n^{p-1}}$$

où $c_k = (k+1)a^{(p-k-2)/p}$.

6. Déduire de la question précédente que :

$$|x_{n+1} - a^{1/p}| \leq \frac{p-1}{2a^{1/p}} |x_n - a^{1/p}|^2$$

Que peut-on déduire de cette estimation sur la rapidité de convergence ?

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et croissante. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$. Le signe de g en fonction de x est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	r_1	r_2	$+\infty$	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Soit $(x_n)_n$ la suite définie par récurrence par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n \geq 0$).

1. Tracer le graphe d'une fonction f vérifiant les hypothèses.
2. Montrer que les intervalles $I_1 =]-\infty, r_1[$, $I_2 =]r_1, r_2[$ et $I_3 =]r_2, +\infty[$ sont stables par f .
3. Étudier en fonction de la position de x_0 la monotonie et la convergence de $(x_n)_n$ (on justifiera avec soin les résultats énoncés).
4. Étudier le caractère répulsif ou attractif des points fixes.
5. On suppose que f est dérivable au point r_1 et que $f'(r_1) = 0$. On suppose également que $(x_n)_n$ converge vers r_1 et que pour tout $n \geq 0$, $x_n \neq r_1$. Montrer qu'alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - r_1}{x_n - r_1} = 0.$$

Exercice 11. ★ Soit $a > 0$ fixé. On définit la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $h(x) = 2x - ax^2$, et on définit par récurrence la suite $(x_n)_n$ en prenant $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} = h(x_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de h et en faire la représentation graphique.
Déterminer les points fixes de h .
2. Vérifier que les intervalles $J_1 =]-\infty, 0[$ et $J_2 =]0, 1/a[$ sont stables par h .
3. On prend $x_0 \in J_1$. Étudier la monotonie et le comportement asymptotique de $(x_n)_n$.
4. On prend $x_0 \in J_2$. Étudier la monotonie et le comportement asymptotique de $(x_n)_n$.
5. Quel est l'ensemble des $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que la suite $(x_n)_n$ converge vers $1/a$?
On pourra se demander où se trouve le point x_1 lorsque x_0 est dans $]1/a, +\infty[$.
6. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $h(x) - \frac{1}{a} = a \left(x - \frac{1}{a} \right)^2$.
7. Pour tout $n \geq 0$, on pose $e_n = x_n - 1/a$.
Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n , puis en déduire une expression de e_n en fonction de n et de e_0 .
8. Retrouver, à l'aide de la question précédente, le résultat de la question 5, et déterminer, lorsque $(x_n)_n$ converge vers $1/a$, la vitesse de convergence.

Exercice 12. ★★ Soit $a > 1$ et k un entier supérieur à 3 fixés.

On souhaite calculer une valeur approchée de la racine k -ième de a .

1. On définit la suite $(x_n)_n$ en posant $x_0 \in]0, +\infty[$ et pour $n \geq 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $f(x) = a/x^{k-1}$.
(a) Vérifier que l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par f et que f n'a qu'un point fixe sur cet intervalle.
(b) Quelle est la nature de ce point fixe ? Que pensez-vous de cette suite pour la calcul d'une valeur approchée de la racine k -ième de a ?
2. On définit pour $x \geq 0$, $g(x) = x - \frac{x^k - a}{ka}$.

- (a) Montrer que g n'admet qu'un seul point fixe dans $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa nature.
 - (b) En utilisant la continuité de g' , montrer qu'il existe $r \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$ tels que g soit r -contractante sur l'intervalle $I = [a^{1/k} - \varepsilon, a^{1/k} + \varepsilon]$.
 - (c) Montrer que I est stable par g .
 - (d) Montrer que la suite $(x_n)_n$ définie en choisissant $x_0 \in I$ et en posant pour $n \geq 0$, $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers $a^{1/k}$ et déterminer sa vitesse de convergence.
3. Ecrire la méthode de Newton pour la fonction $x \mapsto x^k - a$. Si la suite fournie par la méthode de Newton converge vers $a^{1/k}$, quelle est la vitesse de convergence ?

Exercice 13. Pour chacune des questions suivantes, donner, sans justification, un énoncé précis.

1. Quels sont les comportements asymptotiques possibles d'une suite réelle croissante ?
2. Qu'est-ce qu'une fonction contractante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$?
3. Énoncer le théorème de la contraction (aussi appelé théorème du point fixe).
4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Qu'est-ce qu'un intervalle stable pour f ?
5. Qu'est-ce qu'un point fixe répulsif ?

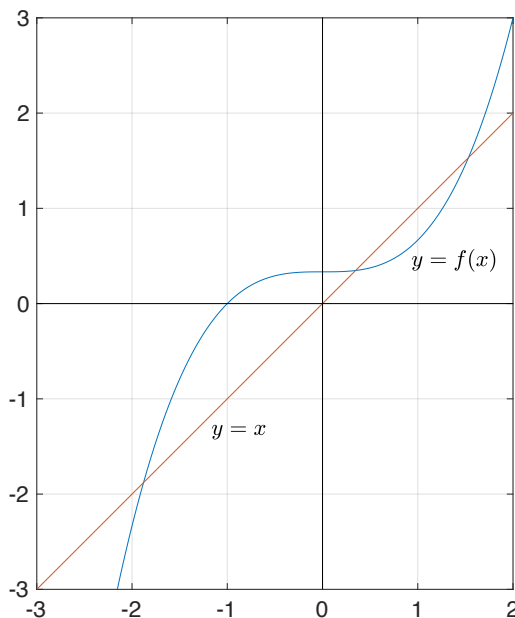
Exercice 14. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-x^2/2}$ et soit $(x_n)_n$ une suite définie par récurrence en posant $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = h(x_n)$ ($n \geq 0$).

1. Montrer, en faisant une étude de fonction, que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |h'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} < 1.$$

2. Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que h est contractante sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_n$ converge toujours vers la même limite.

Exercice 15. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 1)$. On donne ci-dessous sa représentation graphique. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence en fixant $u_0 \in \mathbb{R}$ et en posant, pour tout entier positif n , $u_{n+1} = f(u_n)$.



1. Donner, par lecture graphique et sans justification pour l'instant, le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de la position de u_0 .
2. Pourquoi, quelque soit la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
3. Sur $\mathbb{R}$, on considère maintenant le polynôme $P(x) = x^3 - 3x + 1$. Étudier les variations de P et montrer que P admet 3 racines réelles $r_1 < r_2 < r_3$.
4. En déduire le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$. Quels sont les points fixes de f ? Déterminer des intervalles stables pour f .

5. On prend $u_0 \in]r_2, r_3[$. Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
6. On prend $u_0 \in]r_3, +\infty[$. Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
7. Quelle est la nature (répulsif ou attractif) du point fixe r_3 de f ?
8. Montrer que sur $[0, 1/2]$, la fonction f est $1/4$ -contractante. En déduire que si $u_0 = 0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - r_2| \leq \frac{K}{4^n},$$

où K est une constante que l'on précisera.

9. Quelle est la nature (répulsif ou attractif) du point fixe r_2 de f ?
10. En vous appuyant sur la question (8), proposer un algorithme qui rend une valeur approchée de r_2 à 10^{-5} près ?