

Outils Logiques - L1 MIASHS - Notes de cours

Romain Péchoux

Références

- R. David, K. Nour, C. Raffalli, Introduction à la logique - théorie de la démonstration, Dunod, 2001.
- P. Gochet, P. Gribomont, Logique. Méthodes pour l'informatique fondamentale - Volume 1, Hermès 1997.
- J.-Y. Girard. Le Point Aveugle: Tome 1. Cours de Logique, Vers la perfection, Hermann, 2006.

1 Introduction

1.1 Motivations

Les buts de la logique en informatique sont de:

- Mécaniser les processus cognitifs ou de raisonnement
- Etudier les liens entre démonstrations et calculs / entre preuves et algorithmes (Isomorphisme de Curry-Howard)
- Formaliser l'informatique pour des applications de sûreté et de sécurité (safe and secure).

La logique est une discipline à la confluence des mathématiques, de la philosophie et de l'informatique.

1.2 Historique

Le développement des disciplines logique correspond à un besoin de formalisation et de modélisation du raisonnement.

- Au début, seuls les entiers existent. Puis les rationnels sont introduits.
- Fin XVIIème, les fonctions (extensions) sont introduites par Leibniz.
- Début XIXème, sont introduits les relatifs et les complexes

- Au XIX^{ème} siècle, apparaissent les nombres réels (Dedekind), puis les fonctions et les ensembles (étudiés par Cantor)
- Fin XIX^{ème}, la notion de théorème apparaît (Boole, Frege, ...)
- Début XX^{ème}, Church, Curry, De Bruijn et Howard introduisent les fonctions (intension) et les démonstrations

La (discipline) logique combinée à l'informatique permet d'automatiser le raisonnement. Des théorèmes peuvent être prouvés de manière totalement automatisée à l'aide d'assistants de preuve (Par exemple, le théorème des 4 couleurs qui consiste à colorier des cartes de manière à ce que deux pays limitrophes soient de couleurs différentes a été prouvé en utilisant l'assistant Coq en 2005).

1.3 Définition informelle

La (discipline) logique se compose de différentes logiques. En vulgarisant, une logique se compose d'un ensemble d'axiomes (un énoncé atomique et présupposé valide) et de règles. La combinaison de ces règles et de ces axiomes permet d'obtenir une démonstration (ou preuve).

1.4 Les niveaux de la logique

Toute logique peut être vue à deux niveaux :

- La théorie : le niveau des démonstrations.
- La méta-théorie : le niveau où l'on raisonne sur la logique elle-même.

La méta-théorie est habitée par les méta-théorèmes, i.e. des théorèmes sur la logique. Pour une logique donnée, des exemples de méta-théorèmes sont:

- La correction: les théorèmes prouvés correspondent à des énoncés valides (contre-exemple: une logique contenant la règle "S'il pleut ou s'il fait soleil alors il pleut et il fait soleil en même temps" est incorrecte).
- La complétude: tous les énoncés valides sont prouvables (une logique "intuitionniste" rejetant le principe du tiers exclu, i.e. "un énoncé est vrai ou faux" est incomplète. Pourquoi ?).
- La cohérence: la logique est exempte de contradictions, i.e. on ne peut pas prouver un énoncé et son contraire (contre-exemple: une logique contenant la règle "tout ce qui est faux est vrai" est incohérente).

Le monde des méta-théorèmes peut parfois être déroutant. Tel est le cas du théorème de Gödel. Ce théorème démontre que l'arithmétique est incomplète, à savoir qu'il existe des énoncés valides non prouvables en arithmétique...What the hell ?

1.5 Les logiques

Il existe autant de logiques que d'applications de la logique :

- logiques classiques des propositions ou des prédicats pour les mathématiciens,
- logiques intuitionnistes pour les informaticiens,
- logiques multivaluées permettant de raisonner sur plus de deux états logiques dont les logiques floues avec des nombres réels,
- logiques temporelles, hybrides pour modéliser des phénomènes temporelles
- logiques linéaires (linguistique, complexité) permet de modéliser les ressources (en vulgarisant un énoncé "A" est vrai une seule fois en logique linéaire, tandis qu'il est vrai *ad vitam eternam* dans la logique mathématiques. Vous ne reprouvez pas Pythagore pour chaque marche de l'escalier !),
- ...

Dans ce cours, nous nous concentrerons sur une logique simple pour les mathématiciens et informaticiens: la logique des propositions dans les cadres classique et intuitionniste.

2 Rappels

La logique des propositions est à la base du raisonnement mathématique. C'est une logique dérivée de la logique stoïcienne qui utilise les propositions comme élément de base du raisonnement. Nous considérons ici le fragment classique.

2.1 Syntaxe

Une proposition est juste un énoncé pouvant être "vrai" ou "faux". Les valeurs de vérité "vrai" et "faux" sont des constantes représentées respectivement par les chiffres 1 et 0. Par exemple, "les étudiants de L1 MIASHS sont réveillés".

Une proposition de base est donc modélisée par une variable à valeur dans $\{0, 1\}$ que l'on appelle *atome* et qui dénotée par une lettre $A, B, C, \dots, P, Q, R, \dots$ appartenant à un ensemble fixe de variables $\mathcal{V}$.

La logique des propositions inclut un ensemble de *connecteurs logiques* prédéfinis, les opérateurs $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Une *formule* de la logique des propositions est une expression bien formée obtenue par combinaison des constantes, des atomes et des connecteurs d'après la grammaire suivante:

$$F, F_1, F_2, \dots ::= \perp \mid \top \mid P \mid (F_1 \wedge F_2) \mid (F_1 \vee F_2) \mid (\neg F_1) \mid (F_1 \Rightarrow F_2) \mid (F_1 \Leftrightarrow F_2)$$

avec $P \in \mathcal{V}$.

2.2 Sémantique

Une *distribution* δ est une fonction de $\mathcal{V}$ dans $\{0, 1\}$ qui associe une valeur de vérité à chaque atome.

Une *évaluation* est l'extension d'une distribution δ à une formule F et est notée $\llbracket F \rrbracket \delta$ et se définit formellement par:

$$\begin{aligned} \llbracket \perp \rrbracket \delta &= 0 & \llbracket \top \rrbracket \delta &= 1 \\ \llbracket P \rrbracket \delta &= \delta(P), \quad P \in \mathcal{V} & \llbracket \neg F \rrbracket \delta &= \neg(\llbracket F \rrbracket \delta) \\ \llbracket op(F_1, F_2) \rrbracket \delta &= \llbracket op \rrbracket(\llbracket F_1 \rrbracket \delta, \llbracket F_2 \rrbracket \delta), & op &\in \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \end{aligned}$$

si $\llbracket op \rrbracket$ est la fonction calculée par l'opérateur op (i.e. des fonctions de $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ou $\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ dans le cas de $\neg$).

Une distribution δ *satisfait* une formule F si $\llbracket F \rrbracket \delta = 1$, ce que l'on note $\delta \models F$. Dans ce cas, δ est un *modèle* de F . Dans le cas contraire, δ est un contre-modèle.

Une formule F est *satisfiable* si il existe une distribution qui la satisfait (i.e. $\exists \delta, \delta \models F$. N.B: on sort de la logique des propositions !) Une formule F est *tautologique* ou valide si toute distribution la satisfait (i.e. $\forall \delta, \delta \models F$. N.B.: idem), noté $\models F$. Une formule est *inconsistante* ou contradictoire si il n'existe pas de distribution qui la satisfait.

Soient $\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}$ un ensemble de formule et une distribution δ , on dit que δ est un modèle de Γ si δ est un modèle de chacun des F_i . Soient une formule F et un ensemble de formule Γ , on dit que F est *conséquence logique* de Γ , noté $\Gamma \models F$ si tout modèle de Γ est un modèle de F .

2.3 Propriétés de la logique

Nous dérivons un certain nombre de théorèmes de ces déductions:

Théorème 1

$$\models F \text{ si et seulement si, pour tout ensemble } \Gamma, \Gamma \models F.$$

Théorème 2

$$\Gamma \text{ n'a pas de modèle si et seulement si, pour toute formule } F, \Gamma \models F.$$

Théorème 3

$$\Gamma \models F \text{ si et seulement si, } \Gamma \cup \{\neg F\} \text{ n'a pas de modèle.}$$

Théorème 4 (Sémantique de la déduction)

$$\{F\} \models G \text{ si et seulement si } F \Rightarrow G$$

Équivalence logique: $F \equiv G$ si F et G ont exactement les mêmes modèles.