

Outils Logiques - L1 MIASHS - La déduction naturelle

Romain Péchoux

1 Une méthode de preuve

Dans la méthode des tableaux, on construit une dérivation (un arbre ou preuve) à l'aide des prémisses et de la conclusion afin de montrer qu'il n'existe pas de configuration où les prémisses sont vraies et la conclusion fausse (on vérifie que toutes les branches sont closes).

Nous allons maintenant introduire une méthode, introduite par Gentzen, permettant de "construire" la preuve d'une conclusion à partir des prémisses: la déduction naturelle (DN).

L'idée directrice est de s'inspirer du raisonnement "naturel" utilisé en mathématiques afin de déduire une preuve à partir des prémisses.

La version de la déduction naturelle présentée dans ce cours concerne toujours la logique des propositions classique et est généralement appelée NK dans la littérature.

Ici nous utilisons la notation dite de Fitch. La notation de Prawitz sera abordée à la fin de ce cours.

2 Dérivation

Une *dérivation* en DN est une suite de lignes:

- composées d'une formule
- numérotées
- et possédant un nom de règle (la règle utilisée pour construire ou déduire la formule)

Par exemple :

$$\begin{array}{l|l} 1 & F \Rightarrow G \quad (P) \\ 2 & G \quad (P) \end{array}$$

est une dérivation composée de deux lignes (1) et (2) où les formules $F \Rightarrow G$ et G sont des prémisses (utilisation de la règle (P)).

Soit $F_1, \dots, F_n$ un ensemble de prémisses, une dérivation de la forme :

$$\begin{array}{c|cl} 1 & F_1 & (P) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n & F_n & (P) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n+m & F & (R\grave{e}gle) \end{array}$$

est notée $F_1, \dots, F_n \vdash_{\text{NK}} F$. On parle de *démonstration* en déduction naturelle DK lorsque l'ensemble des prémisses est vide, noté $\vdash_{\text{NK}} F$ par abus de notation et on dit que F est un *théorème* de la DN.

Il est important de constater que même si les deux notions ne sont pas totalement indépendantes, il faut bien distinguer le symbole de dérivation $\vdash$ (symbole purement syntaxique) en DN du symbole de conséquence logique $\models$ précédemment introduit (symbole sémantique). Le nom de la règle indique le numéro de la ligne dont la formule est répétée.

3 règles de NK

3.1 Répétition

Nous avons déjà vu la règle d'introduction d'une prémisses. Il nous reste à voir une règle purement syntaxique : la répétition.

$$\begin{array}{c|cl} n & F & (R\grave{e}gle) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n+m & F & (R, n) \end{array}$$

Cette règle signifie que ce qui a déjà été déduit une fois, peut l'être à nouveau au cours de la preuve (c'est une des propriétés mathématiques habituelle, si vous avez démontré Pythagore, vous pouvez l'utiliser autant de fois que vous avez de marches dans votre escalier).

Pour pouvoir prouver une conclusion à partir de prémisses, il faut des règles pour pouvoir décortiquer (ou déconstruire) les prémisses puis pour construire la conclusion. Ainsi à chaque connecteur de la logique va correspondre des règles d'introduction (pour construire) et des règles d'élimination (pour déconstruire). C'est l'une des propriétés importantes de la DN.

3.2 Conjonction

Pour la conjonction, les règles d'élimination sont les suivantes:

$$\begin{array}{c|cl} n & F \wedge G & (R\grave{e}gle) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m & F & (\wedge E, n) \end{array} \qquad \begin{array}{c|cl} n & F \wedge G & (R\grave{e}gle) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m & G & (\wedge E, n) \end{array}$$

La notation $\wedge E$ signifie *Elimination* du connecteur $\wedge$ tandis que l'entier n correspond à la ligne sur lequel la règle est appliquée. Une interprétation sémantique de ces règles est la suivante "Si la conjonction de F et G est vraie alors F (respectivement G) est vraie".

Pour la conjonction, la règle d'introduction se présente sous la forme:

$$\begin{array}{c|cl} n & F & (Regle) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m & G & (Regle') \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l & F \wedge G & (\wedge I, n, m) \end{array}$$

Elle peut s'interpréter "si j'ai démontré que F est vraie et si j'ai démontré que G est vraie alors je peux démontrer que la conjonction l'est aussi". Cette fois la lettre I est utilisée pour signaler que l'on reconstruit la formule. Enfin, cette règle se basant sur 2 règles, il est nécessaire de retenir les deux numéros de ligne n et m .

Nous pouvons commencer des ébauches de démonstration: par exemple, l'associativité de $\wedge$:

$$\begin{array}{c|cl} 1 & (p \wedge q) \wedge r & (P) \\ 2 & p \wedge q & (\wedge E, 1) \\ 3 & r & (\wedge E, 1) \\ 4 & q & (\wedge E, 2) \\ 5 & (q \wedge r) & (\wedge I, 4, 3) \\ 6 & p & (\wedge E, 2) \\ 7 & p \wedge (q \wedge r) & (\wedge I, 6, 5) \end{array}$$

3.3 Implication

La règle d'élimination du conditionnel, aussi appelée *modus ponens*, est la suivante:

$$\begin{array}{c|cl} n & F & (Regle) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m & F \Rightarrow G & (Regle') \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l & G & (\Rightarrow E, n, m) \end{array}$$

Elle s'interprète de la manière suivante: "Si on a prouvé F et $F \Rightarrow G$ alors on peut en déduire G ". En d'autres termes, "si F est vraie et si $\neg F \vee G$ est vraie alors forcément G est vraie".

La règle d'introduction du conditionnel est un peu plus particulière, elle nécessite l'introduction de la notion d'hypothèse. En effet, on sait que $F \Rightarrow G$ est vraie si on arrive à prouver que G est vraie en partant de l'hypothèse que F est vraie. A cette effet, il est nécessaire d'introduire une notation graphique pour l'ouverture d'une hypothèse et les déductions obtenues à partir de cette

hypothèse. Graphiquement, on utilise l'indentation suivante pour l'introduction d'une hypothèse F à la ligne n :

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 n \quad \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \hline F \quad (H) \\ \vdots \end{array} \\
 \vdots
 \end{array}$$

Une fois une hypothèse introduite, les déductions peuvent être obtenues au même niveau d'indentation en appliquant des règles standards. Par exemple :

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 n \quad \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \hline P \wedge Q \quad (H) \\ P \quad (\wedge E, n) \\ \vdots \end{array} \\
 n+1 \\
 \vdots
 \end{array}$$

A présent, nous pouvons présenter la règle d'introduction de l'implication:

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 n \quad \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \hline F \quad (H) \\ \vdots \\ G \quad (Rgle) \end{array} \\
 m \\
 m+1 \quad F \Rightarrow G \quad (\Rightarrow I, n, m)
 \end{array}$$

Cette règle s'interprète de la manière suivante : "si G est vraie sous l'hypothèse que F est vraie alors on en déduit que $F \Rightarrow G$ est vraie".

Il est important de constater que l'application de cette règle élimine l'indentation puisque la formule déduite $F \Rightarrow G$ n'est plus indentée. On dit alors que *l'hypothèse F est déchargée*. Pour être achevée, une preuve de la déduction naturelle ne doit contenir que des hypothèses déchargées. En effet, dans le cas

contraire, on peut déduire n'importe quoi comme illustré ci-dessous:

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{}{} \text{"Les pingouins sont des humains."}$	(H)
$n+1$	$\text{"les pingouins sont des humains."}$	(R, n)

Moralité : $\vdash$ "les pingouins sont des humains." est-il un théorème valide é

A présent, voici quelques exemples de dérivations utilisant l'implication:

1	$P \Rightarrow Q$	(P)
2	$P \Rightarrow R$	(P)
3		$\frac{P}{R} \quad (H)$
4		$\frac{R}{Q} \quad (\Rightarrow E, 3, 1)$
5		$\frac{Q}{R \wedge Q} \quad (\Rightarrow E, 3, 2)$
6		$R \wedge Q \quad (\wedge I, 4, 5)$
7	$P \Rightarrow (R \wedge Q)$	$(\Rightarrow I, 3, 6)$

On remarquera que si l'on veut déduire $P \Rightarrow (R \wedge Q)$ dans l'exemple ci-dessus, il faut introduire P comme hypothèse et essayer de déduire $R \wedge Q$ en partant de cette hypothèse.

On termine avec un dernier exemple:

1	$P \Rightarrow Q$	(P)
2	$Q \Rightarrow R$	(P)
3	$R \Rightarrow S$	(P)
4		$\frac{P}{Q} \quad (H)$
5		$\frac{Q}{R} \quad (\Rightarrow E, 1, 4)$
6		$\frac{R}{S} \quad (\Rightarrow E, 2, 4)$
7		$S \quad (\Rightarrow E, 3, 4)$
8	$P \Rightarrow S$	$(\Rightarrow I, 4, 7)$

3.4 Négation et contradiction

La règle d'élimination de la négation correspond à l'élimination de la double négation en logique classique et est décrite ci-dessous:

$$\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ n & \neg\neg F \quad (Regle) \\ \vdots & \vdots \\ m & F \quad (\neg E, n) \end{array}$$

L'introduction de la négation s'effectue via deux règles d'introduction. Tout d'abord, si une formule F permet d'obtenir une contradiction, on peut en déduire la formule $\neg F$. A cet effet, il est nécessaire de disposer d'un symbole $\perp$ pour modéliser la contradiction. La règle correspondante est la suivante:

$$\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ n & \begin{array}{c|c} F & (H) \\ \hline \vdots & \vdots \\ m & \perp \quad (Regle) \end{array} \\ m+1 & \neg F \quad (\neg I, n, m) \end{array}$$

Ensuite, il est nécessaire de pouvoir introduire le symbole de contradiction $\perp$ afin de pouvoir appliquer la règle ci-dessus. Cette introduction se fait à l'aide de la règle suivante:

$$\begin{array}{c|c} n & F \quad (Regle) \\ \vdots & \vdots \\ m & \neg F \quad (Regle') \\ \vdots & \vdots \\ l & \perp \quad (\perp I, n, m) \end{array}$$

Cette règle signifie juste que "si F est vraie et $\neg F$ est vraie alors le raisonnement est contradictoire ($\perp$).

En conclusion, si l'on désire démontrer $\neg F$, le raisonnement revient à supposer F comme hypothèse puis à démontrer que la sous-dérivation correspondante permet d'obtenir une contradiction de la forme $G \wedge \neg G$, pour une formule G donnée.

Il reste alors à étudier une règle d'élimination de la contradiction :

$$\begin{array}{c|c} n & \perp \quad (Regle) \\ \vdots & \vdots \\ m & F \quad (\perp E, n) \end{array}$$

Cette règle signifie juste que l'on peut déduire n'importe quelle formule F à partir du faux.

Voici un exemple d'utilisation des règles d'introduction pour prouver la contraposée:

1	$P \Rightarrow Q$		(P)
2		$\neg Q$	(H)
3		P	(H)
4		Q	$(\Rightarrow E, 1, 3)$
5		$\perp$	$(\perp I, 2, 4)$
6		$\neg P$	$(\neg I, 3, 5)$
7	$\neg Q \Rightarrow \neg P$		$(\Rightarrow I, 2, 6)$

3.5 Disjonction

L'introduction de la disjonction est chose aisée. En effet, si on sait qu'une formule F est vraie alors on en déduit que $F \vee G$ l'est aussi:

n	F	$(Regle)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$F \vee G$	$(\vee I, n)$

En revanche, l'élimination est plus compliquée. En effet, il n'est pas possible d'obtenir une preuve de F ou une preuve de G à partir de la preuve de $F \vee G$ (puisque l'une des deux sous-formule peut être fausse !). La DN a recours à une astuce pour permettre l'élimination du connecteur $\vee$. Si on arrive à prouver une formule H à partir de l'hypothèse F puis à partir de l'hypothèse G alors on peut démontrer H à partir de $F \vee G$. Ce type de raisonnement nécessite

d'ouvrir et de décharger deux hypothèses comme le montre la règle suivante:

$$\begin{array}{c|cc}
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 n & F \vee G & (Regle1) \\
 n+1 & & \frac{F}{(H)} \\
 \vdots & & \vdots \\
 m & & \frac{H}{(Regle2)} \\
 m+1 & & \frac{G}{(H)} \\
 \vdots & & \vdots \\
 l & & \frac{H}{(Regle3)} \\
 l+1 & H & (\vee E, n, m, l)
 \end{array}$$

Il existe aussi des règles pour l'introduction et l'élimination de l'équivalence que nous ne traiterons pas dans ce cours, ce symbole étant redondant.

4 Quelques remarques

- Les prémisses sont toujours en début de dérivation, s'il y en a.
- Les hypothèses peuvent être déchargées à l'aide des règles $\Rightarrow I$, $\neg I$ ou $\vee E$. Une fois déchargées, il n'est plus possible de répéter l'une des formules s'y trouvant.
- On peut répéter (R) une formule dans une sous-dérivation mais pas l'inverse.

5 Correction et complétude

La déduction naturelle est correcte et complète:

Théorème 1.

$$\{A_1, \dots, A_n\} \vdash_{NK} F \text{ ssi } \{A_1, \dots, A_n\} \models F$$

6 Heuristique

Prouver une formule en DN n'est pas toujours chose aisée. Voici quelques règles méthodologiques permettant de se dépatouiller:

1. Simplifier (déconstruire) au maximum les prémisses à l'aide des règles $\wedge E$ et $\Rightarrow E$.
2. Si une prémisses est de la forme $\vee E$, essayer de dériver la conclusion à l'aide de $\vee E$, si possible.
3. Analyser la structure de la conclusion et essayer d'utiliser la règle d'introduction correspondante pour la construire. N.B. Dans le cas particulier de $\vee I$, il suffit de prouver l'une ou l'autre des sous-formule, un choix judicieux peut dès lors grandement simplifier la preuve.
4. Si rien ne marche, poser la négation de la conclusion ($\neg F$) comme hypothèse puis essayer de dériver une contradiction. Cela vous permettra de prouver $\neg\neg F$ à l'aide de $\neg I$ puis d'en déduire F à l'aide de $\neg E$.

7 Notations de Prawitz

La déduction naturelle est aussi parfois présentée sous forme d'arbre de preuve, la notation de Prawitz. Une démonstration de la conclusion G sous l'hypothèse F prend alors la forme suivante:

$$\frac{F}{\vdots} \text{ (Règle)}$$

On introduit la notion d'hypothèse déchargée entre crochets :

$$\frac{[F]}{\vdots} \text{ (Règle)}$$

Les règles d'introduction et d'élimination deviennent alors:

$$\begin{array}{c} \frac{F}{F \wedge G} \text{ (}\wedge I\text{)} \quad \frac{F \wedge G}{F} \text{ (}\wedge E\text{)} \quad \frac{F \wedge G}{G} \text{ (}\wedge E\text{)} \\ \\ \frac{F}{F \vee G} \text{ (}\vee I\text{)} \quad \frac{G}{F \vee G} \text{ (}\vee I\text{)} \quad \frac{\begin{array}{c} [F] \\ \vdots \\ F \vee G \end{array} \quad \begin{array}{c} [G] \\ \vdots \\ H \end{array}}{H} \text{ (}\vee E\text{)} \\ \\ \frac{\begin{array}{c} [F] \\ \vdots \\ G \end{array}}{F \Rightarrow G} \text{ (}\Rightarrow I\text{)} \quad \frac{F \quad F \Rightarrow G}{G} \text{ (}\Rightarrow E\text{)} \end{array}$$

$$\frac{F \quad \neg F}{\perp} (\perp\text{I}) \quad \frac{\perp}{F} (\perp\text{E})$$

On peut aussi ajouter des règles pour la négation (elles ne sont pas obligatoires):

$$\frac{\begin{array}{c} [F] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg F} (\neg\text{I}) \quad \frac{\neg\neg F}{F} (\neg\text{E})$$

Voici un exemple de preuve en déduction naturelle avec la convention de Prawitz:

$$\frac{\frac{[F \wedge G]}{G} (\wedge\text{E}) \quad \frac{[F \wedge G]}{F} (\wedge\text{E})}{\frac{G \wedge F}{(F \wedge G) \Rightarrow (G \wedge F)} (\Rightarrow\text{I})} (\wedge\text{I})$$