

EXERCICES DE COLLES - S3 MATHS

1	Algèbre 1	2
2	Algèbre Linéaire 2	4
2.1	Déterminants	4
2.2	Réduction des endomorphismes	6
3	Analyse 2	9
3.1	Séries numériques	9
3.2	Suites et séries de fonctions	10
3.3	Intégration	10
3.4	Intégrales impropres	11
3.5	Séries entières	12
3.6	Exercices bilan	12
3.7	Intégrales à paramètre (programme spécifique CPU)	13
4	Méthodes Numériques	14

1 Algèbre 1

Exercice 1. (Groupes : exercice plutôt facile.) (*Exercice 11 du TD3.*) Soit un groupe fini G . Pour tout $g \in G$ on considère l'application $L_g : G \rightarrow G, x \mapsto gx$.

1. Justifier le fait que, pour tout $g \in G$, $L_g \in \mathfrak{S}(G)$.
2. Montrer que l'application $G \rightarrow \mathfrak{S}(G), g \mapsto L_g$ est un homomorphisme injectif.
3. En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique.

Exercice 2. (Permutations : exercice classique.) Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 10 & 11 & 5 & 6 & 9 & 2 & 4 & 12 & 13 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{13}.$$

Déterminer la signature de σ , écrire σ comme composée de cycles à supports deux à deux disjoints, déterminer l'ordre de σ et calculer σ^{2020} (on pourra traiter ces questions dans l'ordre que l'on jugera le plus adéquat).

Exercice 3. (Permutations : exercice de difficulté moyenne.) (*Extrait de l'examen de janvier 2020.*)

1. Dans $\mathfrak{S}_4$, écrire $(1\ 3\ 2\ 4)^2$ comme composée de cycles à supports deux à deux disjoints.
2. Déterminer toutes les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ telles que $\sigma^2 = (1\ 2)(3\ 4)$.
3. Soit $n \geq 2$. Existe-t-il une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma^2 = (1\ 2)$? (*Indication* : on pourra considérer la signature.)
4. Soit $n \geq 6$. Existe-t-il une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma^2 = (1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6)$?

Exercice 4. (Groupe symétrique : exercice un peu plus difficile.) (*Exercice 12 du TD3.*) Soit $n \geq 2$. Soit H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice 2. On note $K = \mathfrak{S}_n \setminus H$.

1. Soit $\rho \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer les cardinaux des ensembles $\rho H = \{\rho h \mid h \in H\}$ et $\rho K = \{\rho k \mid k \in K\}$.
2. Soit $h \in H$ et $k \in K$. Montrer que $hH \subset H$, $hK \cap H = \emptyset$, $kH \cap H = \emptyset$ et $kK \cap kH = \emptyset$. En déduire que

$$hH = H, \quad hK = K, \quad kH = K \quad \text{et} \quad kK = H.$$

3. Soit $\varphi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ telle que $\varphi|_H = 1$ et $\varphi|_K = -1$. Montrer que φ est un homomorphisme.
4. En déduire que $H = \mathfrak{A}_n$. On pourra utiliser le fait que les seuls homomorphismes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$ sont l'application constante 1 et la signature (vu à l'exercice 9 du TD3).

(*Note aux colleurs : les anneaux sont supposés unitaires dans la définition donnée en cours.*)

Exercice 5. (Anneaux : exercice classique.) Soit $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 0\}$. Montrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$.

Exercice 6. (Anneaux : exercice classique ; la question (4) est plus difficile.) (*Adapté d'un exercice de l'examen de janvier 2020.*) Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad x \star y = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ est un anneau. Est-il commutatif ?
2. Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{R}^2, +, \star)$.
3. Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau $(\mathbb{R}^2, +, \star)$. Cet anneau est-il intègre ?
4. L'objectif de cette question est de déterminer tous les idéaux de l'anneau $(\mathbb{R}^2, +, \star)$.
 - (a) Montrer que $\{0\} \times \mathbb{R} = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ est un idéal de $(\mathbb{R}^2, +, \star)$.
 - (b) On suppose que I est un idéal possédant un élément (a, b) tel que $a \neq 0$. Montrer que $(1, 0) \in I$ (on pourra utiliser la question 2) puis que $I = \mathbb{R}^2$.
 - (c) On suppose que I est un idéal possédant un élément $(0, b)$ tel que $b \neq 0$. Montrer que $I \supset \{0\} \times \mathbb{R}$.
 - (d) En déduire tous les idéaux de l'anneau $(\mathbb{R}^2, +, \star)$.
5. Donner un exemple de sous-anneau de $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ autre que l'anneau tout entier.

2 Algèbre Linéaire 2

La difficulté des exercices est exprimée à l'aide d'une lettre, de (A) (très facile) à (E) (très difficile).

2.1 Déterminants

Exercice 1. Calcul explicite (A)

1. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -Id_E$. Que dire de la dimension de E ?

Exercice 2. Tridiagonal (C)

Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$. On pourra développer suivant la première colonne.
2. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$. On pourra calculer les premières valeurs de Δ_n , conjecturer une formule, et la démontrer par récurrence.

Exercice 3. Déterminant de Vandermonde (C, classique)

Soit $n \geq 2$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n nombres complexes distincts. On se propose de calculer le déterminant suivant :

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(\alpha_1, \alpha_2)$ et $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. On les donnera sous forme factorisée.
2. Démontrer que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$ est une fonction polynômiale de x dont on précisera le degré. On pourra pour cela développer par rapport à la dernière colonne.
3. En déduire que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - \alpha_i)$. On pourra se demander quelles sont les racines de l'expression polynômiale précédente.
4. En déduire l'expression générale de $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On pourra deviner la formule à l'aide de la première question, puis procéder par récurrence.

Exercice 4. Tridiagonal (C)

Soient a, b, c des réels et Δ_n le déterminant de la matrice $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2 = 4bc$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n}$.

Exercice 5. Sur des polynômes (C)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Calculer $\det(u)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u(P) = P + P'$;
2. $u(P) = P(X+1) - P(X)$;
3. $u(P) = XP' + P(1)$.

Exercice 6. Déterminant de la transposition (D)

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(A) = {}^tA$. Calculer le déterminant de ϕ .

Exercice 7. Rang de la comatrice et applications (C)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\text{comat } A$ la comatrice de A .

1. Discuter le rang de $\text{comat } A$ en fonction du rang de A .
2. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $\text{comat } A = A$ est équivalente aux équations ${}^tAA = I_n$ et $\det(A) = 1$.

Exercice 8. Polynômes (C)

Soient $(z_0, \dots, z_n)$ des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille

$$((X - z_0)^n, (X - z_1)^n, \dots, (X - z_n)^n)$$

est une base de $\mathbb{C}_n[X]$. Pour ceci, calculer le déterminant de cette famille dans la base $(1, X, \dots, X^n)$. On se ramènera à un déterminant de Vandermonde.

Exercice 9. Similarité (D)

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, ie qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$. On pourra considérer P_1, P_2 les parties réelles et imaginaires de P et montrer qu'il existe un réel x tel que $P_1 + xP_2$ est inversible.

Exercice 10. Densité des matrices inversibles (C)

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes. Montrer :

$$\exists \alpha > 0, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, 0 < |\varepsilon| < \alpha, A + \varepsilon I_n \text{ est inversible.}$$

On pourra considérer les racines du polynôme $P(x) = \det(A + xI)$.

Exercice 11. Déterminant d'une somme (C)

Soit $n \geq 2$. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on ait $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$. On pourra commencer par démontrer que A n'est pas inversible. Ensuite, si A a une colonne non-nulle (mais n'est pas inversible), construire B telle que B n'est pas inversible et $A + B$ est inversible.

2.2 Réduction des endomorphismes

Exercice 12. Matrices élémentaires (B)

Parmi les matrices élémentaires $E_{i,j}$, lesquelles sont diagonalisables ?

Exercice 13. Diagonalisation par polynôme minimal (C)

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer U^2 et en déduire une relation simple liant U^2 , U et I_4 .
2. En déduire que U est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
3. Diagonaliser U .

Exercice 14. De rang 2 ! (B)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice carrée de taille $2n$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A . En déduire que si $n > 1$, alors 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
2. Déterminer deux vecteurs propres associés à deux autres valeurs propres, et en déduire que A est diagonalisable.

Exercice 15. (D)

Pour $n \geq 1$, soit

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$ son polynôme caractéristique.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$

Calculer P_1 et P_2 .

2. Pour tout $x \in]-2, 2[$, on pose $x = 2 \cos \alpha$ avec $\alpha \in]0, \pi[$. Démontrer que

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha}.$$

3. En déduire que A_n est diagonalisable. On pourra pour cela montrer que A_n a n valeurs propres distinctes.

Exercice 16. Un bloc (C)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Donner les valeurs propres de B et la dimension des sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable?

INDICATION : pour $x, y \in \mathbb{C}^n$, résoudre l'équation $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et trouver quelles sont les valeurs de λ possibles.

Exercice 17. Calcul d'une puissance n -ième (B, classique)

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18. Racine cubique (B, classique)

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

Exercice 19. Application à des suites récurrentes (C)

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .
2. Calculer A^n en fonction de n .
3. On considère les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0 , v_0 et w_0 et les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} &= 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} &= 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

pour $n \geq 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n . En déduire u_n , v_n et w_n en fonction de n .

Exercice 20. Commutant d'une matrice (D)

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser A .
2. En déduire toutes les matrices M qui commutent avec A .

Exercice 21. Trigonalisation - avec indication (C)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est trigonalisable.
2. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Montrer que $u = (1, 1, 0)$ est un vecteur non-nul de cet espace propre.
3. Montrer que $v = (0, 0, 1)$ est tel que $(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u$.
4. Chercher un vecteur propre w associé à la valeur propre 2. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice T de f dans la base (u, v, w) .
5. Calculer $f^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire T^k .
6. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 22. Matrice nilpotente (D)

Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Le but de l'exercice est de démontrer que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.
2. On considère

$$\begin{aligned} \phi_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto MB - BM. \end{aligned}$$

Vérifier que ϕ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Justifier que si $A^k \neq 0$, alors k est une valeur propre de ϕ_B .
4. En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $A^k = 0$.

3 Analyse 2

Les étoiles signalent des niveaux de difficulté. Plus il y a d'étoiles, plus l'exercice est considéré comme difficile.

3.1 Séries numériques

Exercice 1. Déterminer si la série de terme général u_n est divergente, semi-convergente ou absolument convergente dans les cas suivants.

On ne traitera qu'un terme par ligne.

1.a) $u_n = \frac{\sin(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$	1.b) $u_n = \frac{1 - \cos(2/\sqrt{n})}{n}$
2.a) $u_n = \frac{n^3 + \ln n}{n + n^4}$	2.b) $u_n = \frac{2^n \ln n}{n!}$
3.a) $u_n = \frac{n!}{(2n)!} e^n$	3.b) $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$
4.a) $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$	4.b) $u_n = \frac{(-1)^{n+2n}}{3n^2}$
5.a) * $u_n = \frac{\sin(2n)}{n+1}$	5.b) $u_n = \frac{\cos(n\pi/2)}{\sqrt{n}}$
6.a) * $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$	6.b) * $u_n = \frac{n}{(-1)^{n^2+1}}$

Exercice 2. * En utilisant les critères vus en cours, déterminer la convergence ou la divergence des séries suivantes en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n \geq 1} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - a - \frac{b}{n} \right).$$

Exercice 3. * Soient $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ deux suites de réels positifs. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$.

1. Si $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$ déterminer la nature de $\sum_n v_n$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ convergent, montrer que $\sum_n \sqrt{u_n w_n}$ converge.
3. Montrer que si $\sum_n u_n$ converge, alors $\sum_n v_n$ diverge.

Exercice 4. ** On considère dans cet exercice des séries de la forme $\sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon_n}{n}$ avec $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$.

1. Montrer que si $\epsilon_n = (-1)^n$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon_n}{n}$ converge.
2. Montrer que si pour tout $n \geq 0$, $\epsilon_{3n+3} = -1$ et $\epsilon_{3n+1} = \epsilon_{3n+2} = 1$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon_n}{n}$ diverge.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel N , on a

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \int_0^1 \frac{1 - x^{4N+4}}{1 + x^2} dx.$$

- (b) En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right)$ et calculer la somme de cette série.
- (c) Montrer de même la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} \right)$ et calculer la somme de cette série.
- (d) En déduire que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon_{4n+1} = \epsilon_{4n+2} = 1$ et $\epsilon_{4n+3} = \epsilon_{4n+4} = -1$, alors $\sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon_n}{n}$ converge et calculer sa somme.

3.2 Suites et séries de fonctions

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^3 x^2}$

1. Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Soit $a > 0$. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
3. Montrer que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (-1)^n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais pas absolument sur $\mathbb{R}^*$.
5. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (-1)^n f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
6. La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (-1)^n f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^*$? Sur $[a, +\infty[$?

Exercice 6. On considère la suite $f_n(x) := e^{-nx^2} \sin(nx) + \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une fonction f qu'on déterminera.
2. Montrer que pour tout a tel que $0 < a < 1$, (f_n) converge uniformément sur $[a, 1]$.
3. En calculant $f_n(n^{-1/2})$, montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 7. 1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n^2 x)}{n^5 + e^x}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2. * Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^5 + e^x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. * On se donne un réel $a \in [0, 1[$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a^n \cos(\sqrt{n}x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(\sqrt{n}x)$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3.3 Intégration

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_0^1 x \arctan(x) dx \quad 2) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(x)}{\cos^2 x + 1} dx \quad 3) \int_1^5 \ln x e^{-x} dx$$

Exercice 10. 1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - x^2 \leq \log(1+x) \leq x.$$

2. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4}.$$

3. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 11. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{2n} \frac{\arctan(x)}{x} dx \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{2n} \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$$

Exercice 12. * On pose

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)} dt.$$

1. Calculer $I - J$.
2. Calculer $I + J$ en posant $u = \tan(t)$.
3. En déduire I et J .

Exercice 13. * On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction G par

$$G(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer G' .
2. Étudier les variations de G sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la limite de G en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Donner l'allure du graphe de la fonction G sur $\mathbb{R}$.

3.4 Intégrales impropres

Exercice 14. Donner la nature des intégrales suivantes (semi convergente, absolument convergente, divergente).

$$\begin{array}{ll} 1) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx & 2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^3+2x}} dx \\ 3) \int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x} dx & 4)* \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \\ 5) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin(1/x^2)}{\ln(1+x)} dx & \end{array}$$

Exercice 15. Déterminer, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature des intégrales suivantes :

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt \quad 2)* \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) dx$$

Exercice 16. * Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t \sin t} dt$ diverge.
On pourra utiliser le critère de Cauchy.

Exercice 17. ** Soit f une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f^2(t) dt$ converge.

1. Prouver que, pour tous $0 \leq a \leq b$, on a

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sqrt{b-a} \left(\int_a^b f^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

2. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t) dt = 0.$$

Indication : couper l'intégrale au bon endroit

3.5 Séries entières

Exercice 18. * Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ converge-t-elle? Et $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n + \ln n}$?

Exercice 19. On considère les séries entières suivantes.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{n}; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{2^{(-1)^n n}}{n} x^n; \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} x^{2n+1}.$$

- Déterminer les rayons de convergence R de chacune de ces séries entières.
- Calculer les sommes sur $] -R, R[$ de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{n}; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{2^{(-1)^n n}}{n} x^n.$$

Exercice 20. Donner le développement en série entière des fonctions suivantes et déterminer le rayon de convergence des séries entières obtenues.

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)}; \quad g(x) = \ln(1-2x+x^2); \quad h(x) = \exp(1+x^3).$$

Exercice 21. On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ où les a_n sont définis par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et pour $n \geq 2$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$. On note $f(z)$ sa somme.

- Montrer que le rayon de convergence R de cette série vérifie $R \geq 1/4$.
- Montrer que pour tout nombre complexe z tel que $|z| < R$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}.$$

- En déduire la valeur de R ainsi que l'expression de a_n en fonction de n .

3.6 Exercices bilan

Exercice 22 (Chapitres 4 et 5). On définit pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1-t^2}{1-t^6}$.

- Rappeler le développement en série entière de $1/(1-x)$ sur $] -1, 1[$.
- Déterminer le développement en série entière de f sur $] -1, 1[$.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale impropre suivante converge

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}$$

et définit une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ dont on exprimera la dérivée en fonction de f .

4. Déterminer le développement en série entière de F sur $] -1, 1[$ en fonction de $F(0)$.

5. Calculer $F(0)$.

Exercice 23. ** Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites réelles. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.

1. Montrer que la série de fonction $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les séries numériques $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ sont absolument convergentes.
2. Montrer que si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ alors la somme S de cette série est une fonction continue 2π -périodique.
3. Montrer que si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ alors pour $n \neq 0$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

4. Soit f la fonction continue 2π -périodique vérifiant $f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Calculer

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

- (b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.
- (c) En déduire la valeur des sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

3.7 Intégrales à paramètre (programme spécifique CPU)

Exercice 24. ** $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{ixt} dt$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer F' .
2. Montrer que F vérifie une équation différentielle que l'on explicitera et calculer la valeur de F .

Exercice 25. ** $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer F' . Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les limites et les branches infinies de F . Tracer le graphe de F .

4 Méthodes Numériques

Mise en garde : Les exercices sont de difficulté variable (précisée par des $\star$). Certains exercices sont longs, on pourra ne traiter que les premières questions.

Exercice 1. $\star$ (racine d'une équation) On considère la fonction :

$$f(x) = 2 \ln(x) + x^2 + x - 4$$

définie pour $x > 0$.

1. Via une étude de fonction, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique r . Localiser r dans un intervalle $I = [a, a + 1]$ où $a \in \mathbb{N}$.
2. Pour calculer approximativement r , on propose la méthode :

$$x_{n+1} = x_n - \alpha f(x_n) = g(x_n), \quad x_0 \in I, \quad \alpha = \frac{1}{6}$$

- (a) Montrer que la restriction de g sur I répond aux 3 hypothèses du théorème du point fixe des applications contractantes. Qu'en concluez-vous ?
- (b) Quelle est la constante de contraction de g ? En déduire le nombre N d'itérations suffisant pour assurer :

$$|x_N - r| \leq 10^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

en partant du milieu de I (càd de $x_0 = a + \frac{1}{2}$).

3. Comme troisième méthode, écrire une itération de la méthode de Newton (ne rien démontrer).

Exercice 2. $\star$ (Moyenne arithmético-harmonique) On considère deux nombres réels strictement positifs a et b vérifiant $a < b$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad (n \geq 0).$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et admettent la même limite. Indication: On pourra étudier le signe de $u_n - v_n$ afin de déterminer la monotonie des suites (u_n) et (v_n) .
2. Montrer que :

$$u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En déduire la limite commune à (u_n) et (v_n) .

3. Démontrer que :

$$|u_{n+1} - v_{n+1}| = \frac{1}{2} \frac{(u_n - v_n)^2}{u_n + v_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Démontrer que :

$$|u_n - v_n| \leq 2^{-n}|a - b|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En déduire une condition suffisante portant sur n pour que $|u_n - v_n| \leq 10^{-k}$ où $k \in \mathbb{N}$.

5. Déduire de la question 3) la majoration pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{4a}|u_n - v_n|^2$

6. Déduire de la question précédente que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{m+n} - v_{m+n}| \leq 4a \left(\frac{1}{4a} |u_m - v_m| \right)^{2^n}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

Indication: on pourra mettre en oeuvre une récurrence sur n .

7. En utilisant le résultat de la question 4), déterminer, en fonction de a et b une valeur de m telle que $\frac{1}{4a} |u_m - v_m| \leq \frac{1}{10}$.

8. En utilisant les résultats des questions 6) et 7), déterminer, en fonction de a et b une condition suffisante portant sur n pour que $|u_{m+n} - v_{m+n}| \leq 10^{-k}$ où $k \in \mathbb{N}$.

Comparer la valeur $m + n$ obtenue avec le résultat obtenu à la question 4).

Exercice 3. ★ On considère la fonction :

$$g : \begin{cases} [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + \frac{1}{2} \sin(x) \end{cases}$$

1. Montrer qu'elle répond aux trois hypothèses du théorème du point fixe des applications contractantes. Que peut-on en conclure ?

2. En déduire une méthode itérative pour calculer le point fixe ξ de g . En choisissant $x_0 = 1$, quel nombre d'itérations N assure que $|x_N - \xi| \leq \frac{1}{2^{20}}$?

Exercice 4. ★ (*De nombreux points fixes.*) Soit la fonction $g(x) = x + \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer tous les points fixes de g .

2. Déterminer la stabilité de chacun de ces points fixes.

3. Soit $I_k = [2k\pi, 2(k+1)\pi]$. Montrer que g est strictement croissante sur I_k et que $g(I_k) = I_k$.

4. Déduire des questions précédentes la convergence de la suite $u_{n+1} = g(u_n)$, avec $u_0 \in I_k$ (aide : considérer le signe de $g(x) - x$).

Exercice 5. ★★ On considère deux nombres réels strictement positifs a et b vérifiant $a < b$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad (n \geq 0).$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et admettent la même limite (aide : montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, $v_n > 0$, $u_n < v_n$ puis montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante).

2. Démontrer que :

$$|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |u_n - v_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et en déduire par récurrence que :

$$|u_n - v_n| \leq 2^{-n} |a - b|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En déduire finalement une condition suffisante portant sur n pour que $|u_n - v_n| \leq 10^{-k}$ où $k \in \mathbb{N}$.

3. Démontrer que

$$|u_{n+1} - v_{n+1}| = \frac{1}{2} \frac{(u_n - v_n)^2}{(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En déduire la majoration pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{8a} |u_n - v_n|^2$

4. Déduire de la question précédente que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{m+n} - v_{m+n}| \leq 8a \left(\frac{1}{8a} |u_m - v_m| \right)^{2^n}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

Indication: on pourra mettre en oeuvre une récurrence sur n .

5. En utilisant le résultat de la question 2), déterminer, en fonction de a et b une valeur de m telle que $\frac{1}{8a} |u_m - v_m| \leq \frac{1}{10}$.

6. En utilisant les résultats des questions 4) et 5), déterminer, en fonction de a et b une condition suffisante portant sur n pour que $|u_{m+n} - v_{m+n}| \leq 10^{-k}$ où $k \in \mathbb{N}$.

Comparer la valeur $m + n$ obtenue avec le résultat obtenu en question 2).

Exercice 6. ★ Soit $f(x) = x^3 - x^2 - 1$. On se propose de trouver les racines réelles de f .

1. Situer la ou les racines de f . Montrer qu'il y a une racine $r \in I = [1, 2]$.

2. On définit la méthode itérative $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $x_0 \in [1, 2]$ et :

$$g(x) = (x^2 + 1)^{1/3}.$$

(a) Vérifier que r est bien un point fixe de g .

(b) Par une étude de fonction, montrer que $g(I) \subset I$.

(c) En étudiant g' sur I , montrer que g est une contraction sur I , la constante de contraction étant égale à :

$$L = \frac{2}{\sqrt{3} \times 4^{2/3}} \simeq 0,458.$$

(d) En déduire que la suite (x_n) converge vers r .

(e) Montrer que :

$$|x_n - r| \leq L^n |x_0 - r|, \quad \forall n \geq 0.$$

(f) On cherche une approximation x_N telle que $|x_N - r| \leq \epsilon$ ($0 < \epsilon < 1$). En majorant l'erreur initiale $|x_0 - r|$ par 1, quel nombre d'itérations assure $|x_N - r| \leq \epsilon$?

Exercice 7. ★★ Soit m un nombre réel et $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable (c-à-d dérivable et la fonction dérivée est continue). On suppose de plus qu'un nombre réel ℓ vérifie $f(\ell) = 0$.

On définit la suite (x_n) par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}$.

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout n il existe un réel c_n compris entre ℓ et x_n vérifiant

$$x_{n+1} - \ell = \left(1 - \frac{f'(c_n)}{m} \right) (x_n - \ell).$$

2. On suppose dans cette question (**uniquement**) que m et f vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{f'(x)}{m} \leq \frac{3}{2}.$$

Déduire de la question précédente que (x_n) converge vers ℓ .

3. La condition imposée à la question précédente étant très contraignante, on cherche à améliorer le procédé. On suppose désormais (**pour la suite de l'exercice**) que f est strictement croissante et que sa dérivée ne s'annule pas.

(a) En utilisant la définition de la continuité de f' en ℓ , démontrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [\ell - \eta, \ell + \eta], \quad \frac{4}{5}f'(\ell) \leq f'(x) \leq \frac{6}{5}f'(\ell).$$

(b) On suppose de plus que m vérifie $|m - f'(\ell)| \leq \frac{1}{5}f'(\ell)$. En utilisant les résultats des questions 1 et 3 (a), démontrer que si $x_n \in [\ell - \eta, \ell + \eta]$, on a alors :

$$|x_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |x_n - \ell| < \eta.$$

(c) Démontrer que si $x_0 \in [\ell - \eta, \ell + \eta]$, alors la suite (x_n) converge vers ℓ .

(d) Déterminer alors la rapidité de convergence de cette suite en fonction de m . Quelle est la meilleure valeur possible pour m ?

Exercice 8. ★ Soit la fonction $f(x) = \ln(x) + x^2 + 2x - 5$ définie pour $x > 0$.

1. Montrer que f possède une racine unique r . Localiser r dans l'intervalle $I = [n, n+1]$ où $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour approcher r on considère la méthode de point fixe $x_{k+1} = g(x_k)$ avec $g(x) = x - f(x)$, g définie sur I . Montrer que r est un point fixe instable de g , c-à-d que $|g'(r)| > 1$.

3. On considère maintenant que $g(x) = x - f(x)/m$ avec $m > 0$. Montrer que g est une contraction sur I si et seulement si $m > 13/4$.

4. On choisit $m = 5$. Montrer que la suite $x_{k+1} = g(x_k)$, $x_0 \in I$ est bien définie et converge vers r .

5. Quelle est la constante de la contraction pour $m = 5$? On cherche une approximation x_N telle que $|x_N - r| \leq \epsilon$ ($0 < \epsilon < 1$). En majorant l'erreur initiale par 1, quel nombre d'itérations assure $|x_N - r| \leq \epsilon$?

Exercice 9. ★★ (*Racine p-ième*) Soit p un entier ≥ 2 , et a un réel > 1 . On cherche une méthode pour approcher $r = \sqrt[p]{a} = a^{1/p}$ en se basant sur la méthode de Héron vue en TD (pour $p = 2$ on obtiendra exactement la méthode de Héron), c-à-d que l'on va chercher la racine de la fonction :

$$f(x) = x^p - a$$

en considérant f définie sur $I = [a^{1/p}, +\infty[$.

1. Ecrire une itération de la méthode de Newton appliquée sur f .

2. Quelle est la fonction de point fixe g associée ? (c-à-d quelle est la fonction g permettant d'écrire l'itération de Newton sous la forme $x_{n+1} = g(x_n)$). De même on considèrera que g est définie sur I .

3. En faisant une étude de fonction, montrer que $g(I) \subset I$, et que g est lipschitzienne sur I de constante $L = \frac{p-1}{p}$.

4. Que peut-on en déduire sur la suite $x_{n+1} = g(x_n)$, $n \geq 0$, $x_0 \in I$?

5. Montrer que :

$$x_{n+1} - a^{1/p} = (x_n - a^{1/p}) \left(1 - \frac{\sum_{k=0}^{p-1} a^{(p-1-k)/p} x_n^k}{p x_n^{p-1}} \right)$$

puis que :

$$x_{n+1} - a^{1/p} = (x_n - a^{1/p})^2 \frac{\sum_{k=0}^{p-2} c_k x_n^k}{p x_n^{p-1}}$$

où $c_k = (k+1)a^{(p-k-2)/p}$.

6. Déduire de la question précédente que :

$$|x_{n+1} - a^{1/p}| \leq \frac{p-1}{2a^{1/p}} |x_n - a^{1/p}|^2$$

Que peut-on déduire de cette estimation sur la rapidité de convergence ?

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et croissante. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$. Le signe de g en fonction de x est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	r_1	r_2	$+\infty$	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Soit $(x_n)_n$ la suite définie par récurrence par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n \geq 0$).

1. Tracer le graphe d'une fonction f vérifiant les hypothèses.
2. Montrer que les intervalles $I_1 =]-\infty, r_1[$, $I_2 =]r_1, r_2[$ et $I_3 =]r_2, +\infty[$ sont stables par f .
3. Étudier en fonction de la position de x_0 la monotonie et la convergence de $(x_n)_n$ (on justifiera avec soin les résultats énoncés).
4. Étudier le caractère répulsif ou attractif des points fixes.
5. On suppose que f est dérivable au point r_1 et que $f'(r_1) = 0$. On suppose également que $(x_n)_n$ converge vers r_1 et que pour tout $n \geq 0$, $x_n \neq r_1$. Montrer qu'alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - r_1}{x_n - r_1} = 0.$$

Exercice 11. ★ Soit $a > 0$ fixé. On définit la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $h(x) = 2x - ax^2$, et on définit par récurrence la suite $(x_n)_n$ en prenant $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} = h(x_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de h et en faire la représentation graphique. Déterminer les points fixes de h .
2. Vérifier que les intervalles $J_1 =]-\infty, 0[$ et $J_2 =]0, 1/a[$ sont stables par h .
3. On prend $x_0 \in J_1$. Étudier la monotonie et le comportement asymptotique de $(x_n)_n$.
4. On prend $x_0 \in J_2$. Étudier la monotonie et le comportement asymptotique de $(x_n)_n$.

5. Quel est l'ensemble des $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que la suite $(x_n)_n$ converge vers $1/a$?
On pourra se demander où se trouve le point x_1 lorsque x_0 est dans $]1/a, +\infty[$.
6. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $h(x) - \frac{1}{a} = a \left(x - \frac{1}{a}\right)^2$.
7. Pour tout $n \geq 0$, on pose $e_n = x_n - 1/a$.
Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n , puis en déduire une expression de e_n en fonction de n et de e_0 .
8. Retrouver, à l'aide de la question précédente, le résultat de la question 5, et déterminer, lorsque $(x_n)_n$ converge vers $1/a$, la vitesse de convergence.

Exercice 12. ★★ Soit $a > 1$ et k un entier supérieur à 3 fixés.

On souhaite calculer une valeur approchée de la racine k -ième de a .

1. On définit la suite $(x_n)_n$ en posant $x_0 \in]0, +\infty[$ et pour $n \geq 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $f(x) = a/x^{k-1}$.
 - (a) Vérifier que l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par f et que f n'a qu'un point fixe sur cet intervalle.
 - (b) Quelle est la nature de ce point fixe ? Que pensez-vous de cette suite pour la calcul d'une valeur approchée de la racine k -ième de a ?
2. On définit pour $x \geq 0$, $g(x) = x - \frac{x^k - a}{ka}$.
 - (a) Montrer que g n'admet qu'un seul point fixe dans $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa nature.
 - (b) En utilisant la continuité de g' , montrer qu'il existe $r \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$ tels que g soit r -contractante sur l'intervalle $I = [a^{1/k} - \varepsilon, a^{1/k} + \varepsilon]$.
 - (c) Montrer que I est stable par g .
 - (d) Montrer que la suite $(x_n)_n$ définie en choisissant $x_0 \in I$ et en posant pour $n \geq 0$, $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers $a^{1/k}$ et déterminer sa vitesse de convergence.
3. Ecrire la méthode de Newton pour la fonction $x \mapsto x^k - a$. Si la suite fournie par la méthode de Newton converge vers $a^{1/k}$, quelle est la vitesse de convergence ?

Exercice 13. Pour chacune des questions suivantes, donner, sans justification, un énoncé précis.

1. Quels sont les comportements asymptotiques possibles d'une suite réelle croissante ?
2. Qu'est-ce qu'une fonction contractante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$?
3. Énoncer le théorème de la contraction (aussi appelé théorème du point fixe).
4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Qu'est-ce qu'un intervalle stable pour f ?
5. Qu'est-ce qu'un point fixe répulsif ?

Exercice 14. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-x^2/2}$ et soit $(x_n)_n$ une suite définie par récurrence en posant $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = h(x_n)$ ($n \geq 0$).

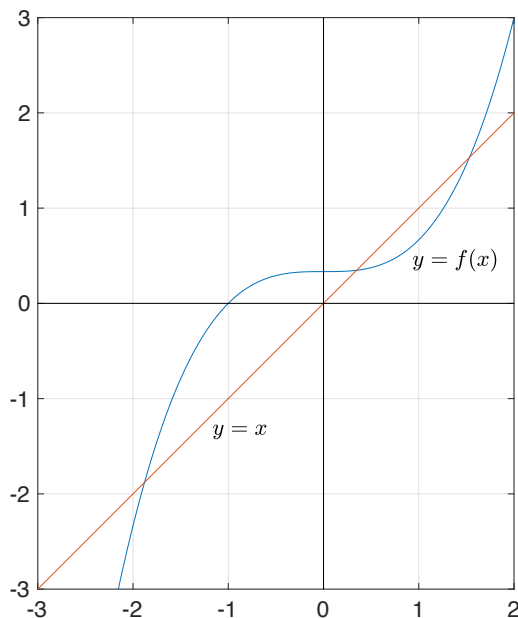
1. Montrer, en faisant une étude de fonction, que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |h'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} < 1.$$

2. Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que h est contractante sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_n$ converge toujours vers la même limite.

Exercice 15. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 1)$. On donne ci-dessous sa représentation graphique. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence en fixant $u_0 \in \mathbb{R}$ et en posant, pour tout entier positif n , $u_{n+1} = f(u_n)$.



1. Donner, par lecture graphique et sans justification pour l'instant, le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de la position de u_0 .
2. Pourquoi, quelque soit la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
3. Sur $\mathbb{R}$, on considère maintenant le polynôme $P(x) = x^3 - 3x + 1$. Étudier les variations de P et montrer que P admet 3 racines réelles $r_1 < r_2 < r_3$.
4. En déduire le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$. Quels sont les points fixes de f ? Déterminer des intervalles stables pour f .
5. On prend $u_0 \in]r_2, r_3[$. Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
6. On prend $u_0 \in]r_3, +\infty[$. Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
7. Quelle est la nature (répulsif ou attractif) du point fixe r_3 de f ?
8. Montrer que sur $[0, 1/2]$, la fonction f est $1/4$ -contractante. En déduire que si $u_0 = 0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - r_2| \leq \frac{K}{4^n},$$

où K est une constante que l'on précisera.

9. Quelle est la nature (répulsif ou attractif) du point fixe r_2 de f ?
10. En vous appuyant sur la question (8), proposer un algorithme qui rend une sortie une valeur approchée de r_2 à 10^{-5} près ?