

Problème #1

THERMODYNAMIQUE D'UNE BARRE MÉTALLIQUE

① (a) - évolution réversible $\rightarrow dS = \frac{\delta Q}{T} \rightarrow \delta Q = T dS$

donc $dU = \delta W + \delta Q = T dS + F dL = \underline{C_L dT + (l+F) dL}$

(b) - U et S fonction d'état $\rightarrow dU$ et dS sont des diff. totale exactes

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_L \right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U}{\partial L} \right)_T \right)_L \quad \text{démonstration par les dérivées croisées}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial C_L}{\partial L} \right)_T = \left(\frac{\partial (l+F)}{\partial T} \right)_L = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_L + \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_L \quad (*)$$

de même, pour $S \Rightarrow \left(\frac{\partial (C_L/T)}{\partial L} \right)_T = \left(\frac{\partial (l/T)}{\partial T} \right)_L = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial C_L}{\partial L} \right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_L - \frac{l}{T^2} \quad (**)$

(*) et (**) $\Rightarrow \underline{l} = -T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_L = -kT(L-L_0) = \underline{-F}$

(c) C_L indépendant de $L \rightarrow \left(\frac{\partial C_L}{\partial L} \right)_T \stackrel{?}{=} 0$

ma (**) $\frac{1}{T} \left(\frac{\partial C_L}{\partial L} \right)_T = - \left(\frac{\partial (F/T)}{\partial T} \right)_L = - \left(\frac{\partial (k(L-L_0))}{\partial T} \right)_L = 0 \Rightarrow \underline{\left(\frac{\partial C_L}{\partial L} \right)_T = 0}$

② (a) - $\underline{dU} = C_L dT + (l+F) dL = \underline{C_L dT}$ (U ne dépend que de T)

$\underline{dS} = \frac{C_L}{T} dT + \frac{l}{T} dL = \underline{\frac{C_L}{T} dT - k(L-L_0) dL}$

$$(b) \quad \Delta S^{i \rightarrow f} = S_f - S_i = C_L \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + k L_0 (L_f - L_i) - \frac{k}{2} (L_f^2 - L_i^2)$$

$$\Delta U^{i \rightarrow f} = U_f - U_i = C_L (T_f - T_i)$$

(3) - (a) Transformation $0 \rightarrow 1$ adiabatique et réversible $\Rightarrow$ isentropique. (2^d principe)

$$\text{d'après 2-b} \rightarrow \Delta S^{0 \rightarrow 1} = C_L \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) + k L_0 (2L_0 - L_0) - \frac{k}{2} (4L_0^2 - L_0^2)$$

$$= C_L \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) + 2k L_0^2 - k L_0^2 - \frac{3k L_0^2}{2}$$

$$\Delta S^{0 \rightarrow 1} = C_L \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) - \frac{k L_0^2}{2}$$

$$= 0 \quad (\text{isentropique})$$

$$\Rightarrow T_1 = T_0 \exp \left(\frac{k L_0^2}{2 C_L} \right)$$

(4) - (a) $W=0$ et $Q=0 \Rightarrow \Delta U^{1 \rightarrow 2} = 0 \Rightarrow T_2 = T_1$ car U ne dépend que de T

$$(b) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2}^{\text{éch}} = 0 \quad \text{car } Q = 0$$

$$(c) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2}^{\text{créé}} = \Delta S - \Delta S_{1 \rightarrow 2}^{\text{éch}} = \Delta S^{1 \rightarrow 2} = 0 + k L_0 (L_0 - 2L_0) - \frac{k}{2} (L_0^2 - 4L_0^2)$$

$$= -k L_0^2 + \frac{3}{2} k L_0^2 = \frac{k L_0^2}{2} > 0 \Rightarrow \text{irréversible}$$

(5) - (a) L'évolution $2 \rightarrow 0$ se fait sans travail ($F=0$ constamment)

$$\text{donc } Q^{2 \rightarrow 0} = \Delta U^{2 \rightarrow 0} = C_L (T_0 - T_2) = C_L (T_0 - T_1)$$

$$= C_L T_0 \left(1 - \exp \left(\frac{k L_0^2}{2 C_L} \right) \right)$$

$$(5) - (b) \quad \Delta S_{\text{éch}}^{2 \rightarrow 0} = \frac{Q}{T_0} = C_L \left(1 - \exp \left(\frac{k L_0^2}{2 C_L} \right) \right)$$

$$\textcircled{5} \textcircled{b} \Delta S_{2 \rightarrow 0} = C_L \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right) = C_L \times - \frac{k L_0^2}{2 C_L} = - \frac{k L_0^2}{2}$$

$$\textcircled{d} \Delta S_{2 \rightarrow 0}^{\text{créé}} = \Delta S_{2 \rightarrow 0}^{\text{éch}} - \Delta S_{2 \rightarrow 0}^{\text{éch}} = - \frac{k L_0^2}{2} + C_L \left(\exp \left(\frac{k L_0^2}{2 C_L} \right) - 1 \right)$$

signe ? $\Delta S^{\text{créé}} = C_L \left(\exp \left(\frac{k L_0^2}{2 C_L} \right) - \frac{k L_0^2}{2 C_L} - 1 \right)$

de la forme $C_L (\exp(x) - x - 1)$, fonction $\gg 0 \quad \forall x$

donc $\Delta S_{2 \rightarrow 0}^{\text{créé}} > 0 \Rightarrow$ irréversible.

$\textcircled{6} \textcircled{a}$ Evolution globale $\Delta S = 0$ (cycle) (*)

$\textcircled{b}$ Entropie créée $\Delta S^{\text{créé}}_{\text{(TOTALE)}} = \Delta S_{0 \rightarrow 1}^{\text{éch}} + \Delta S_{1 \rightarrow 2}^{\text{créé}} + \Delta S_{2 \rightarrow 0}^{\text{créé}}$

$$= \frac{k L_0^2}{2} - \frac{k L_0^2}{2} + C_L \left(\exp \left(\frac{k L_0^2}{2 C_L} \right) - 1 \right)$$

$$= C_L \left[\exp \left(\frac{k L_0^2}{2 C_L} \right) - 1 \right] > 0 \quad \text{car } k > 0 \text{ et } C_L > 0$$

(*) on peut le vérifier par le calcul :

$$\begin{aligned} & \cancel{\Delta S_{0 \rightarrow 1}^{\text{éch}}} + \Delta S_{1 \rightarrow 2}^{\text{créé}} + \cancel{\Delta S_{1 \rightarrow 2}^{\text{éch}}} + \Delta S_{2 \rightarrow 0}^{\text{créé}} + \Delta S_{2 \rightarrow 0}^{\text{éch}} \\ &= \frac{k L_0^2}{2} + \left(- \frac{k L_0^2}{2} + C_L \left(\exp \left(\frac{k L_0^2}{2 C_L} \right) - 1 \right) \right) \rightarrow C_L \left(1 - \exp \left(\frac{k L_0^2}{2 C_L} \right) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Q7 - GP monoatomique $C_v^{molaire} = \frac{3}{2} R$

donc $C_p^{molaire} = \frac{5}{2} R$ (car $C_p^m - C_v^m = R$)

on déduit $\gamma = \frac{C_p^m}{C_v^m} = \frac{5}{3} = 1,67$

↑ relation de Mayer

Q8 - Isentropique, GP, $\Rightarrow$ on peut utiliser les lois de Laplace

celle qui convient le mieux est : $T_f = T_i \left(\frac{P_i}{P_f} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_i \times 10^{-0,4/1,67} = 99,5 K = 372,65 ^\circ C$

Q9 - D'après la relation de Mayer $\gamma > 1$, donc $\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) < 0$

donc il y a donc bien toujours diminution de la T lors d'une détente isentropique d'un gaz parfait.

- EXERCICE 3 -

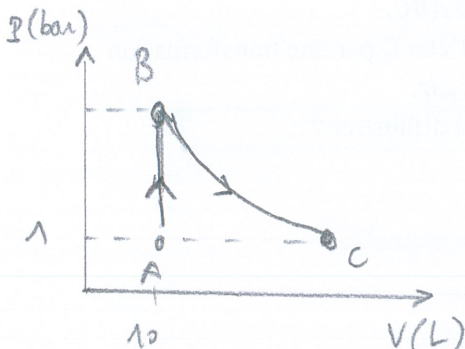
Q10 -

	A	B	C
V (mL)	10	10	11,7
P (bar)	1	1,17	1
T (en K)	300	350	350

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = nR = \frac{P_B V_B}{T_B} = \frac{P_C V_C}{T_C}$$

$\rightarrow$ donc $P_B = 1,17 \text{ bar}$ et $V_C = 11,7 \text{ L}$

Q11 -



Q13 - $\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB} = Q_{AB}$

Or, $\Delta U_{AB} = \frac{3}{2} nR (T_B - T_A) = \frac{3}{2} (P_B V_B - P_A V_A) = 255 J$

Q14 - $\Delta U_{BC} = 0 = W_{BC} + Q_{BC}$

$$W_{BC} = \int_B^C \delta W = \int_{V_B}^{V_C} -nRT_B \frac{dV}{V} = -P_B V_B \ln \left(\frac{V_C}{V_B} \right) = -184 J$$

$\rightarrow Q_{BC} = 184 J$

Q12 - Hypothèse car $P = \frac{nRT_B}{V}$

Q15 - $Q = Q_{AB} + Q_{BC} = 439 J$

Q16 - $\Delta U = W' + Q' = U_C - U_A = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} = \Delta U_{AB} = Q_{AB}$ et $W' = -P_A (V_C - V_A) = -170 J$
 $\rightarrow Q' = \Delta U - W' = 425 J \neq Q$