

Outils Logiques - L1 MIASHS -

Le calcul des séquents

Romain Péchoux

1 Introduction

Le calcul des séquents est un système de déduction créé par Gentzen afin de développer une théorie de la démonstration améliorant les lacunes de la déduction naturelle (manque de symétrie) ou permettant de considérer plusieurs conclusions. Il a été adapté à diverses logiques, telles que la logique classique, la logique intuitionniste et la logique linéaire.

Un séquent est une suite d'hypothèses suivie d'une suite de conclusions, les deux suites étant usuellement séparées par le symbole " $\vdash$ ". Un séquent représente une étape d'une démonstration, le calcul des séquents explicitant les opérations possibles sur ce séquent en vue d'obtenir une démonstration complète et correcte.

Un séquent est noté:

$$F_1, \dots, F_n \vdash G_1, \dots, G_m$$

où $F_1, \dots, F_n$ et $G_1, \dots, G_m$ sont des listes finies (et pas des ensembles) de formules. Cela signifie qu'une formule peut y apparaître plusieurs fois.

L'interprétation logique usuelle d'un séquent est la suivante:

$$(F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \Rightarrow (G_1 \vee \dots \vee G_m)$$

.

2 Le système LK

Le système LK (pour "Klassische Logik"), introduit par Gentzen, formalise la logique classique du premier ordre avec des règles de la forme:

$$\frac{\text{Premises}}{\text{Conclusion}}$$

où les prémisses sont un ensemble de séquents fixé et la conclusion est un séquent unique.

On indice $\vdash$ avec LK pour préciser qu'il s'agit du système LK.

Chacune de ces règles s'interprète comme suit: Si les prémisses sont vérifiées alors on peut déduire la conclusion. Ces règles font usage des lettres $\Gamma, \Delta, \dots$ comme variables de suites de formules. Elles se divisent en trois groupes : règles d'identité, règles structurelles et règles logiques.

2.1 Règles d'identité

$$\frac{}{F \vdash_{\text{LK}} F} \text{ (Axiom)} \quad \frac{\Gamma \vdash_{\text{LK}} F, \Delta \quad \Gamma', F \vdash_{\text{LK}} \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash_{\text{LK}} \Delta, \Delta'} \text{ (Cut)}$$

2.2 Règles structurelles

$$\begin{array}{ll} \frac{\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta}{\Gamma, F \vdash_{\text{LK}} \Delta} \text{ (L-weakening)} & \frac{\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta}{\Gamma \vdash_{\text{LK}} F, \Delta} \text{ (R-weakening)} \\ \frac{\Gamma, F, F \vdash_{\text{LK}} \Delta}{\Gamma, F \vdash_{\text{LK}} \Delta} \text{ (L-contraction)} & \frac{\Gamma \vdash_{\text{LK}} F, F, \Delta}{\Gamma \vdash_{\text{LK}} F, \Delta} \text{ (R-contraction)} \\ \frac{\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta}{\pi(\Gamma) \vdash_{\text{LK}} \Delta} \text{ (L-exchange)} & \frac{\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta}{\Gamma \vdash_{\text{LK}} \pi(\Delta)} \text{ (R-exchange)} \end{array}$$

où π est une permutation sur les listes de formules.

2.3 Règles logiques

$$\begin{array}{ll} \frac{}{\Gamma, \perp \vdash_{\text{LK}} F} \text{ (L-}\perp\text{)} & \frac{\Gamma, F \vdash_{\text{LK}} \Delta}{\Gamma \vdash_{\text{LK}} \top} \text{ (R-}\top\text{)} \\ \frac{\Gamma \vdash_{\text{LK}} F, \Delta}{\Gamma, \neg F \vdash_{\text{LK}} \Delta} \text{ (L-negation)} & \frac{\Gamma, F \vdash_{\text{LK}} \Delta}{\Gamma \vdash_{\text{LK}} \neg F, \Delta} \text{ (R-negation)} \\ \frac{\Gamma, F, G \vdash_{\text{LK}} \Delta}{\Gamma, F \wedge G \vdash_{\text{LK}} \Delta} \text{ (L-conjunction)} & \frac{\Gamma \vdash_{\text{LK}} F, \Delta \quad \Gamma \vdash_{\text{LK}} G, \Delta}{\Gamma \vdash_{\text{LK}} F \wedge G, \Delta} \text{ (R-conjunction)} \\ \frac{\Gamma, F \vdash_{\text{LK}} \Delta \quad \Gamma, G \vdash_{\text{LK}} \Delta}{\Gamma, F \vee G \vdash_{\text{LK}} \Delta} \text{ (L-disjunction)} & \frac{\Gamma \vdash_{\text{LK}} F, G, \Delta}{\Gamma \vdash_{\text{LK}} F \vee G, \Delta} \text{ (R-disjunction)} \\ \frac{\Gamma \vdash_{\text{LK}} F, \Delta \quad \Gamma, G \vdash_{\text{LK}} \Delta}{\Gamma, F \Rightarrow G \vdash_{\text{LK}} \Delta} \text{ (L-implication)} & \frac{\Gamma, F \vdash_{\text{LK}} G, \Delta}{\Gamma \vdash_{\text{LK}} F \Rightarrow G, \Delta} \text{ (R-implication)} \end{array}$$

2.4 Sémantique et lien avec la déduction naturelle

Tout jugement pouvant être prouvé en déduction naturelle classique peut aussi être prouvé dans le calcul des séquents classique.

Théorème 1. *Si $\Gamma \vdash_{NK} F$ alors $\Gamma \vdash_{LK} F$.*

La réciproque est plus compliquée car les jugements du calcul des séquents ne sont pas tous des jugements de la déduction naturelle. On obtient cependant un résultat similaire si l'on se restreint à des jugements avec une seule formule en conclusion.

Théorème 2. *Si $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$ alors $\Gamma, \neg\Delta \vdash_{NK} \perp$.*

En particulier, $\Gamma \vdash_{LK} F$ alors $\Gamma \vdash_{NK} F$.

2.5 Exemple

Voici un exemple illustrant une démonstration de LK:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{R \vdash_{LK} R} \text{ (Axiom)}}{R, P \vdash_{LK} R} \text{ (L-weakening)}}{R \vdash_{LK} P \Rightarrow R} \text{ (R-implication)}}{\cdot \vdash_{LK} R \Rightarrow (P \Rightarrow R)} \text{ (R-implication)}$$

Une démonstration est un arbre dont la racine est un séquent et dont les feuilles sont obtenues par application des règles (Axiome).

2.6 Théorème d'élimination des coupures

Gentzen a démontré un théorème d'élimination des coupures, aussi connu sous le nom de "théorème de Gentzen" ou d'"Hauptsatz". Ce théorème énonce que toute démonstration en calcul des séquents peut être transformée en une démonstration de même n'utilisant pas la règle de la coupure (cut). On parle de normalisation.

Une coupure

$$\frac{\Gamma \vdash_{LK} F, \Delta \quad \Gamma', F \vdash_{LK} \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash_{LK} \Delta, \Delta'} \text{ (Cut)}$$

peut s'interpréter ainsi:

$$\frac{\text{Théorie} \vdash_{LK} \text{Lemme} \quad \text{Théorie, Lemme} \vdash_{LK} \text{Théorème}}{\text{Théorie} \vdash_{LK} \text{Théorème}} \text{ (Cut)}$$

Intuitivement, éliminer les coupures consiste à remplacer toutes les occurrences du Lemme intermédiaire par sa preuve dans la démonstration du Théorème.

Idée pour l'élimination :

$$\frac{\Gamma \vdash_{LK} F \quad \Gamma, F \vdash_{LK} G}{\Gamma \vdash_{LK} G} \text{ (Cut)} \equiv \frac{\Gamma \vdash_{LK} F \quad \frac{\Gamma, F \vdash_{LK} G}{\Gamma, \vdash_{LK} F \Rightarrow G} \text{ R-implication}}{\Gamma \vdash_{LK} G} \text{ E} \Rightarrow$$