

Contraintes dans les sols

Olivier Cuisinier

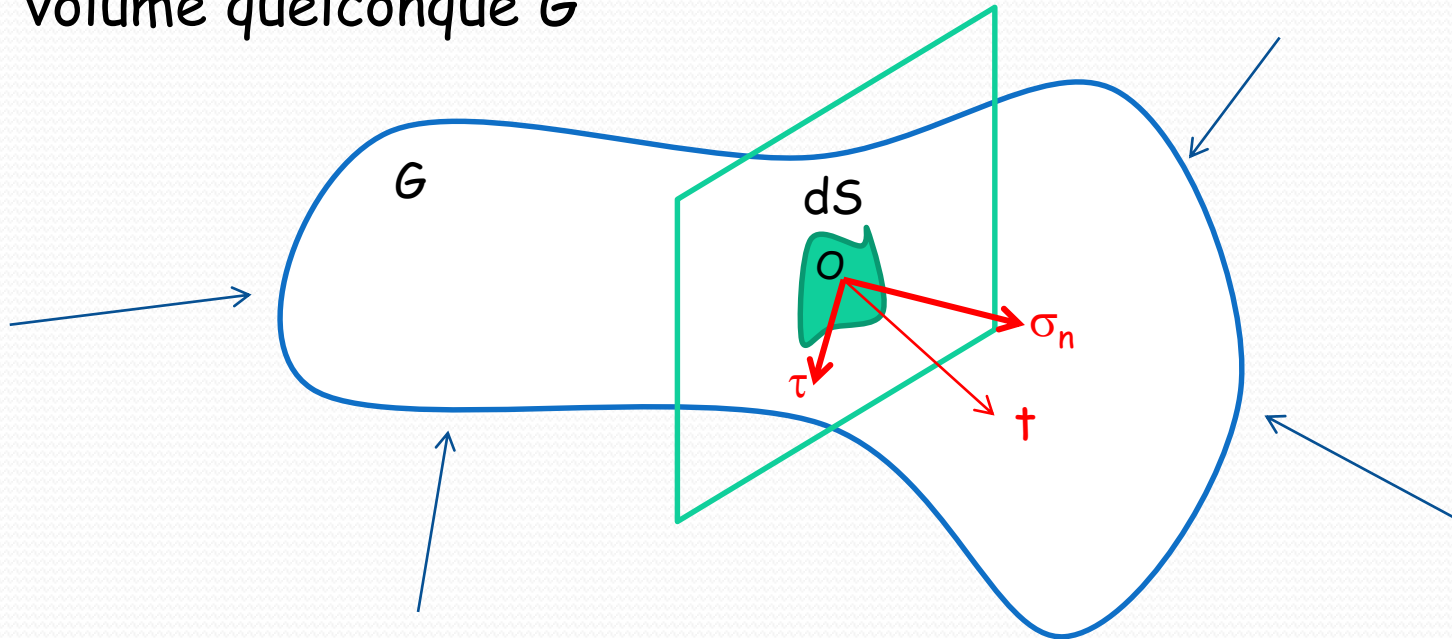
ENSG

Objectifs du cours

- Rappel sur la notion de contrainte
- Cercle de Mohr / utilisation du cercle de Mohr
- Contraintes dans un massif de sol
- Estimer l'impact d'une surcharge sur la répartition des contraintes dans le sol

Notion de contrainte (milieu continu)

- Soit un élément surfacique dS , dans le plan γ , au sein d'un volume quelconque G

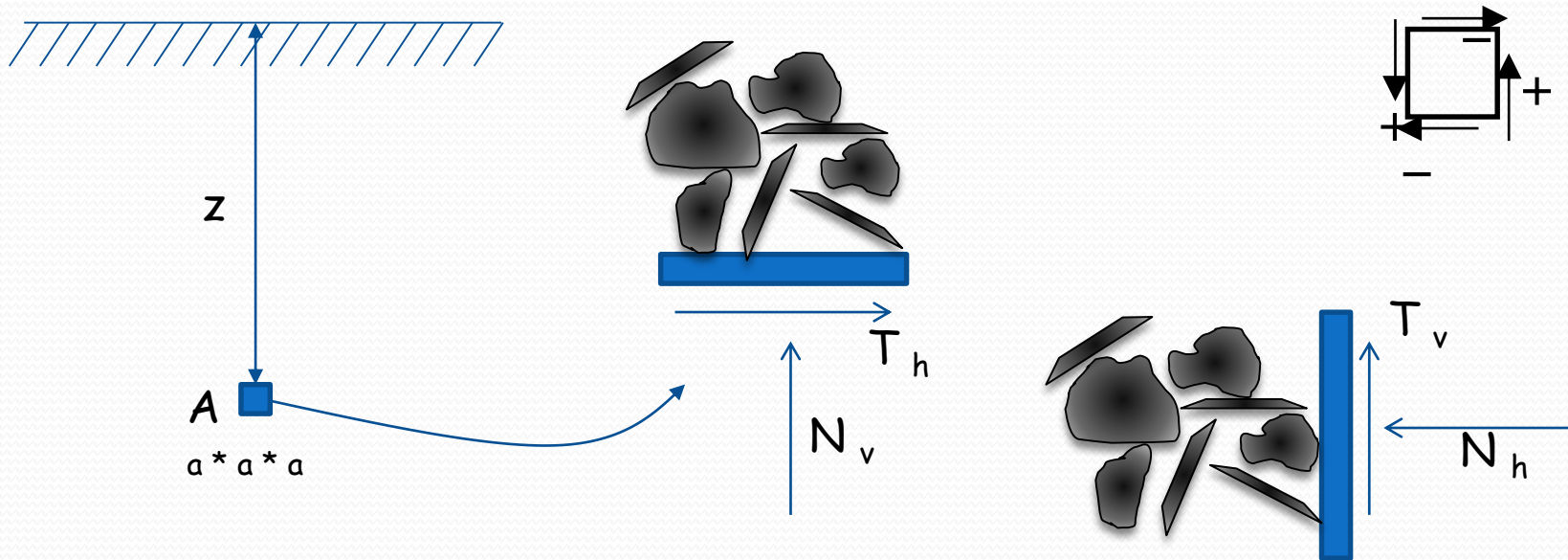


- La portion à gauche de la surface exerce un effort dF sur l'élément de surface dS
- La limite de F quand S tend vers 0 est le vecteur contrainte au point O :

$$t = \frac{dF}{dS}$$

Notion de contrainte dans un sol

- Sol = mélange de particules de quartz, argiles, etc.



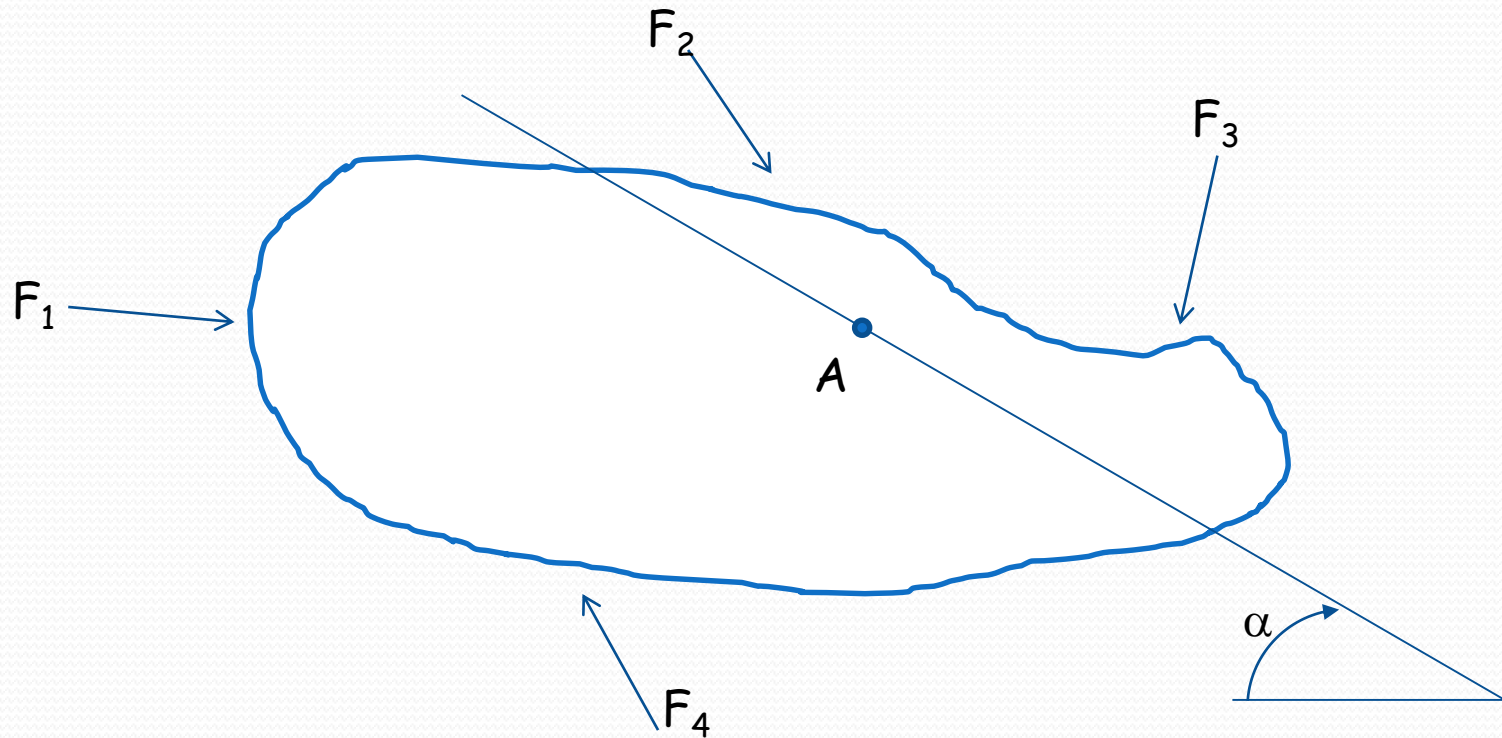
- La contrainte calculée est une moyenne sur une section a
- $$\sigma_v = \frac{N_v}{a^2} \quad \tau_v = \frac{T_v}{a^2} \quad \sigma_h = \frac{N_h}{a^2} \quad \tau_h = \frac{T_h}{a^2}$$

Remarque : compression positive, traction négative

Cercle de Mohr

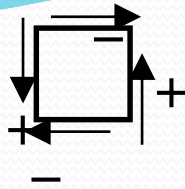
Etat de contrainte

Un volume de sol soumis à des forces externes...

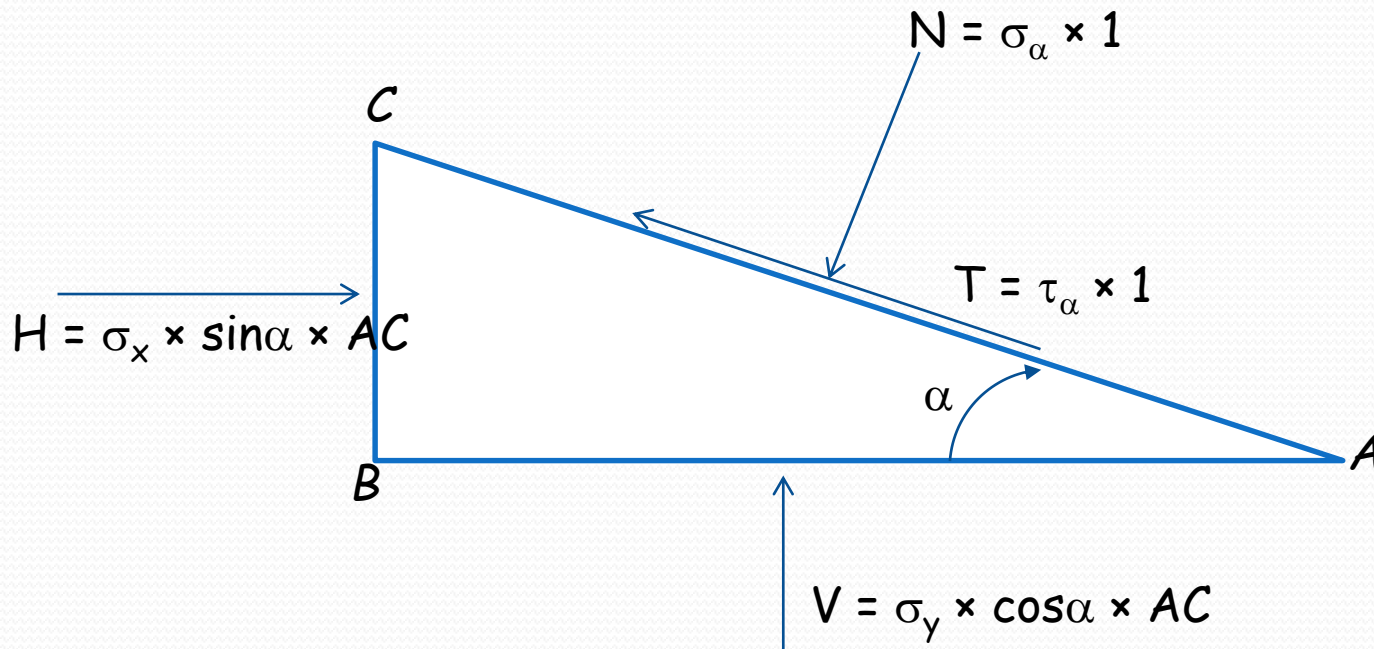


- Comment décrire l'état de contrainte autour de A ? Sur un plan quelconque ?

Comment décrire l'état de contrainte ?



- Décomposition des forces autour du point O :



$$\begin{aligned}
 [AC] &= 1 \\
 [CB] &= [AC] \sin \alpha \\
 [AB] &= [AC] \cos \alpha
 \end{aligned}$$

- Equilibre, donc $\Sigma F = 0$

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma F_{Hz} &= H - T \cos \alpha - N \sin \alpha = 0 \\ \Sigma F_v &= V - T \sin \alpha - N \cos \alpha = 0 \end{aligned} \right.$$

Comment décrire l'état de contrainte ?

- Prise en compte de la surface sur laquelle s'exerce chaque force


$$\begin{cases} \sigma_x \sin \alpha - \tau_\alpha \cos \alpha - \sigma_\alpha \sin \alpha = 0 \\ \sigma_y \cos \alpha - \tau_\alpha \sin \alpha - \sigma_\alpha \cos \alpha = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_\alpha = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

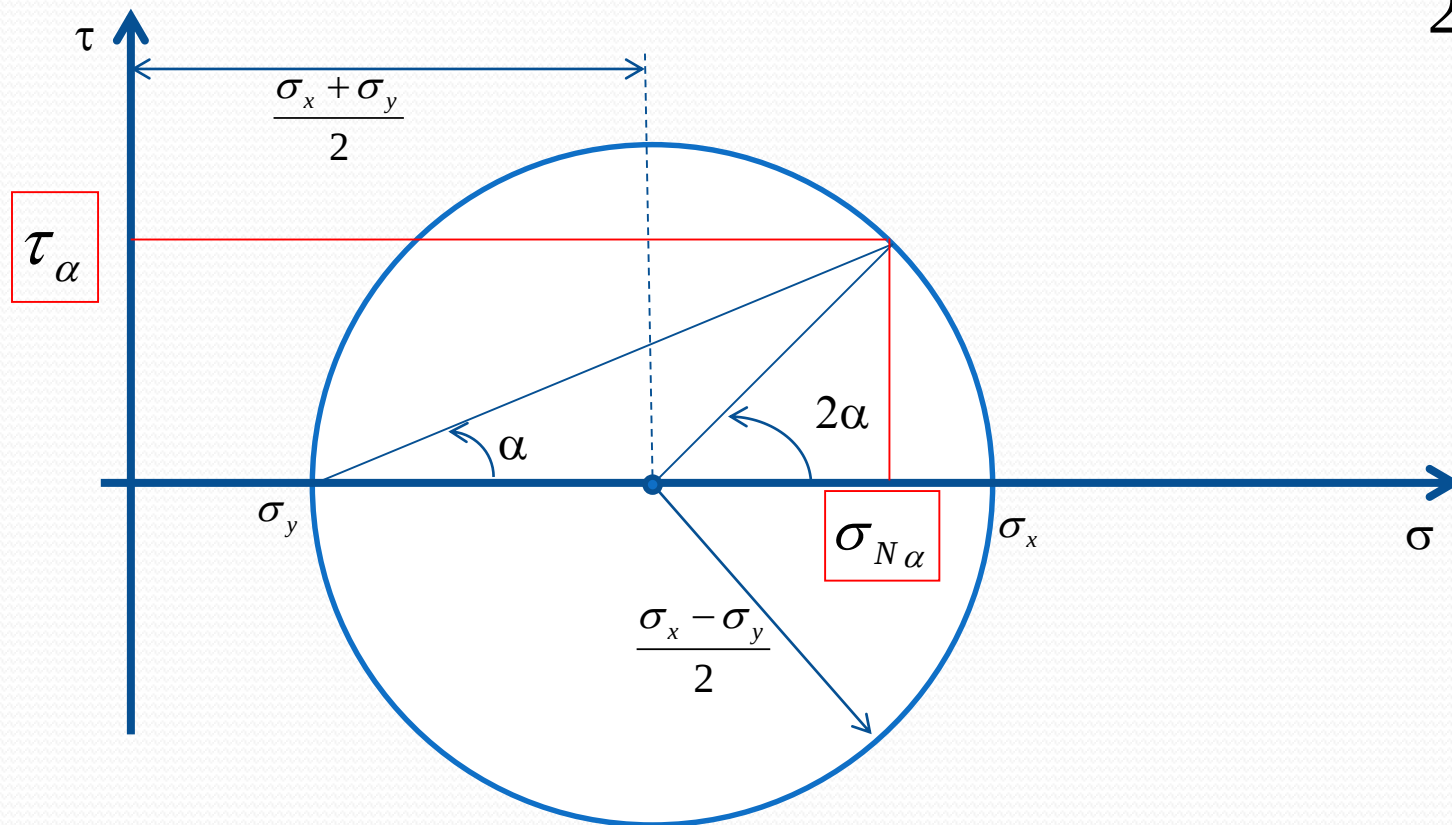
- Si on élève au carré et additionne ces équations :

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2$$

Cercle de Mohr

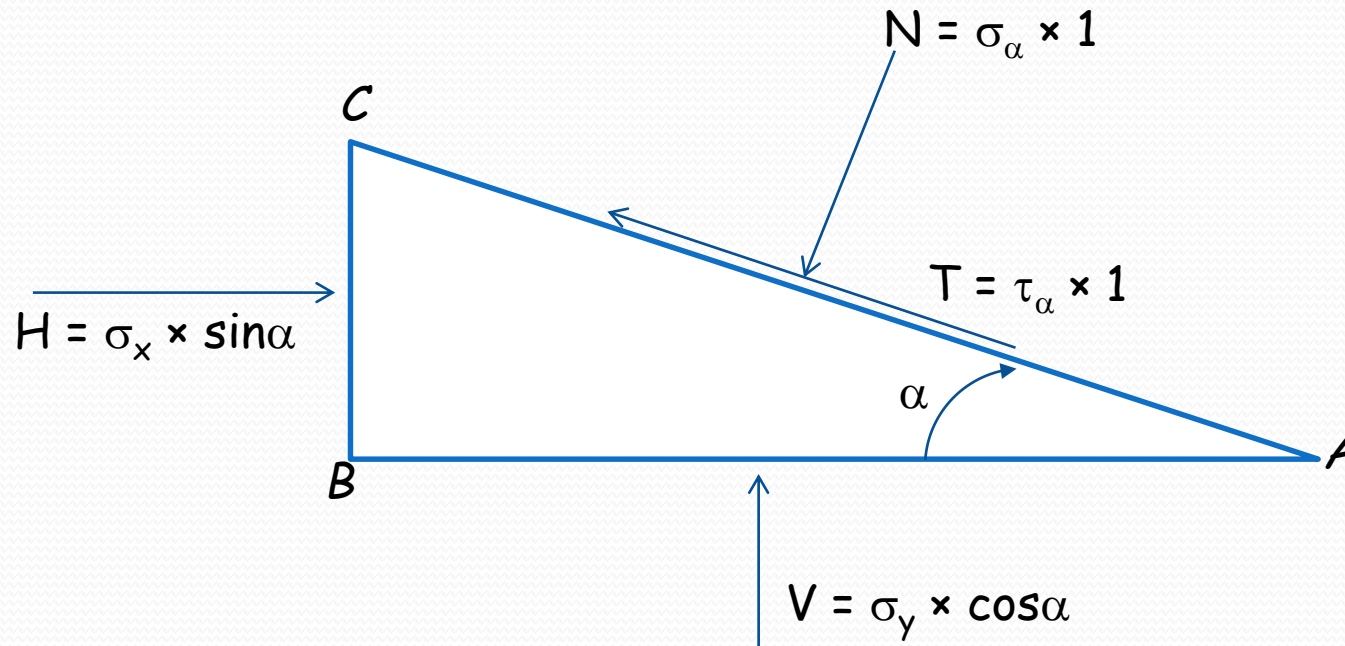
- On obtient l'équation d'un cercle :

{	• Centre	$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$
	• Rayon	$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$



- Ce cercle permet de décrire l'état de contrainte autour de A

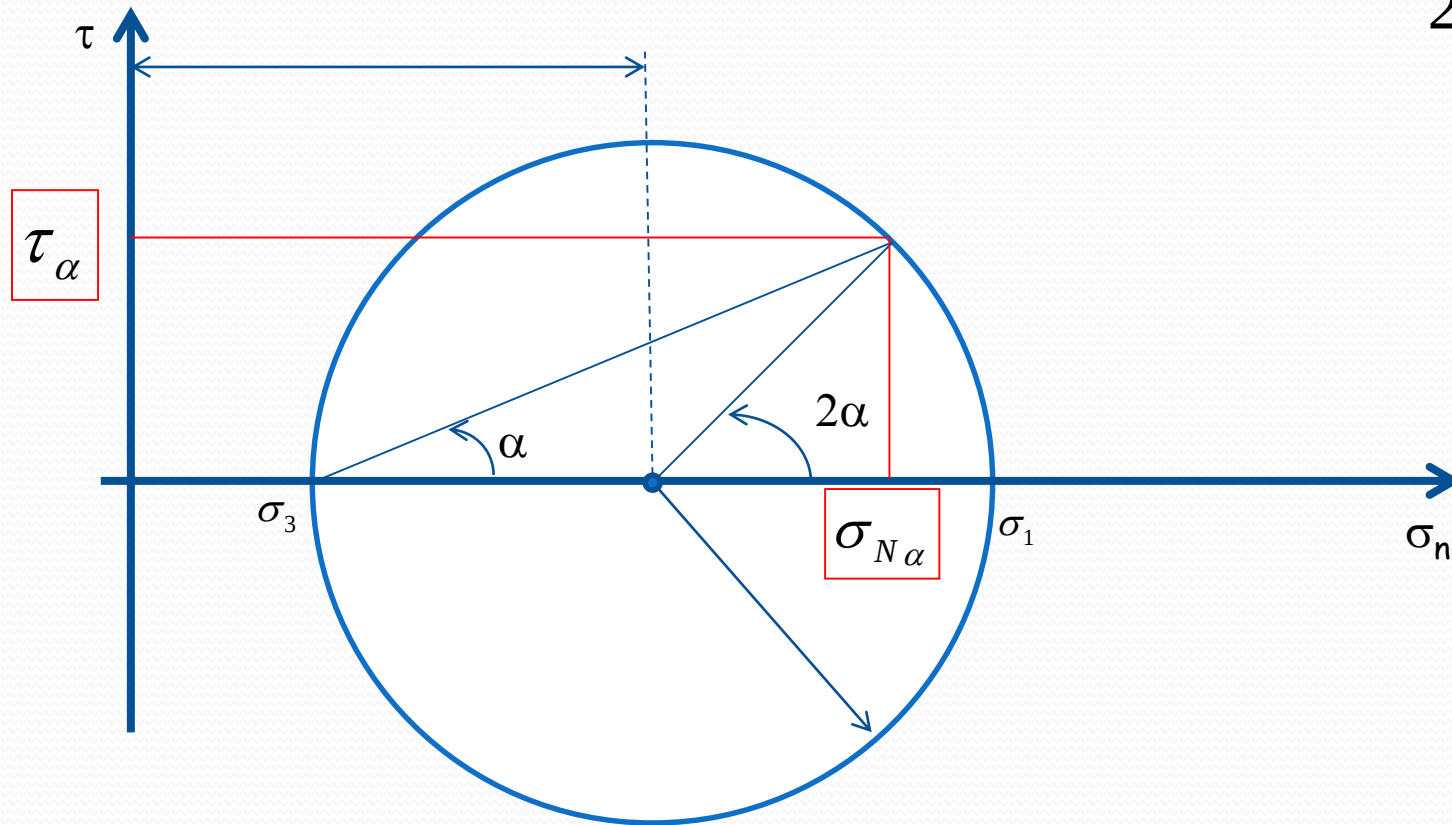
Cercle de Mohr



- Les plans CB et BA ne subissent pas de contrainte de cisaillement $\rightarrow$ ils sont définis comme des plans principaux :
 - $\sigma_x = \sigma_1 =$ contrainte principale majeure
 - $\sigma_y = \sigma_3 =$ contrainte principale mineure

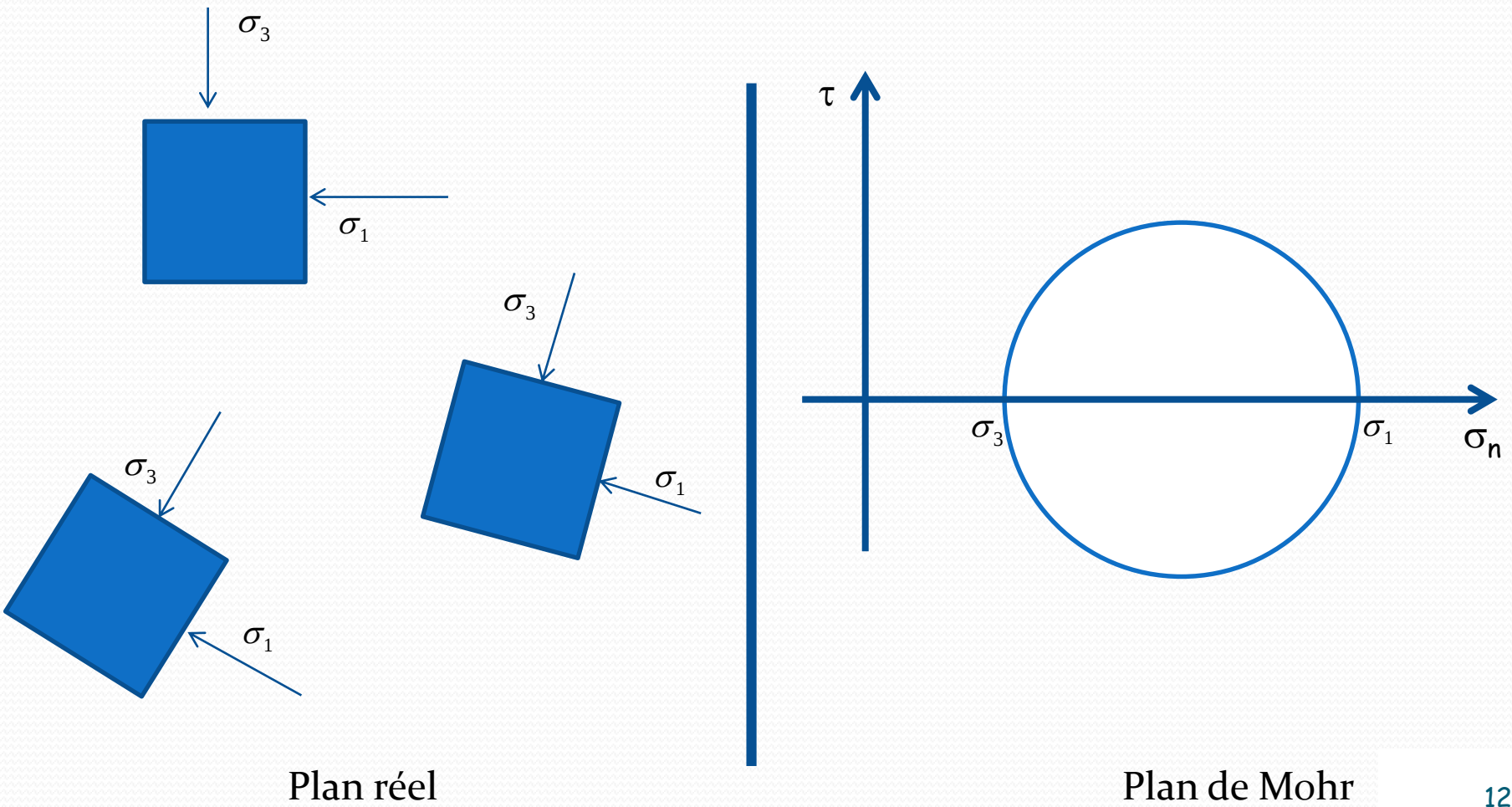
Cercle de Mohr

- Centre $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$
- Rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$



Utilisation pratique du cercle de Mohr

- Un état de contrainte donné $\rightarrow$ même cercle de Mohr

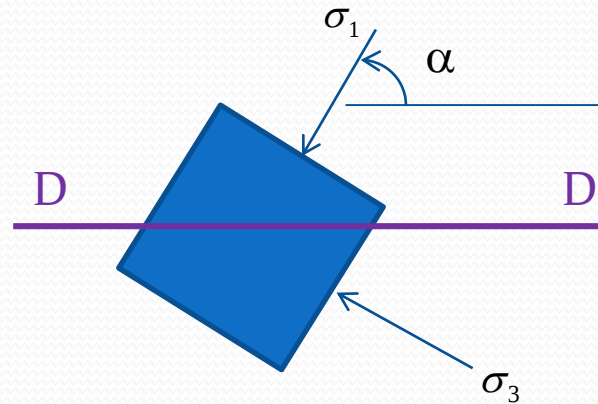


• Définition du pôle du cercle de Mohr :

Toute droite passant par le pôle coupe le cercle de Mohr en un point qui définit l'état de contraintes sur un plan dont l'inclinaison est la même que celle de la droite

Utilisation pratique du cercle de Mohr

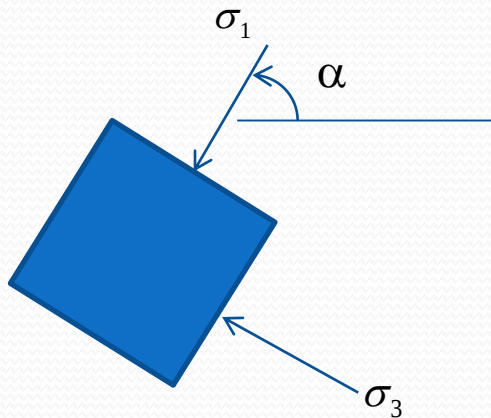
- Quel est l'état de contrainte sur le plan DD' , sachant que la valeur des contraintes principales, et les directions des plans principaux sont connus ?



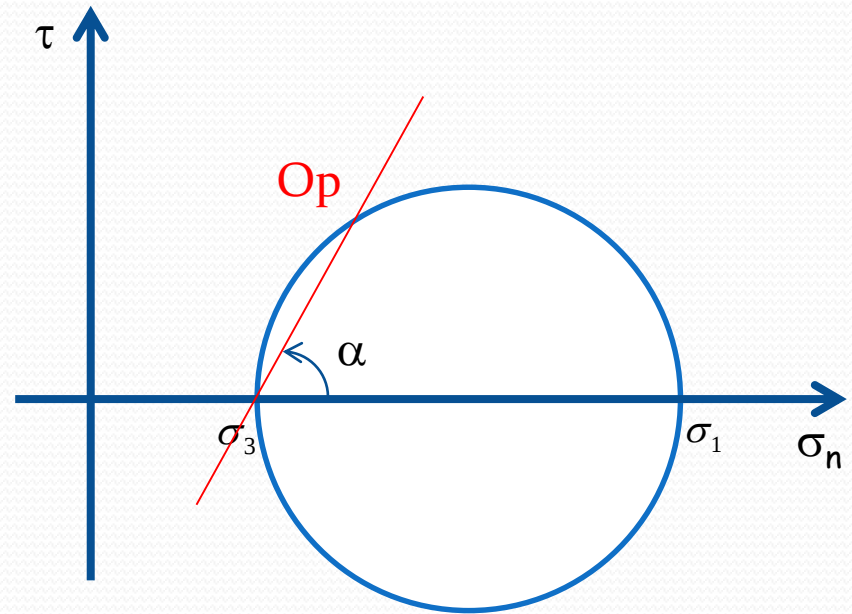
État de contrainte = connaissance de la valeur de la contrainte normale et de la contrainte tangentielle

Utilisation pratique du cercle de Mohr

- Définition du pôle du cercle correspondant à un état de contrainte donné, et une orientation particulière



Plan réel



Étape 1 : cercle de Mohr

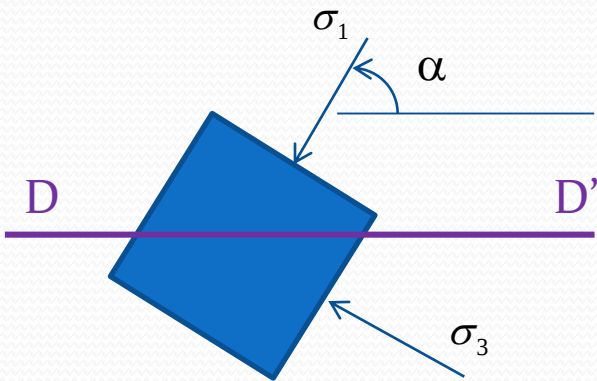
Étape 2 : facette sur laquelle σ_3

Étape 3 : intersection avec le cercle = pôle

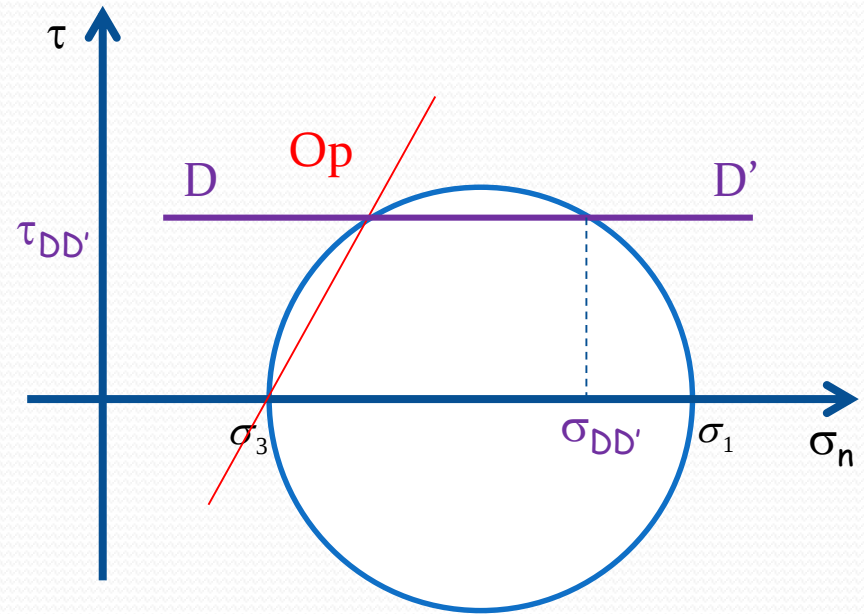
Plan de Mohr

Utilisation pratique du cercle de Mohr

- Détermination de l'état de contrainte sur un plan



Plan réel



Étape 1, 2 puis 3

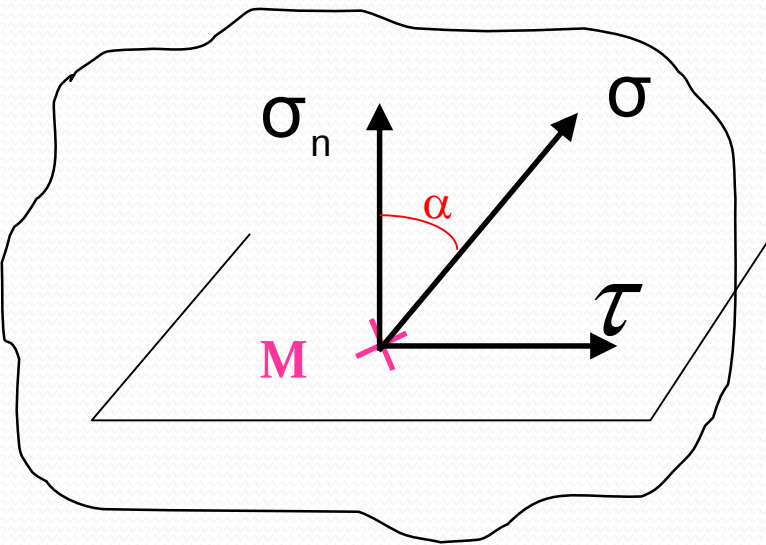
Étape 4 : trace du plan DD' par Op

Étape 5 : état de contrainte sur DD'

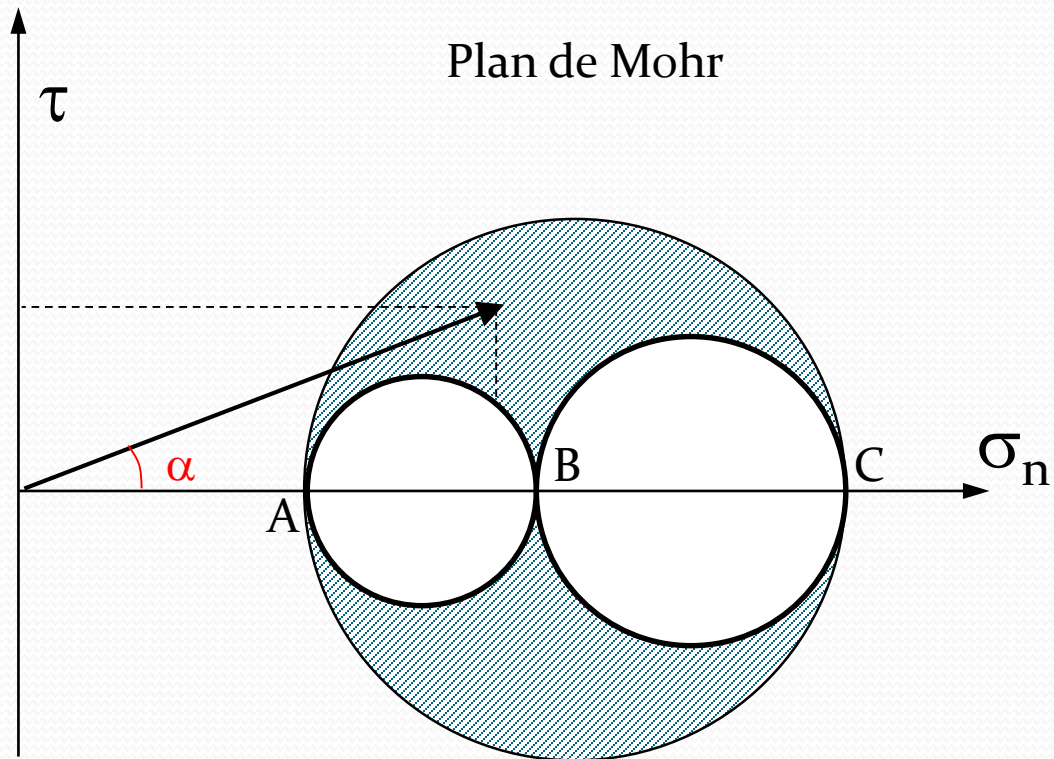
Plan de Mohr

Cas à 3 dimensions

Plan réel



Plan de Mohr

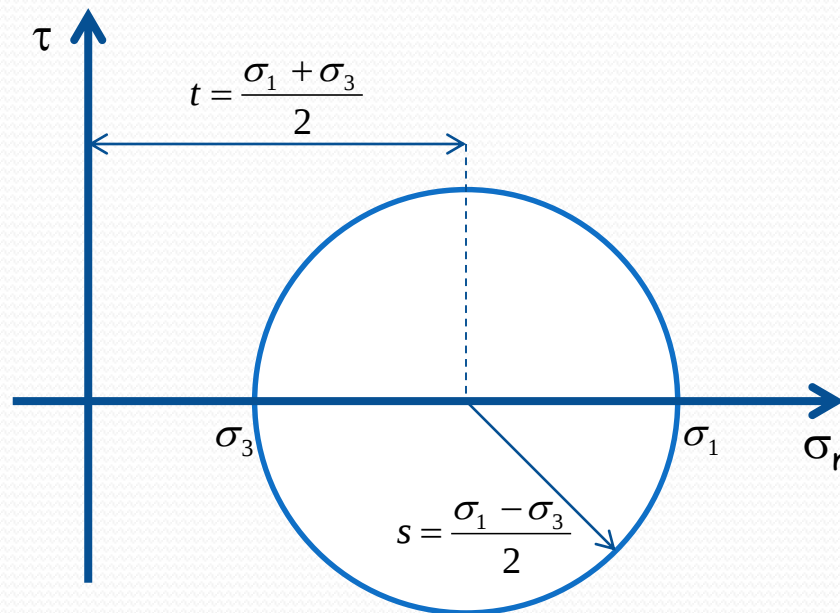


Représentation de Mohr dans le cas où il y a 3 contraintes principales différentes.

Si 2 des contraintes principales sont égales on revient au schéma précédent.

Note : représentation de Lambe

- Objectif : permettre de représenter de manière simplifiée un état de contrainte

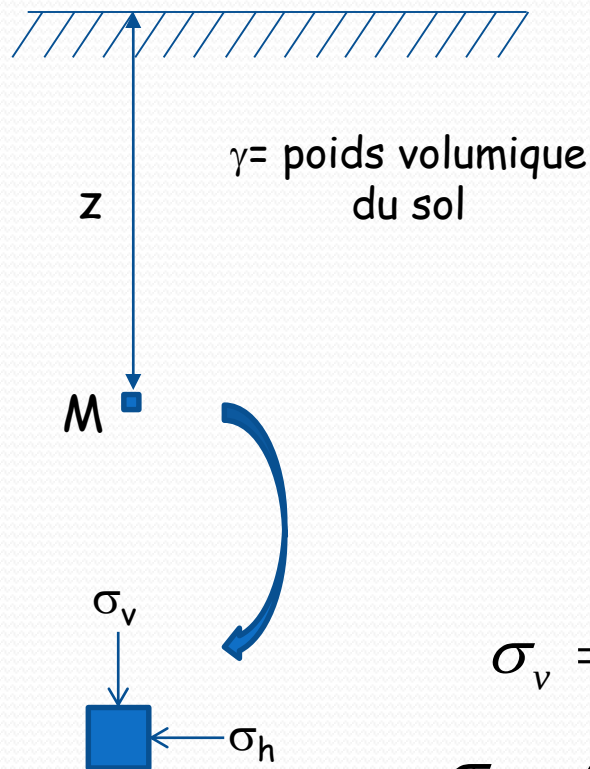


➔ Notion de chemin de contrainte

Contraintes dans un sol

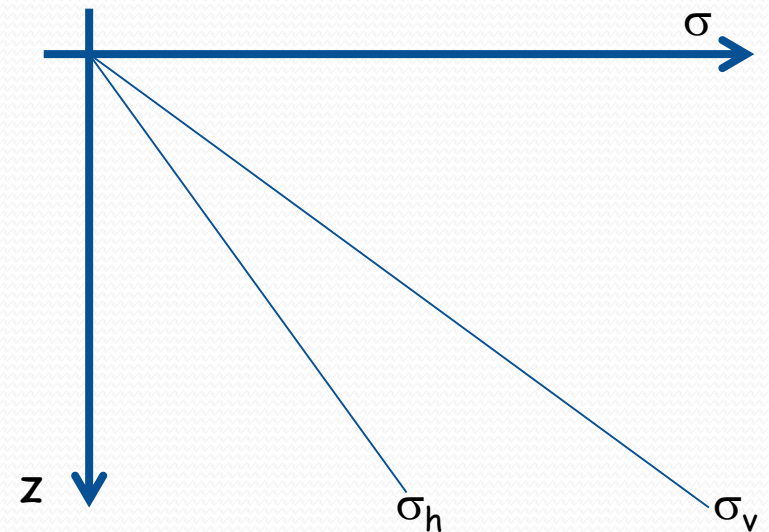
Cas d'un sol à surface horizontale infinie

- La contrainte verticale en un point se calcule en considérant le poids volumique du sol au-dessus de ce point



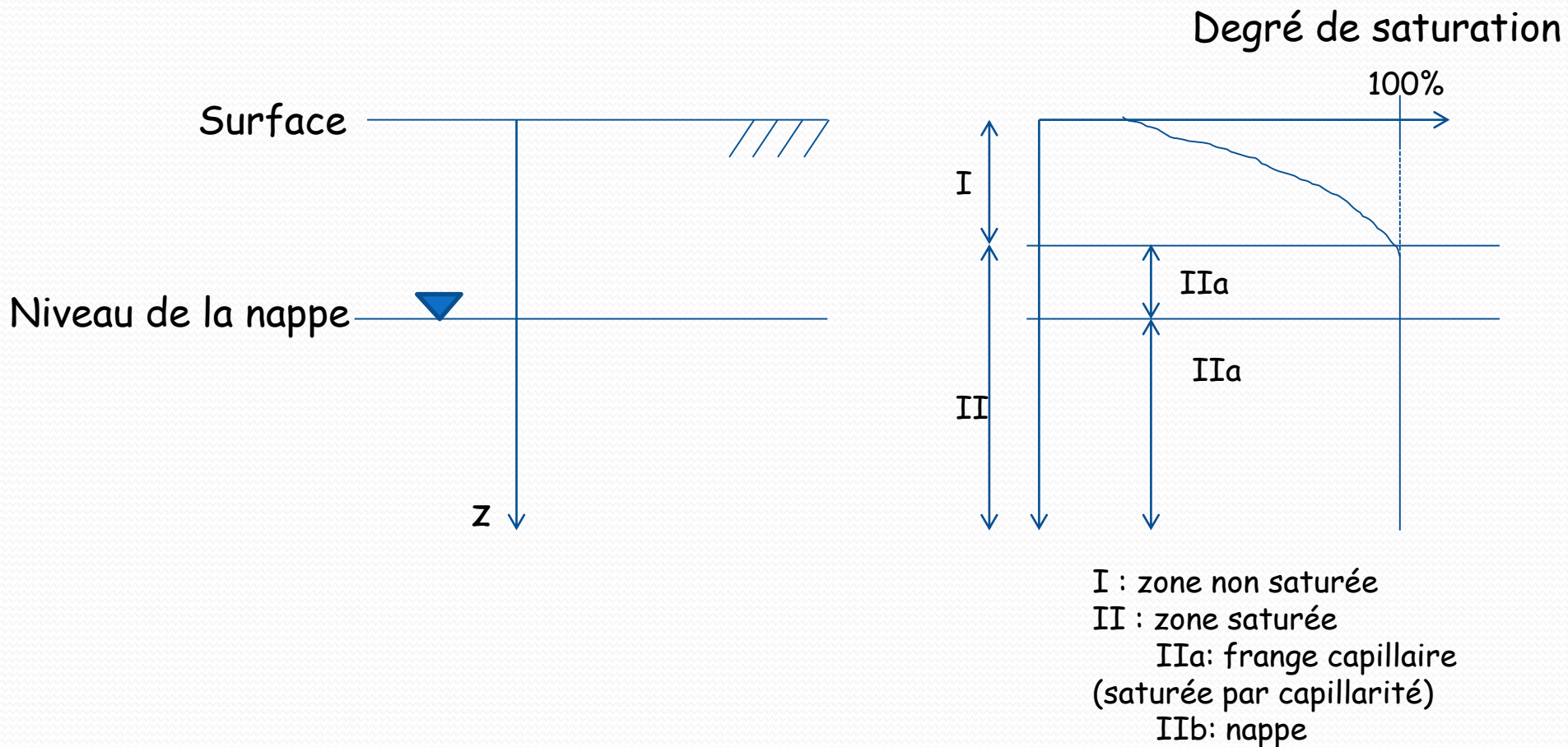
$$\sigma_v = \gamma \times z$$

$$\sigma_h = \gamma \times z \times K_0$$



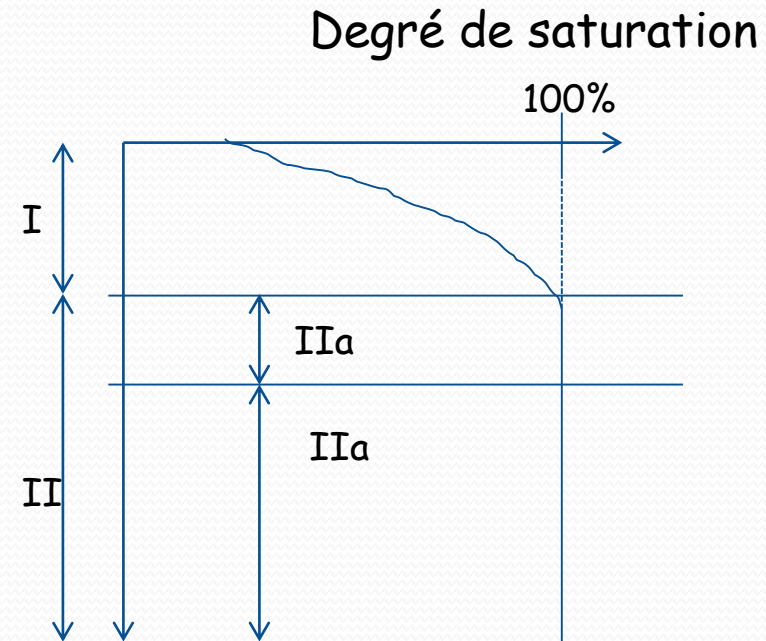
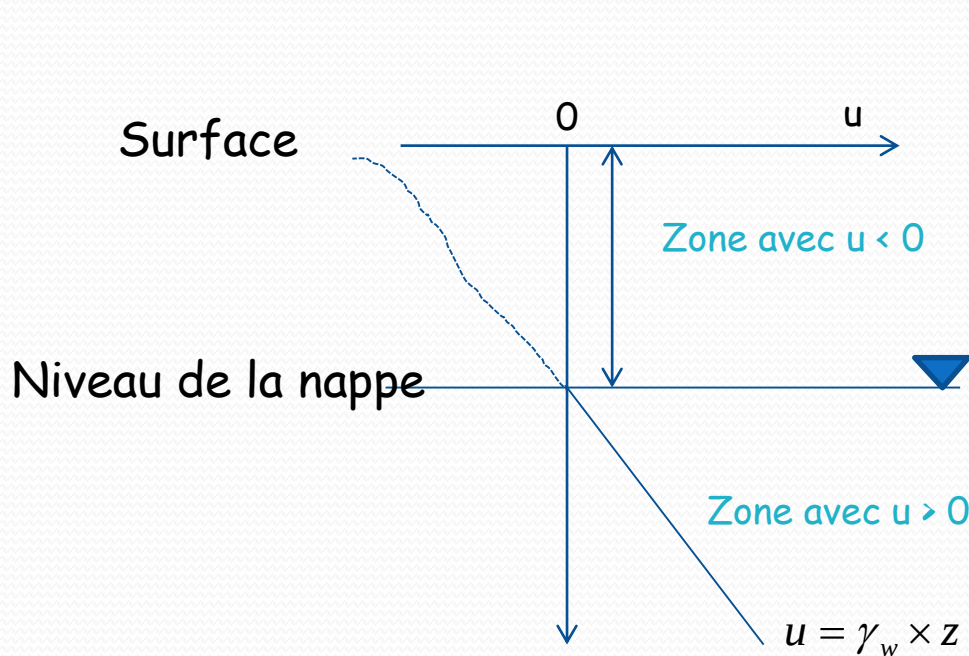
Distribution des contraintes
Diagramme des contraintes

Eau dans le sol



- Comment définir le niveau de la nappe ?

Eau dans le sol : pression interstitielle (u)



I : zone non saturée
 II : zone saturée
 IIa: frange capillaire
 (saturée par capillarité)
 IIb: nappe

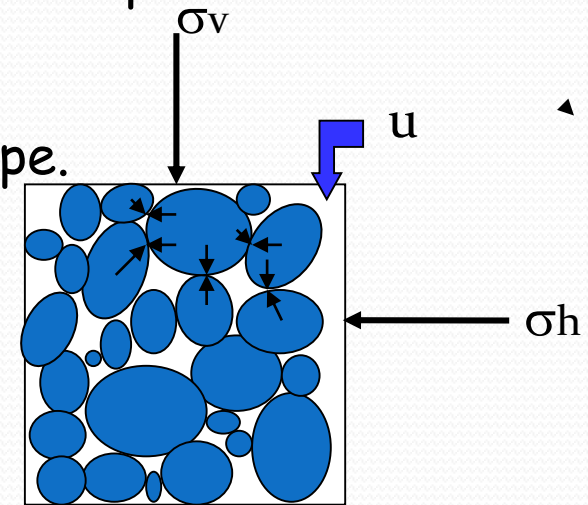
- Niveau de la nappe $\rightarrow u = 0$
- Comment u modifie la distribution des contraintes ?

Postulat de Terzaghi : contrainte effective

- Il a été initialement conçu pour les sols saturés, donc composés de 2 phases : squelette solide + eau.
- On suppose qu'à la périphérie de cet échantillon s'exercent des forces qui se traduisent par des contraintes totales respectivement verticale et horizontale, en principe des valeurs différentes.
- Le sol étant saturé il existe dans l'eau une pression interstitielle notée u qui est isotrope.

La différence entre la contrainte totale σ et la pression u est définie comme la contrainte effective notée σ' .

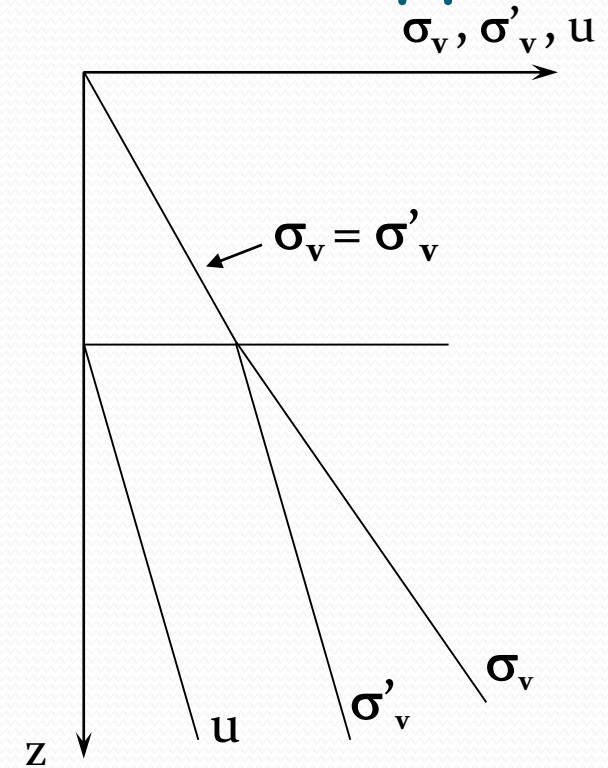
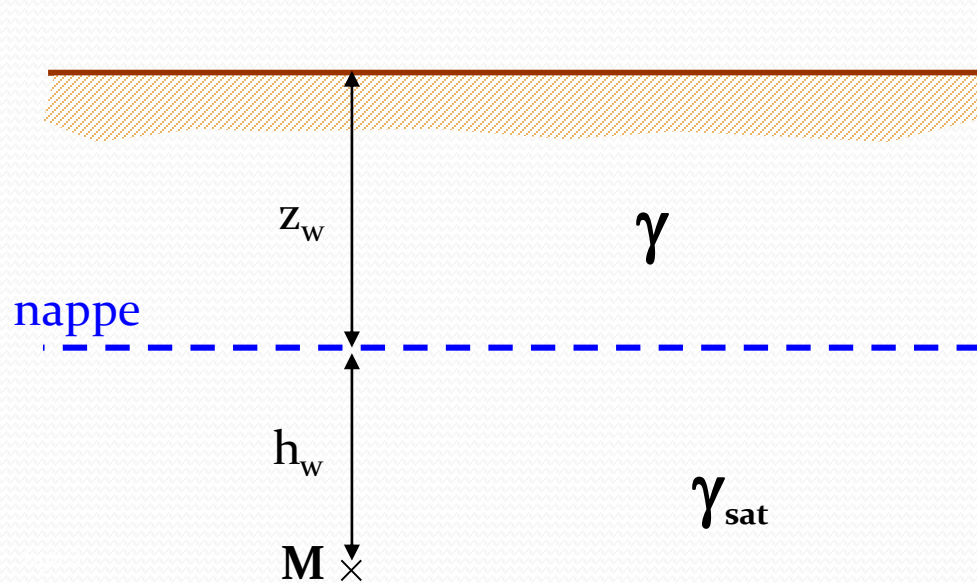
Terzaghi pose que tous les effets mesurables d'un changement d'état de contrainte dans un sol (déformation / résistance) sont dus aux changements de contrainte effective (efficace).



$$\sigma'_v = \sigma_v - u$$

$$\sigma'_h = \sigma_h - u$$

Contrainte verticale dans un sol avec nappe

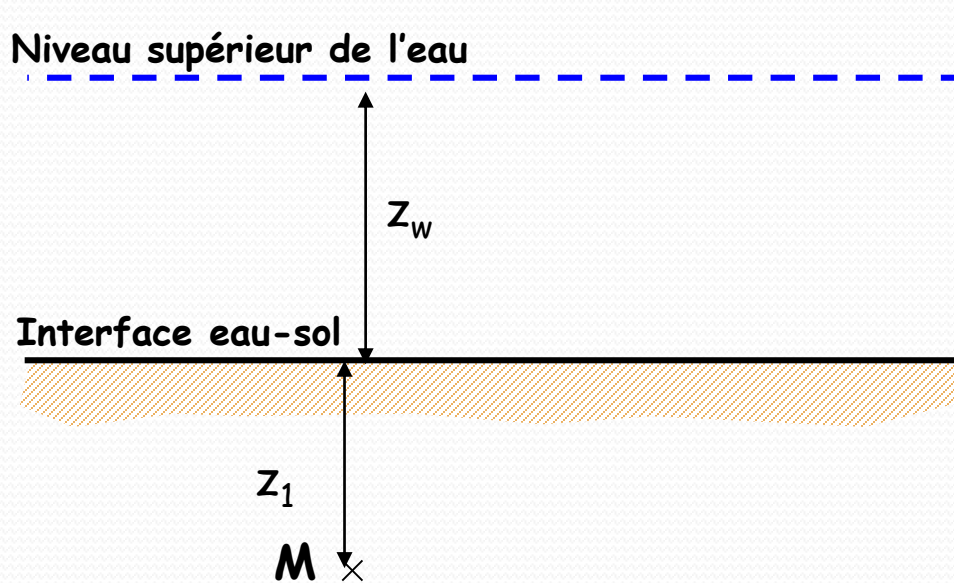


En M

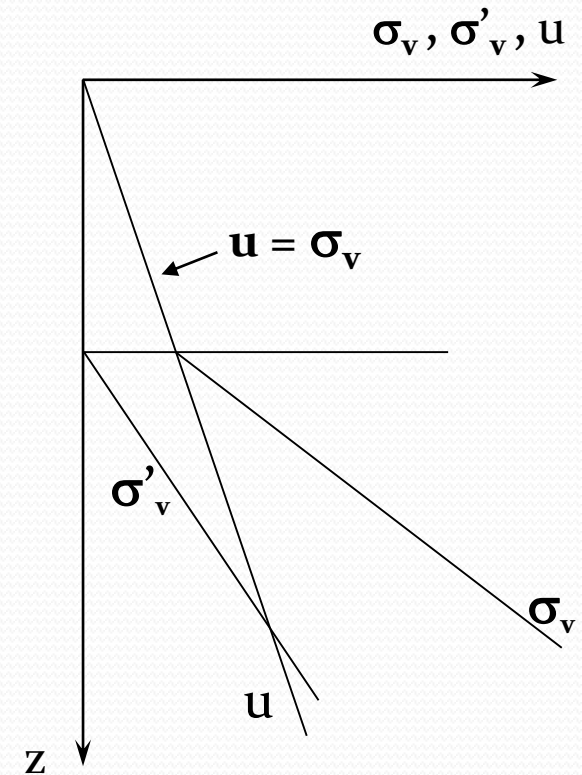
$$\sigma_v = \gamma z_w + \gamma_{sat} h_w \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \gamma_w \cdot h_w \\ \sigma'_v = \gamma z_w + \gamma' h_w \end{array} \right. \quad \gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$$

$\uparrow$ Contrainte verticale totale
 $\uparrow$ Contrainte verticale effective
 $\uparrow$ Poids volumique déjaugé

Cas d'un sol submergé



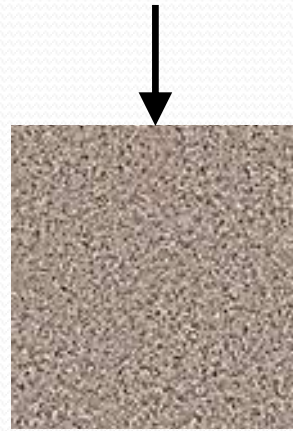
$$\sigma'_v = \gamma' z_1$$
$$u = \gamma_w (z_1 + z_w)$$



- Quelle que soit la profondeur de l'eau, la valeur de la contrainte effective dépend uniquement de la profondeur dans le sol !

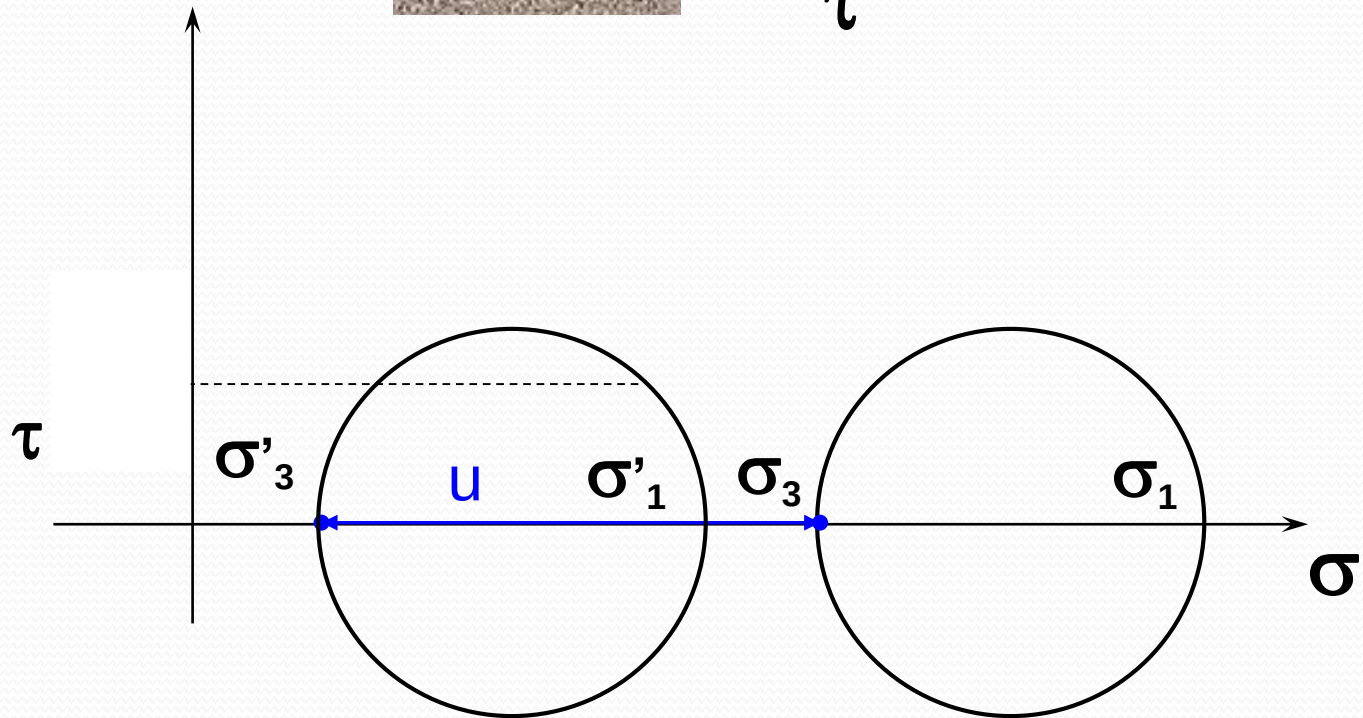
Représentation de Mohr

$$\sigma_1 = \sigma'_1 + u$$

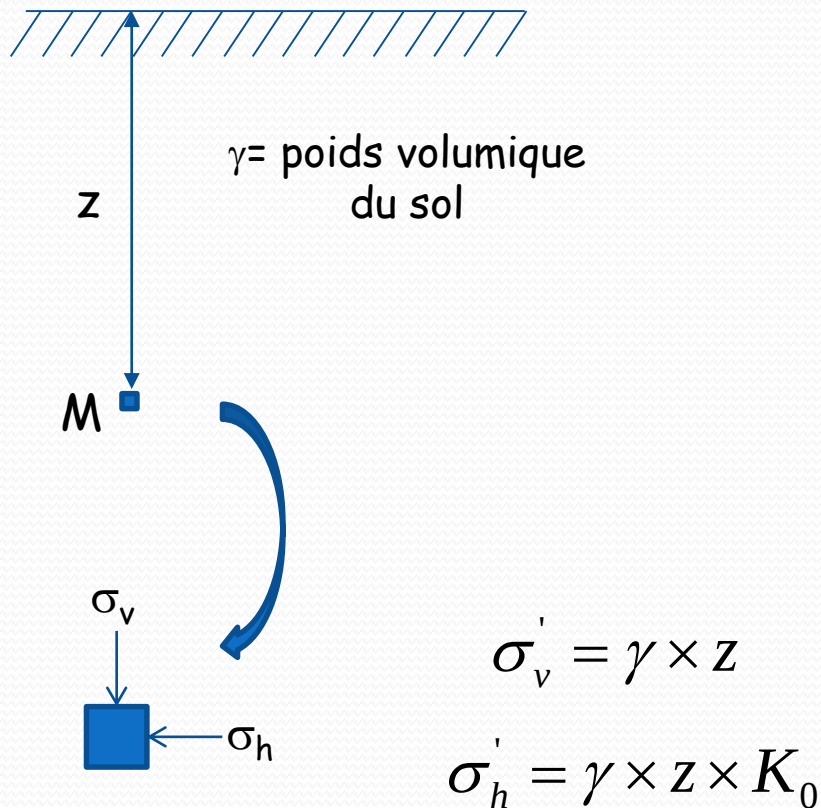


$$\sigma_3 = \sigma'_3 + u$$

τ



Relation entre σ_v et σ_h



- K_0 : Défini comme le rapport entre la contrainte **effective** horizontale et la contrainte **effective** verticale.
- Dans le cas particulier où il n'y a pas de déformations du sol dans le sens horizontal (sol dit au repos), il prend la valeur K_0 .
- Pour un matériau élastique on trouve que:

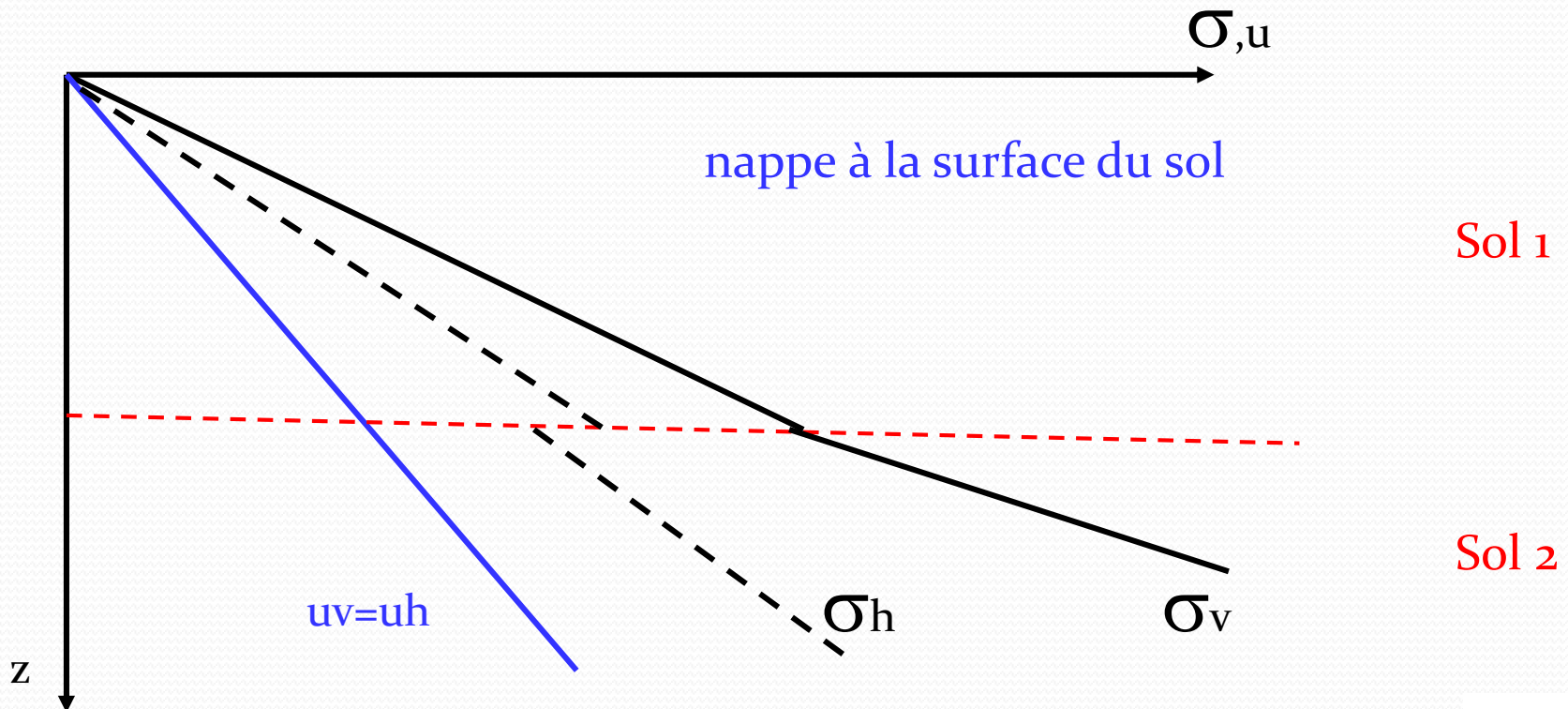
$$K_0 = \nu / (1 - \nu);$$

- ν étant inférieur à 0,5, cela entraîne que la contrainte horizontale est inférieure à la contrainte verticale.
- K_0 n'est pas une constante, et change de manière significative

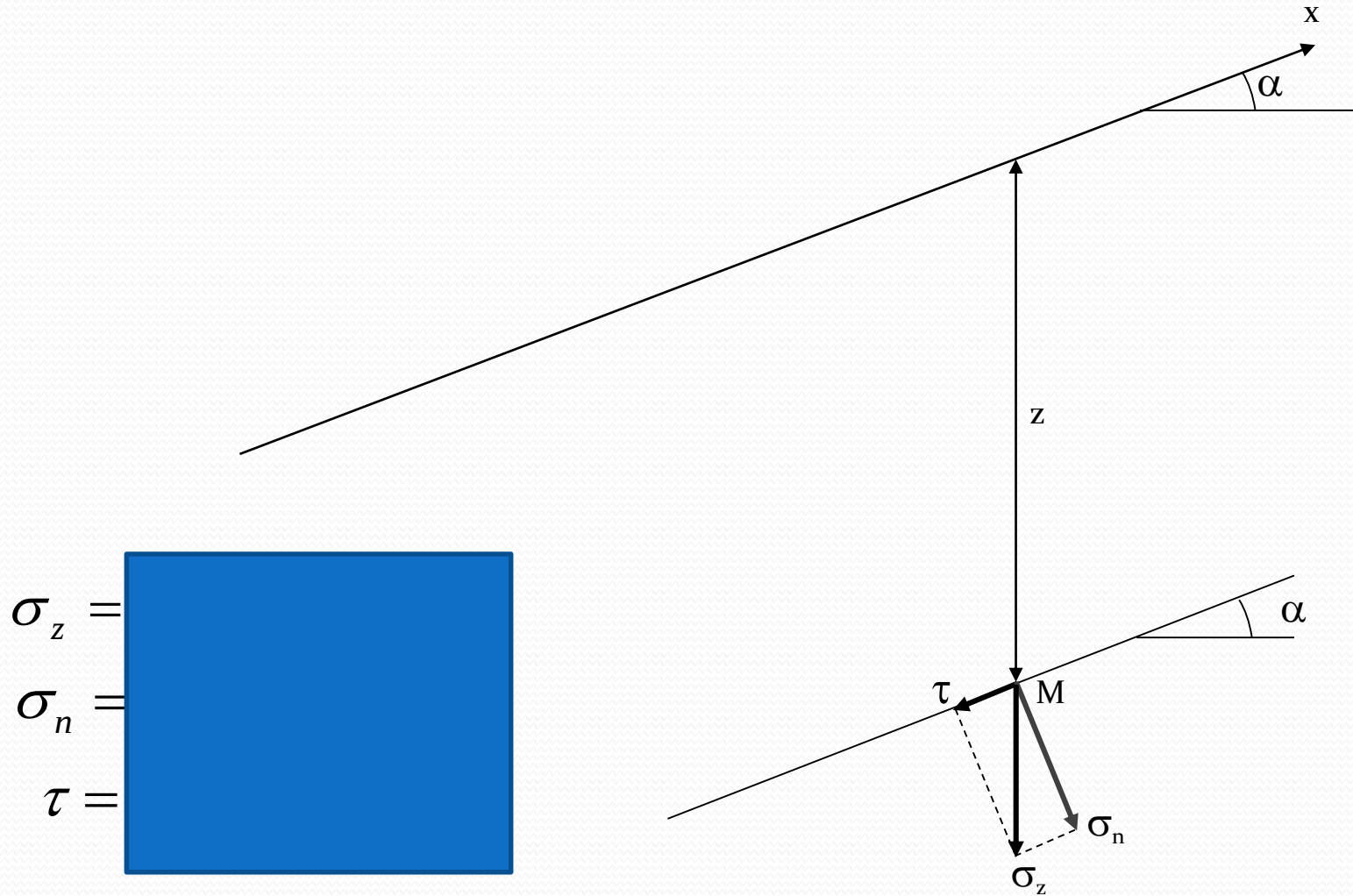
Relation entre σ_v et σ_h

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v \quad \text{mais } uv=uh$$

Alors que les valeurs des contraintes verticales varient sans discontinuité, ce n'est pas le cas pour les contraintes horizontales. Ceci est dû au fait que les valeurs de K changent avec le sol $\rightarrow$ exemple

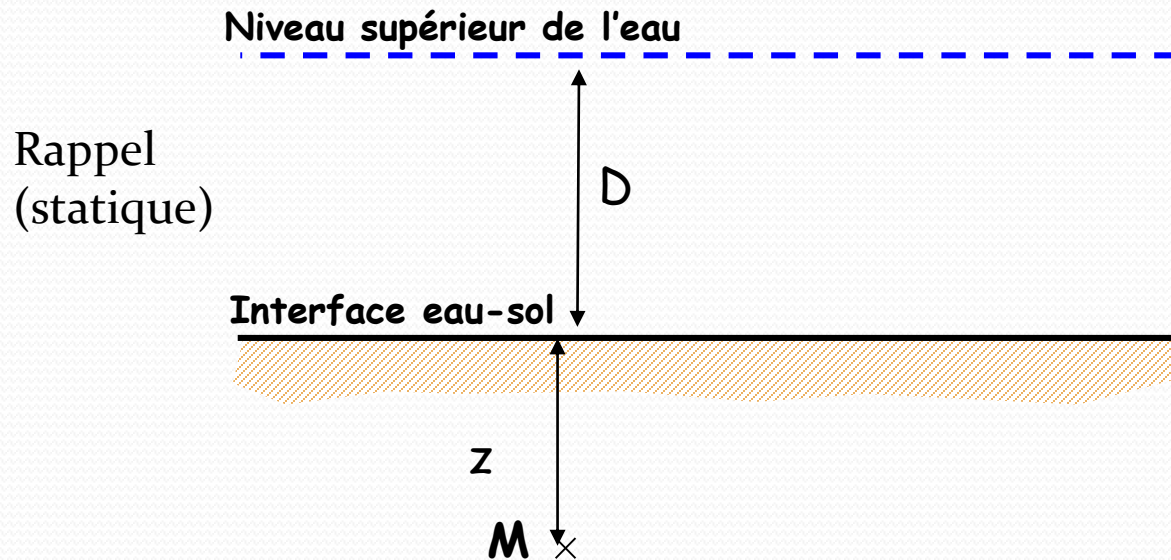


Cas d'une surface inclinée



Force d'écoulement : boulangage liquéfaction

- Lorsque l'eau s'écoule, elle exerce une force d'écoulement sur les grains du sol
→ Conséquence sur les contraintes effectives ?



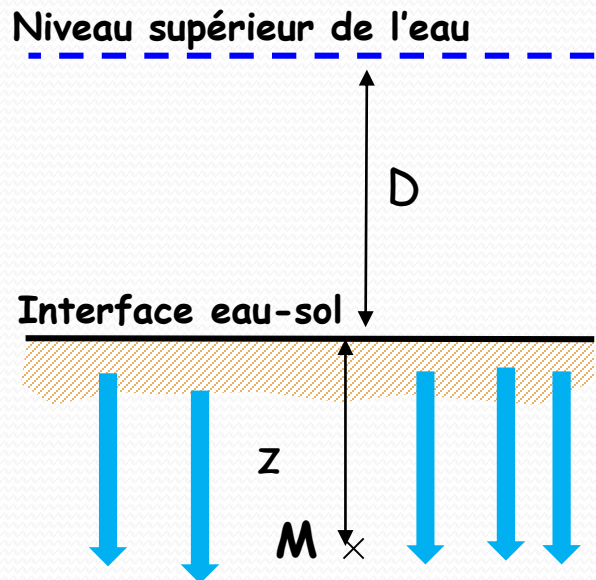
$$\sigma = \gamma_w D + \gamma_{sat} z$$

$$u = \gamma_w (D + z)$$

$$\sigma' = (\gamma_{sat} - \gamma_w) z$$

Force d'écoulement : boullance liquéfaction

- Écoulement vertical descendant



$$h \text{ (charge hydraulique)} = \frac{u_w}{\gamma_w} + z$$

$$i = -\frac{dh}{dz} = -\frac{1}{\gamma_w} \frac{du}{dz} + 1$$



$$\frac{du}{dz} = -i\gamma_w + \gamma_w$$

En intégrant entre la surface du sol et M, avec $i = \text{cte}$, et u_0 la pression à l'interface il vient :

$$u - u_0 = -i\gamma_w z + \gamma_w z \quad u_0 = \gamma_w D$$

$$\sigma' = (\gamma_{sat} - \gamma_w + i\gamma_w)z$$

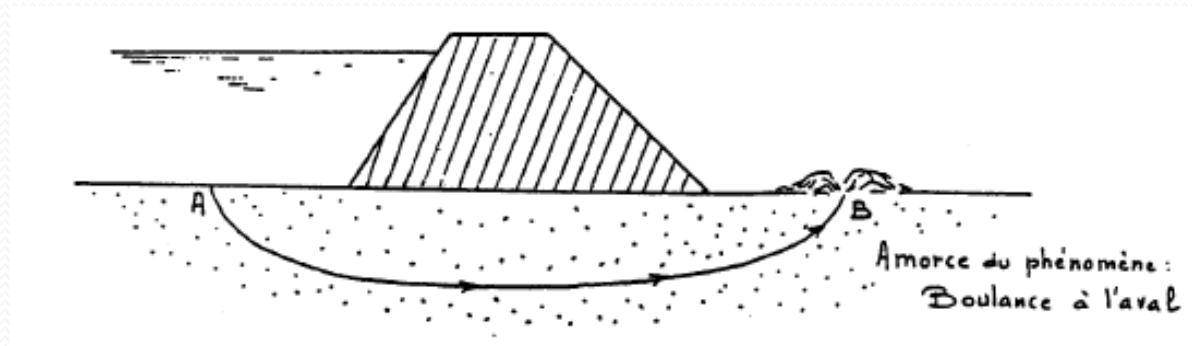
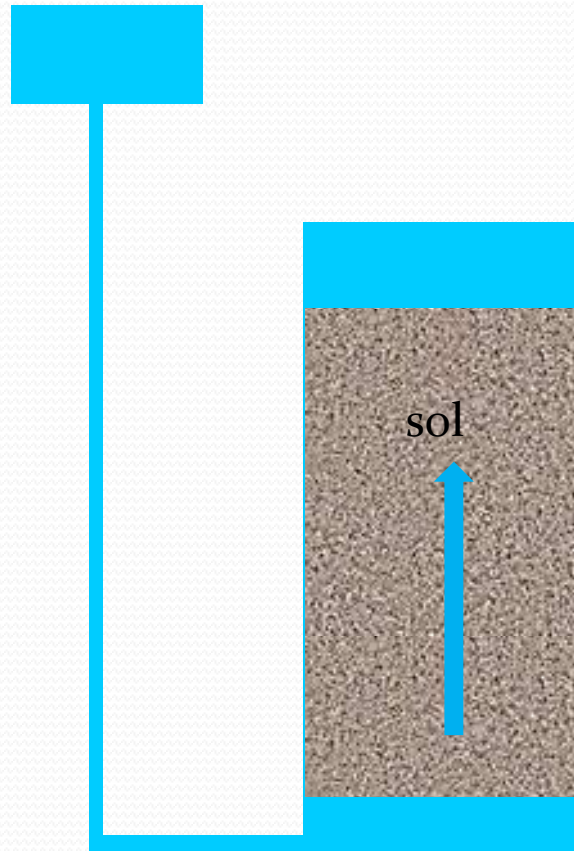
- Écoulement vertical descendant → augmentation contrainte effective

Force d'écoulement : boullance liquéfaction

- Cas d'un écoulement ascendant : $\sigma' = (\gamma_{sat} - \gamma_w - i\gamma_w)z$

$$\sigma' = 0$$

$$i_c = \frac{\gamma_{sat} - \gamma_w}{\gamma_w}$$



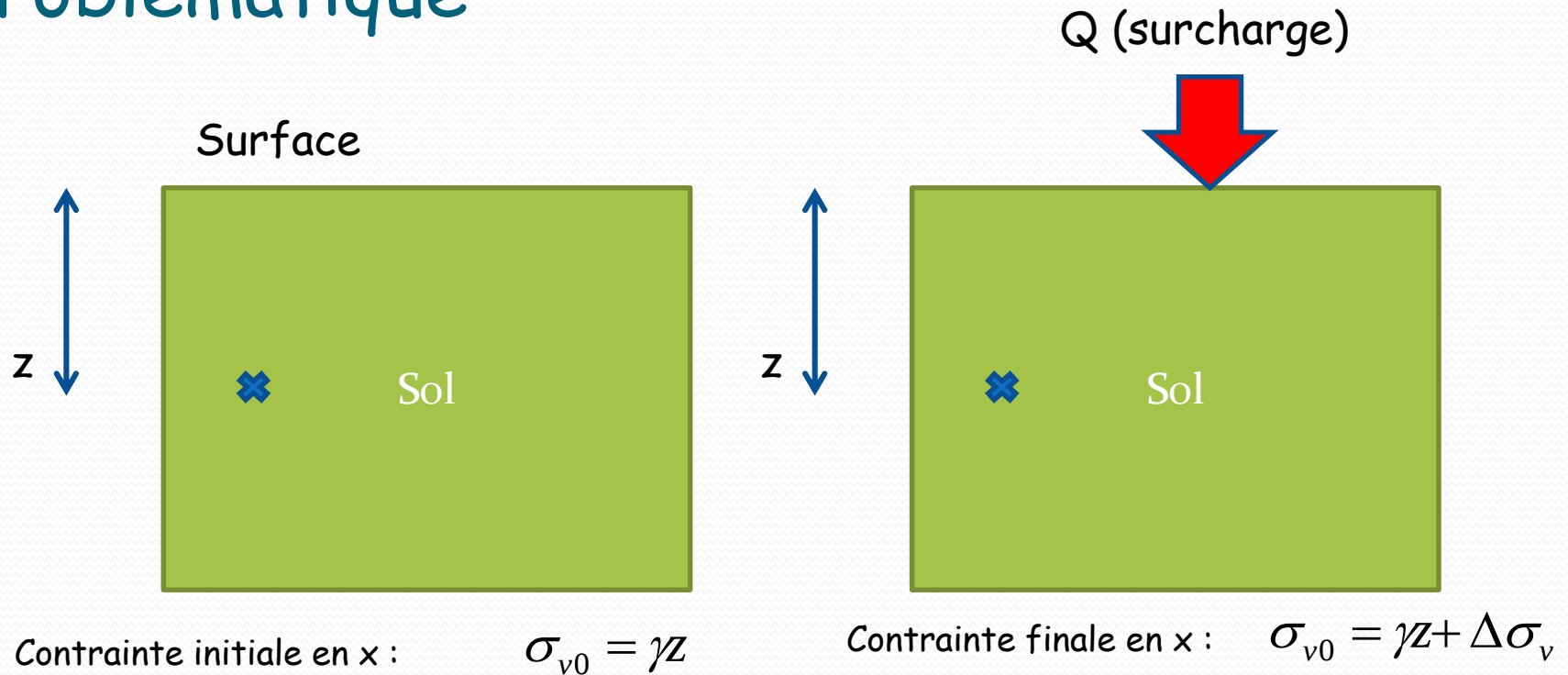
- Le sable « bouillonne » → phénomène de boullance

Exemples



Distribution des contraintes

Problématique



- Comment évaluer le supplément de contrainte $\Delta\sigma_v$ induit par la structure réalisée en surface à la profondeur z ?

Distribution des contraintes

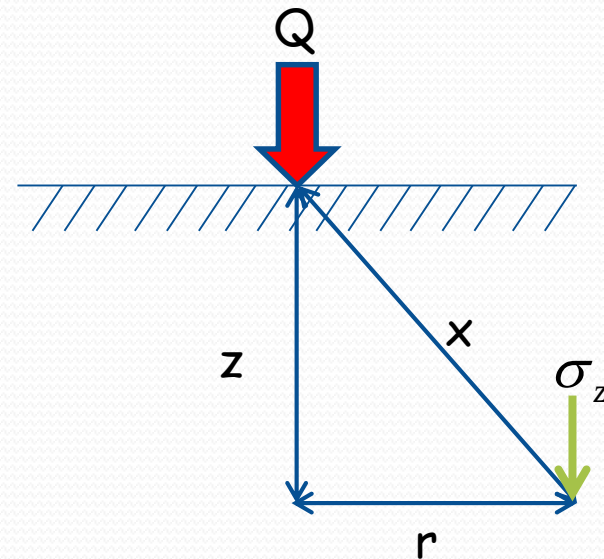
- Solution de Boussinesq (élasticité) : permet de déterminer la distribution des contraintes imposée par une charge ponctuelle (1/2 espace homogène, isotrope, élasticité linéaire)

$$\sigma_z = \frac{Q(3z^3)}{2\pi \left[z^2 \left(\frac{r^2}{z^2} + 1 \right) \right]^{5/2}}$$

$$\sigma_z = \frac{Q}{z^2} \frac{3/(2\pi)}{\left(\left(\frac{r}{z} \right)^2 + 1 \right)^{5/2}}$$

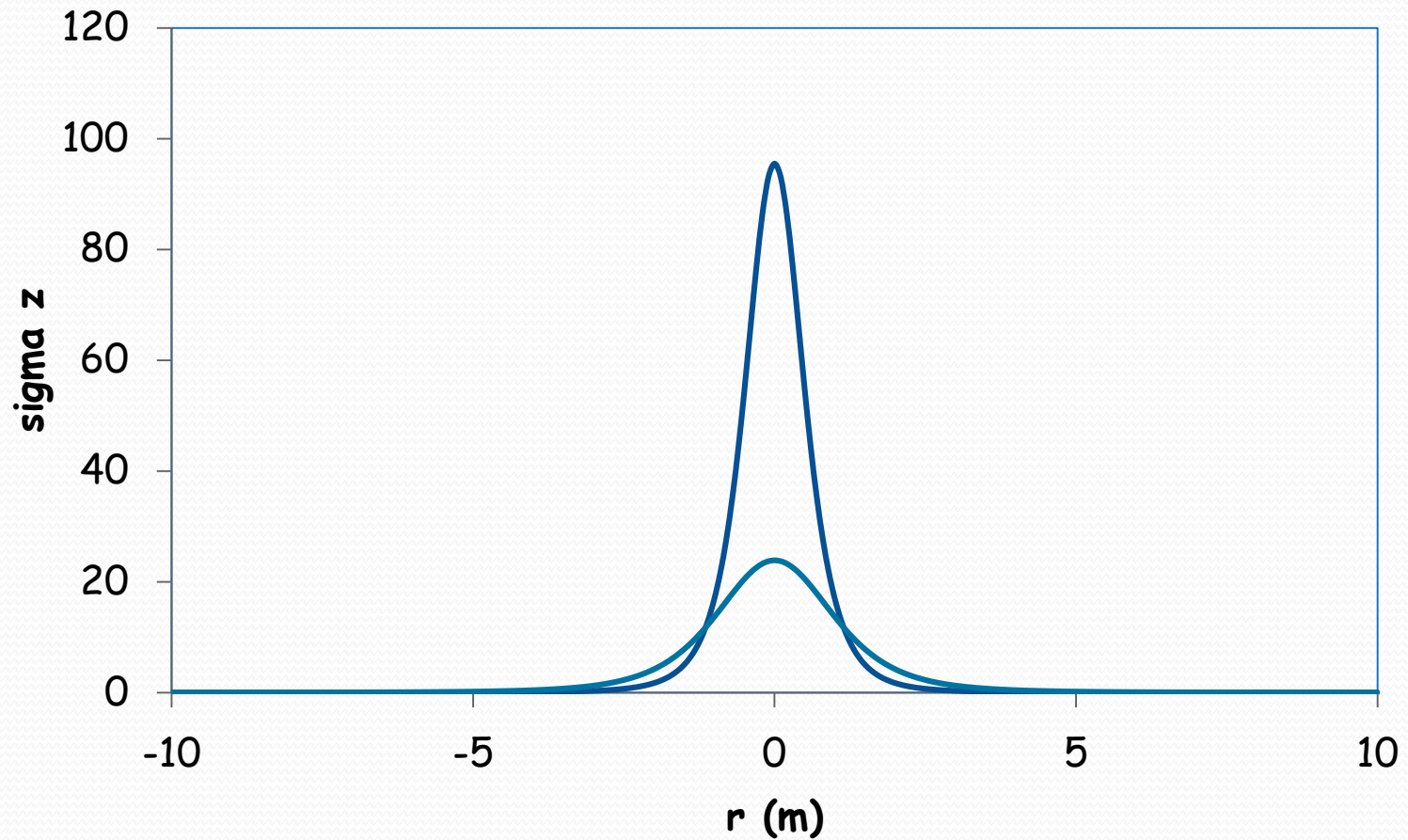
$$\sigma_z = \frac{Q}{z^2} N_B$$

$$N_B = \frac{3/(2\pi)}{\left(\left(\frac{r}{z} \right)^2 + 1 \right)^{5/2}}$$



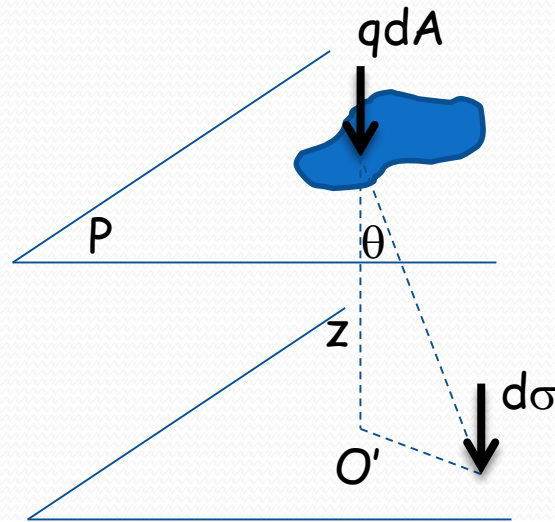
Distribution des contraintes

- Supplément de contrainte verticale à une profondeur z donnée ($Q = 200$ kN)



Contrainte sous une fondation (charge répartie)

- Pour obtenir le supplément de contrainte sous une charge répartie :



$$d\sigma_z = \frac{3qdA}{2\pi z^2} \cos^5 \theta$$

- On intègre sur la surface A

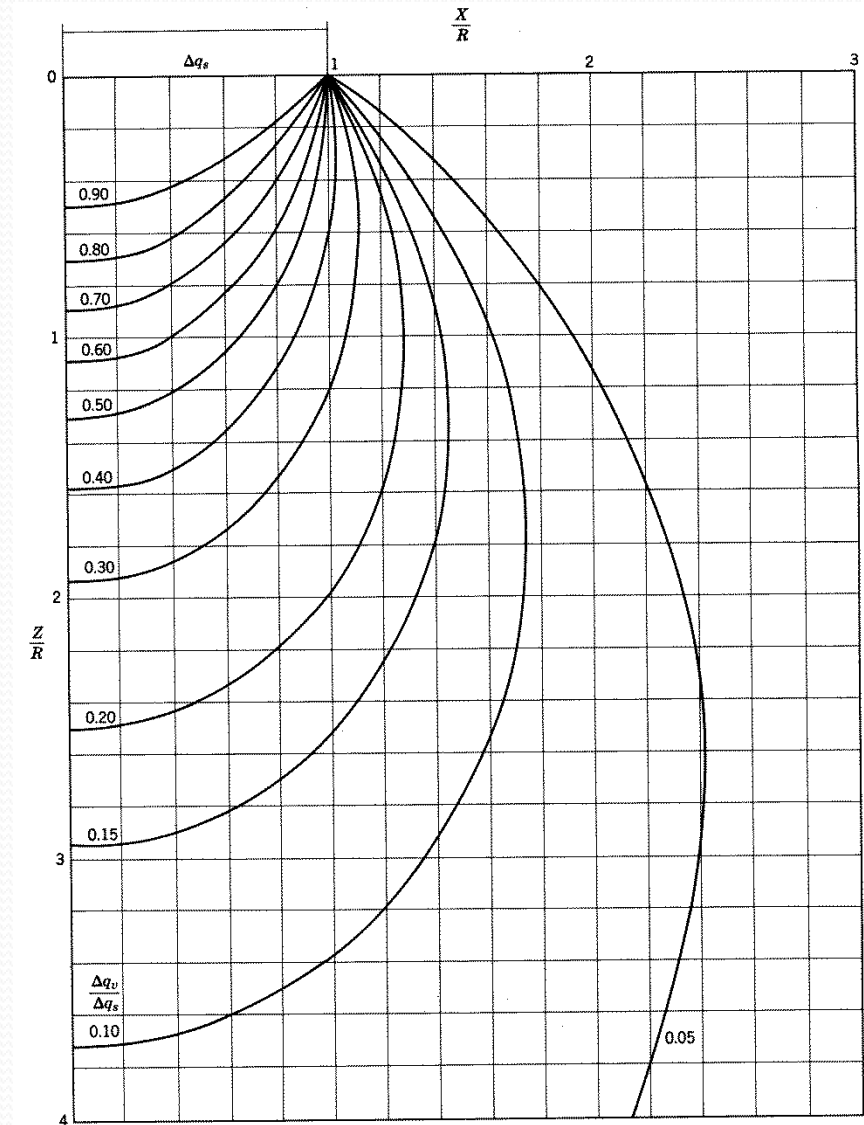
$$\sigma_z = \frac{3}{2\pi z^2} \int_A qdA \cos^5 \theta$$

Solution pour une surface circulaire

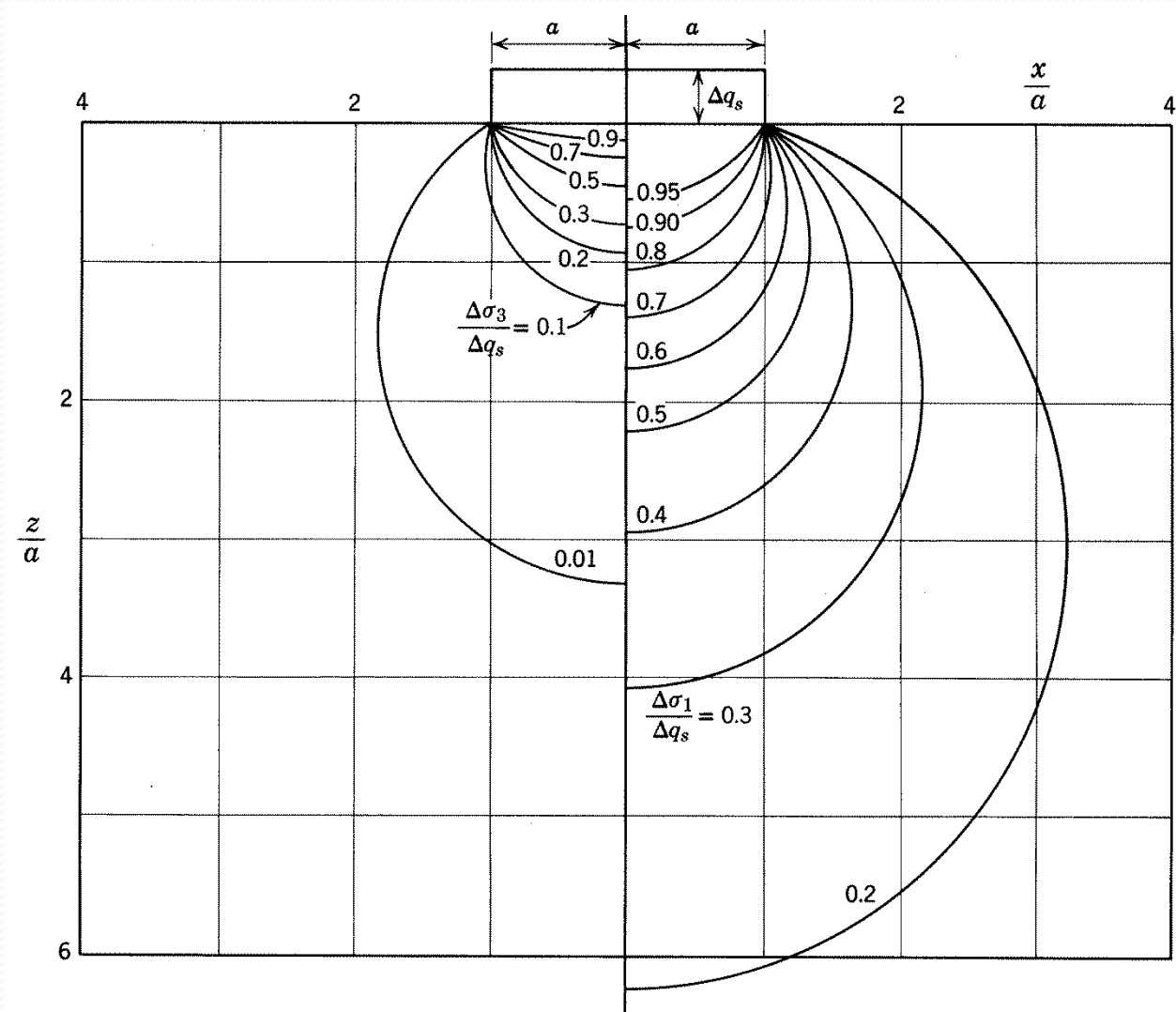
- Charge uniforme sur une surface circulaire de rayon r

Supplément de contrainte à $z = 2$ m pour une semelle de 4 m de diamètre (supplément de contrainte = 100 kPa) au centre ?

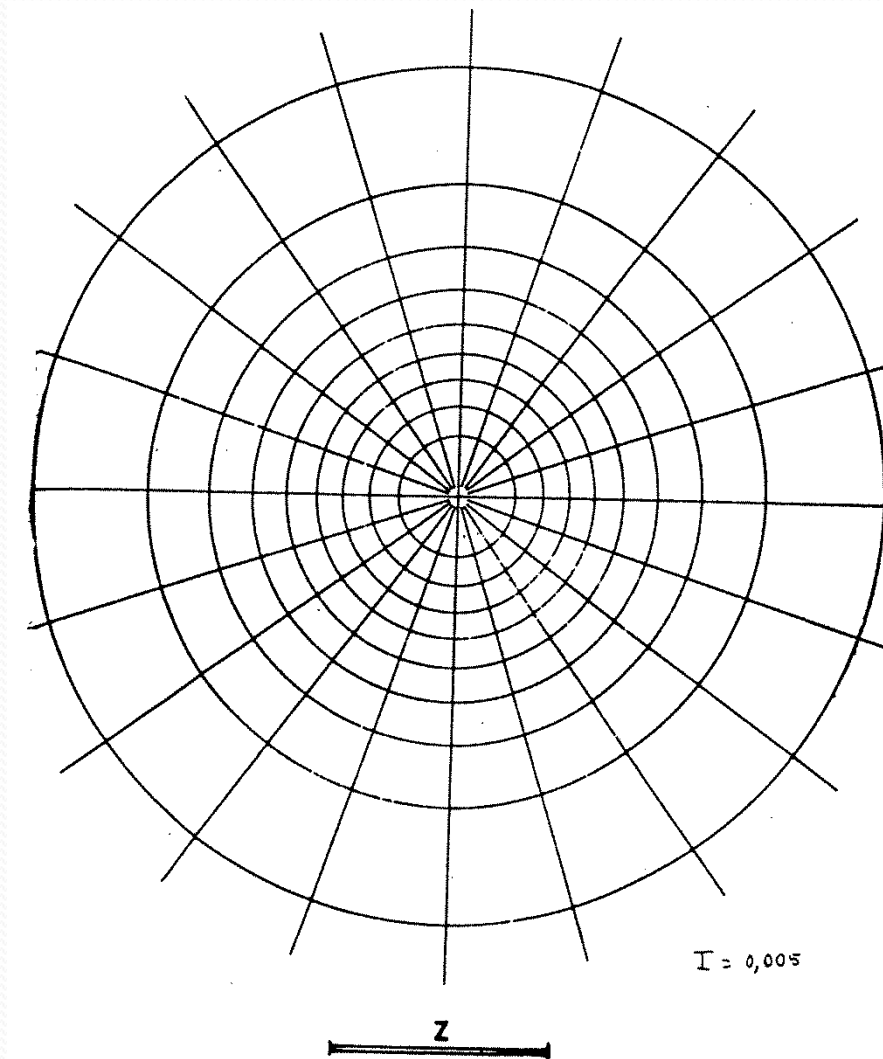
$z/R = 1 \rightarrow$ supplément = $0.64 \cdot 100$ kPa



Solution pour une surface rectangulaire infinie



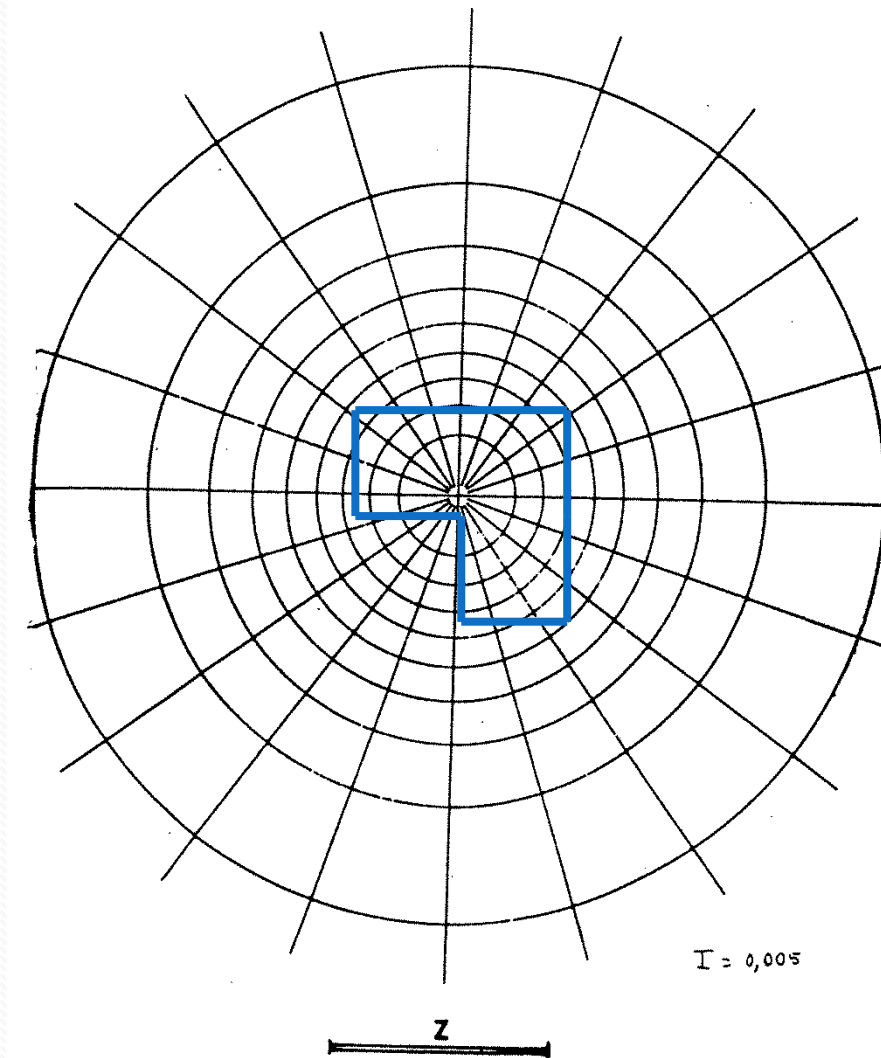
Semelle quelconque : abaque de Newmark



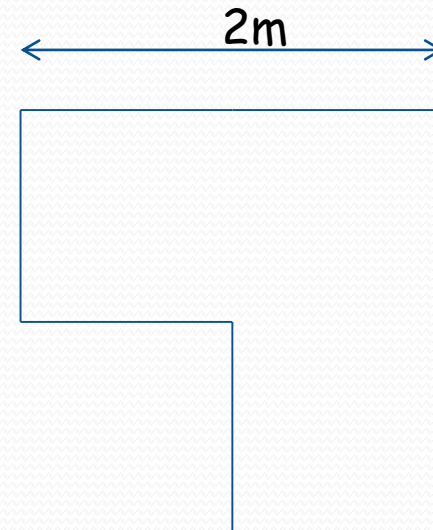
On dessine sur l'abaque le schéma de la fondation en respectant l'échelle, puis on compte le nombre de carreaux recouverts par le tracé.

Chaque carreau a un coefficient d'influence de 0,005.

Abaque de Newmark



Effort réparti induisant une
contrainte de 100 kPa
Contrainte verticale à $z = 2$ m ?



N carreaux = 56
Contrainte = $56 \cdot 0.005 \cdot 100 = 28$ kPa

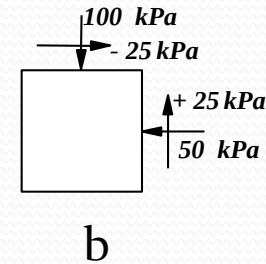
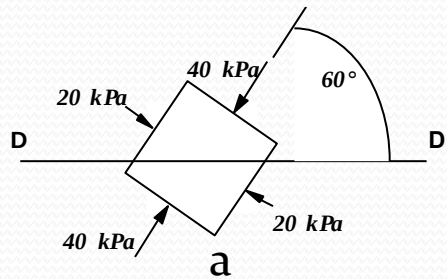
Exercices

Exercice 1 *Utilisation pratique de la représentation de Mohr.*

a) Soit, autour d'un point, l'état de contrainte défini pour les deux plans principaux (figure ci-dessous).

Déterminer la valeur σ_n et τ sur le plan DD. Solution graphique et analytique.

b) Connaissant autour du point M les valeurs des contraintes normales et tangentiels sur une facette verticale et sur une facette horizontale (figure ci-dessous), tracer le cercle de Mohr, déterminer les valeurs et l'orientation des contraintes principales.



Exercice 2 *Différence entre sol saturé et sol sous la nappe.*

Le niveau de la nappe dans une couche épaisse de sable très fin se trouve à 1,2 m au-dessous de la surface du sol. Au-dessus de la nappe, le sable est saturé par capillarité. $\gamma_{sat} = 20,4 \text{ kN/m}^3$, calculer σ_v , σ_v' et u sur un plan horizontal situé à 3,6 m de profondeur.

Exercice 3 *Rabattement de nappe et contrainte effective.*

On considère la coupe des sols représentée ci-dessous :

- de 0 à 1 m sable graveleux sec $\gamma_d = 18 \text{ kN/m}^3$; $\gamma_s = 27 \text{ kN/m}^3$
- de 1 à 6 m sable identique au précédent et saturé.
- de 6 à 10 m argile saturée $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$

Le niveau de la nappe est à 1 m au-dessous du niveau du terrain naturel.

Par suite de travaux, la nappe est rabattue jusqu'à la cote 5 m (on admet que le sol entre 1 et 5 m, présente une valeur moyenne de degré de saturation $S_r = 50\%$). Construire les diagrammes σ_v , σ_v' et u avant et après travaux (calculs aux cotes 1, 5, 6 et 10 m).

Exercice 6 *Contraintes verticales et horizontales dans un sol.*

Soit, un sol dont la coupe est la suivante :

- de 0 à 2m gravier $g = 19 \text{ kN/m}^3$ $K_0 = 0,4$
(à 2m niveau de la nappe)
- de 2 à 5m sable $g_{\text{sat}} = 20 \text{ kN/m}^3$ $K_0 = 0,5$
- de 5 à 7m argile molle $g_{\text{sat}} = 16 \text{ kN/m}^3$ $K_0 = 0,6$
- de 7 à 10m gravier $g_{\text{sat}} = 21 \text{ kN/m}^3$ $K_0 = 0,4$.

On rappelle que K_0 est le rapport. Construire en f de (z) le diagramme des contraintes totales et effectives et des pressions interstitielles (il est recommandé de faire les calculs à 2, 5, 7 et 10m).

Exercice 7 *équilibre ?*

On veut fonder un bâtiment sur une couche de sol compressible de poids volumique $g = 18 \text{ kN/m}^3$ (nappe à la surface du sol). Pour éviter ou essayer d'éviter les tassements, on souhaite maintenir à leur valeur initiale les contraintes dans le sol. Pour cela, on va enterrer la partie inférieure du bâtiment (qui sera étanche).

Si le bâtiment applique à sa base une contrainte verticale de 150 kPa, calculer la profondeur à laquelle il faudra le fonder.

Exercice 8 *Accident.*

Une grande fouille a été creusée dans une couche d'argile moyennement consistante ($g_{\text{sat}} = 17,6 \text{ kN/m}^3$). Quand la fouille atteint une profondeur de 7,6m, le fond de la fouille s'est soulevé et s'est fissuré puis a été envahi par un mélange d'eau et de sable. Des sondages réalisés après cet accident ont montré l'existence d'une couche de sable dont le toit est situé à 11,25 m de profondeur.

Calculer la cote que l'eau aurait atteinte dans un forage descendu jusqu'à la couche de sable avant le début des travaux.

