

$C_p - C_v = nR$ et $C_p/C_v = \gamma$; ($\gamma=1,4$ pour un gaz parfait diatomique, dépend de la température) ; ($\gamma=5/3$ pour un gaz parfait monoatomique, indépendant de la température)
 Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

Exercice 1.

On effectue de 3 manières différentes une compression qui amène un mélange air - essence de l'état 1 à l'état 2 avec :

état 1 : $P_1 = 1 \text{ bar}$ et $V_1 = 3 \text{ litres}$

état 2 : $P_2 = 3 \text{ bars}$ et $V_2 = 1 \text{ litres}$

La première évolution est isochore puis isobare, la deuxième est isobare puis isochore, la troisième est isotherme ($P.V = Cte$)

- Sachant que l'on a $\Delta U = C_V \Delta T$ pour ce gaz (10), calculez ΔU (variation d'énergie interne entre les états 1 et 2). **lire: $C_v \Delta T$**
- Calculez les travaux dans les 3 cas. Déduisez-en les chaleurs échangées : sont-elles reçues ou évacuées ?

Solution :

1.

ΔU ne dépend pas du chemin suivi, donc ΔU peut être calculée sur l'isotherme (c), en se souvenant que cela reste également vrai pour les transformations (a) et (b). On a donc $\Delta U = C_V \Delta T = C_V \times 0 = 0 \text{ J}$

2.

Il suffit de calculer les surfaces situées entre l'axe des abscisses et le trajet de la transformation.

$$W_a = P_2 \times (V_1 - V_2) \approx 3.10^5 \times (3.10^{-3} - 1.10^{-3}) \approx 600 \text{ J}$$

$$W_b = P_1 \times (V_1 - V_2) \approx 1.10^5 \times (3.10^{-3} - 1.10^{-3}) \approx 200 \text{ J}$$

$$W_c = - \int_{V_1}^{V_2} P.dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{C^{te}}{V}.dV = C^{te} [\ln V]_{V_1}^{V_2} \text{ (attention au signe), d'où } W_c = P_1.V_1 \left(\ln \frac{V_1}{V_2} \right)$$

$$\approx 1.10^5 \times 3.10^{-3} \times \ln \left(\frac{3.10^{-3}}{1.10^{-3}} \right) = 300 \ln 3 \approx 327 \text{ J}$$

On peut en déduire les chaleurs échangées car $W + Q = \Delta U = 0$ pour les 3 transformations. Ainsi :

$Q_a = -W_a \approx -600 \text{ J}$, $Q_b = -W_b \approx -200 \text{ J}$, $Q_c = -W_c \approx -327 \text{ J}$, le signe est négatif, donc ces chaleurs sont perdues par le gaz (qui s'échauffe donc)...on s'en doutait car quand on comprime un gaz avec une pompe à vélo on a une nette sensation de chaleur au niveau du doigt qui bouche l'évacuation d'air.

Exercice 2.

On réalise la compression isotherme d'une mole de gaz parfait contenu dans un cylindre de section S . On suppose que le poids du piston est négligeable devant les autres forces intervenant dans le problème. La température T_0 est maintenue constante par un thermostat. P_1 et P_2 sont les pressions initiale et finale. P_1 est la pression atmosphérique.

- Comment réaliser une compression isotherme ?
- Représenter graphiquement cette transformation en coordonnées (V , P).
- Calculer le travail fourni W_1 à une mole de gaz parfait.

On réalise maintenant cette compression brutalement; en posant sur le piston de section S une masse M calculée de telle sorte que la pression finale à l'équilibre soit P_2 à la température T_0 .

4. Discuter ce qui se passe.

5. Calculer le travail fourni W_2 à une mole de gaz parfait.

6. Représenter le travail fourni dans ces deux situations en traçant $y = W_1 / P_1 V_1$ et $y' = W_2 / P_2 V_2$ en fonction de $x = P_2 / P_1$. On vérifiera que le travail fourni au gaz dans la transformation brutale, décrite ici, est toujours supérieur au travail fourni lors de la compression isotherme quasi statique.

On effectue l'expérience en deux étapes successives: compression brutale de P_1 à $2P_1$ puis de $2P_1$ à P_2 , avec $P_1 < 2P_1 < P_2$.

7. Comparer avec les situations antérieures. Conclure.

Solution :

1. Réalisation d'une compression isotherme de la pression P_1 à la pression P_2 .

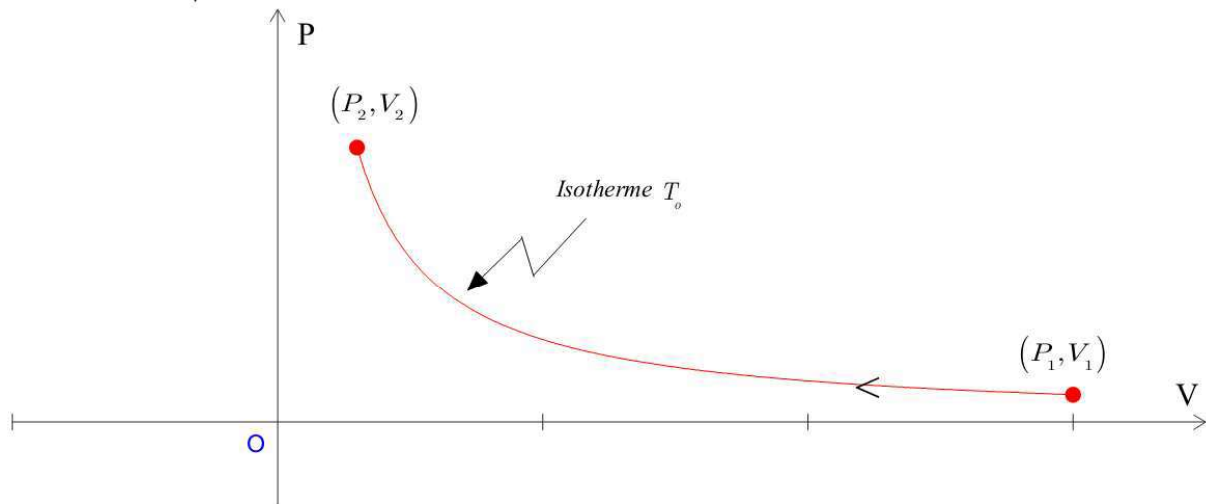
Une transformation isotherme est une transformation quasi statique et mécaniquement réversible au cours de laquelle la température du système est constante et égale à celle du milieu extérieur. Une transformation est quasi statique lorsqu'elle amène le système d'un état d'équilibre initial à un état d'équilibre final en le faisant passer par une succession continue d'états d'équilibre. Une transformation est dite mécaniquement réversible si elle est quasi statique et si en outre à chaque instant de l'évolution il y a équilibre mécanique entre le système considéré et l'extérieur avec lequel il est en contact. S'il y avait un équilibre parfait entre le système et le milieu extérieur il ne pourrait pas se produire de transformation : pour que celle-ci puisse exister il est donc nécessaire qu'il existe un très faible déséquilibre tel que si on le supprime, l'évolution progresse alors dans le sens contraire en repassant exactement par les mêmes états intermédiaires mécaniques. L'exercice étudie une compression isotherme d'un gaz parfait de la pression P_1 à la pression P_2 : à chaque étape de l'évolution, le travail mécanique fourni par l'extérieur au système doit être intégralement échangé par chaleur par le système avec l'extérieur (les parois du système sont nécessairement diathermanes). Pour que cet échange soit complet cela impose de procéder très lentement : on peut, par exemple, déposer très progressivement un à un des grains de sable sur le piston de telle manière à ce que la pression extérieure (et donc celle du système) passe de façon quasi continue de la pression P_1 à la pression P_2 .

2. Représentation graphique

Au cours d'une transformation isotherme à la température T_0 d'un gaz parfait, l'équation d'état permet d'écrire que :

$$PV = nRT_0 = Cste$$

$$P = \frac{Cste}{V}$$



3. Travail fourni.

On étudie le système constitué du cylindre, du piston sans masse et du gaz parfait.

Le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W_1 = -p_{\text{ext}} dV = \underset{\substack{\text{mécaniquement} \\ \text{réversible}}}{-p_{\text{gaz}}} dV = -nRT_o \frac{dV}{V}$$

Or :

$$PV = nRT_o = \text{Cste} \Rightarrow d(PV) = 0$$

$$PdV + VdP = 0$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$

On obtient ainsi :

$$\delta W_1 = -nRT_o \frac{dV}{V} = nRT_o \frac{dP}{P}$$

$$W_1 = \int_{P_1}^{P_2} nRT_o \frac{dP}{P} = nRT_o \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P}$$

$$W_1 = nRT_o \ln \frac{P_2}{P_1}$$

4. Caractéristiques de la transformation.

Il y a maintenant une descente brusque du piston. La transformation n'est plus mécaniquement réversible car la pression du gaz n'est pas définie au cours de l'évolution. Cette compression est non représentable par une courbe dans le diagramme P, V : seuls les points correspondant à l'état initial et l'état final peuvent y être figurés. Cependant la pression extérieure $P_2 = P_1 + (M \cdot g / S)$ et la température extérieure sont considérées comme constantes.

Le gaz subit une évolution monobare à la pression P_2 et monotherme à la température T_o .

5. Travail.

Le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W_2 = -P_{ext} dV \underset{\substack{\text{mécaniquement} \\ \text{réversible}}}{=} -P_2 dV$$

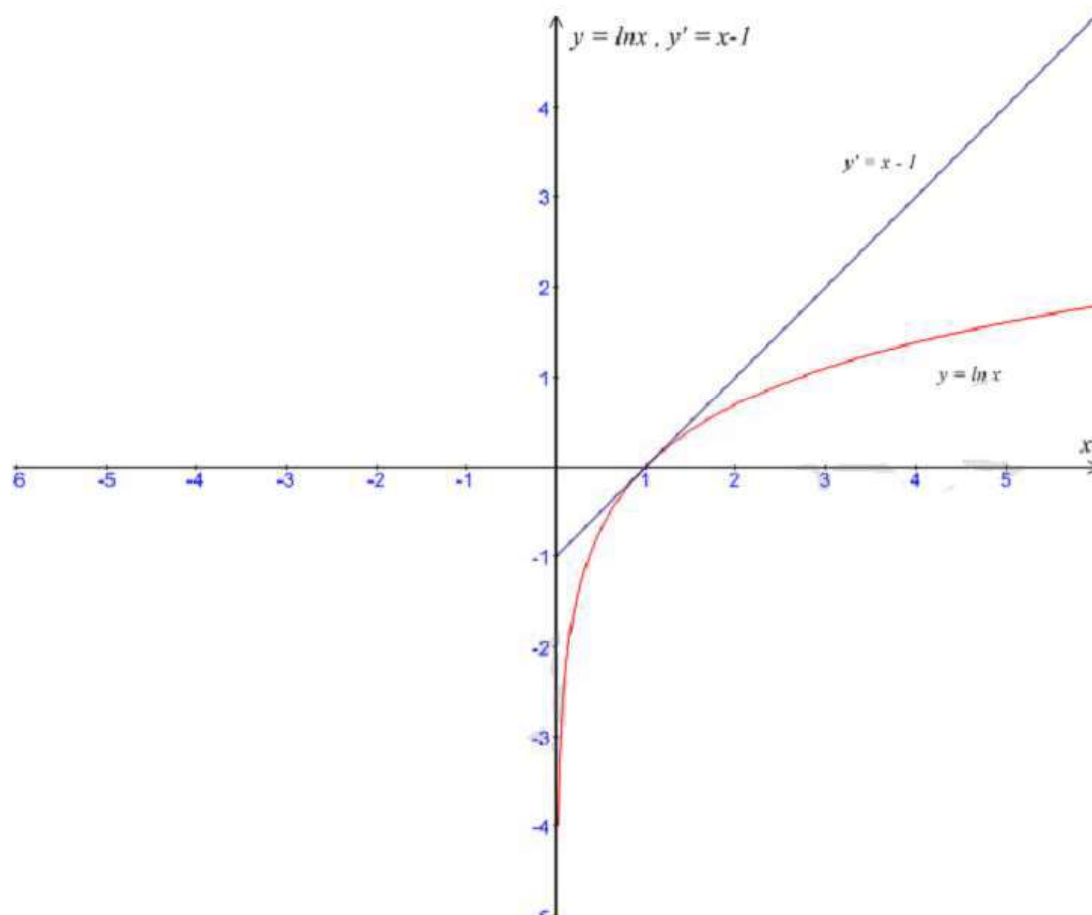
$$W_2 = -\int_{V_1}^{V_2} P_2 dV = -P_2 \int_{V_1}^{V_2} dV$$

$$W_2 = -P_2 (V_2 - V_1) = P_2 V_2 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right)$$

$$\boxed{W_2 = nRT_o \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right)}$$

6. Représentations graphiques.

On pose : $y = \frac{W_1}{nRT_o} = \ln \frac{P_2}{P_1} = \ln x$ et $y' = \frac{W_2}{nRT_o} = \frac{P_2}{P_1} - 1 = x - 1$



On peut remarquer que : $y' \geq y$. Le travail fourni lors de la compression isotherme qui est mécaniquement réversible est plus faible que celui fourni lors de la compression brutale qui n'est pas mécaniquement réversible

7. Compressions en deux étapes.

On calcule le travail total fourni au système lors d'une nouvelle compression effectuée de manière brutale mais cette fois en deux étapes successives.

Pour la première étape :

$$W = nRT_o \left(\frac{2P_1}{P_1} - 1 \right)$$

Pour la seconde étape :

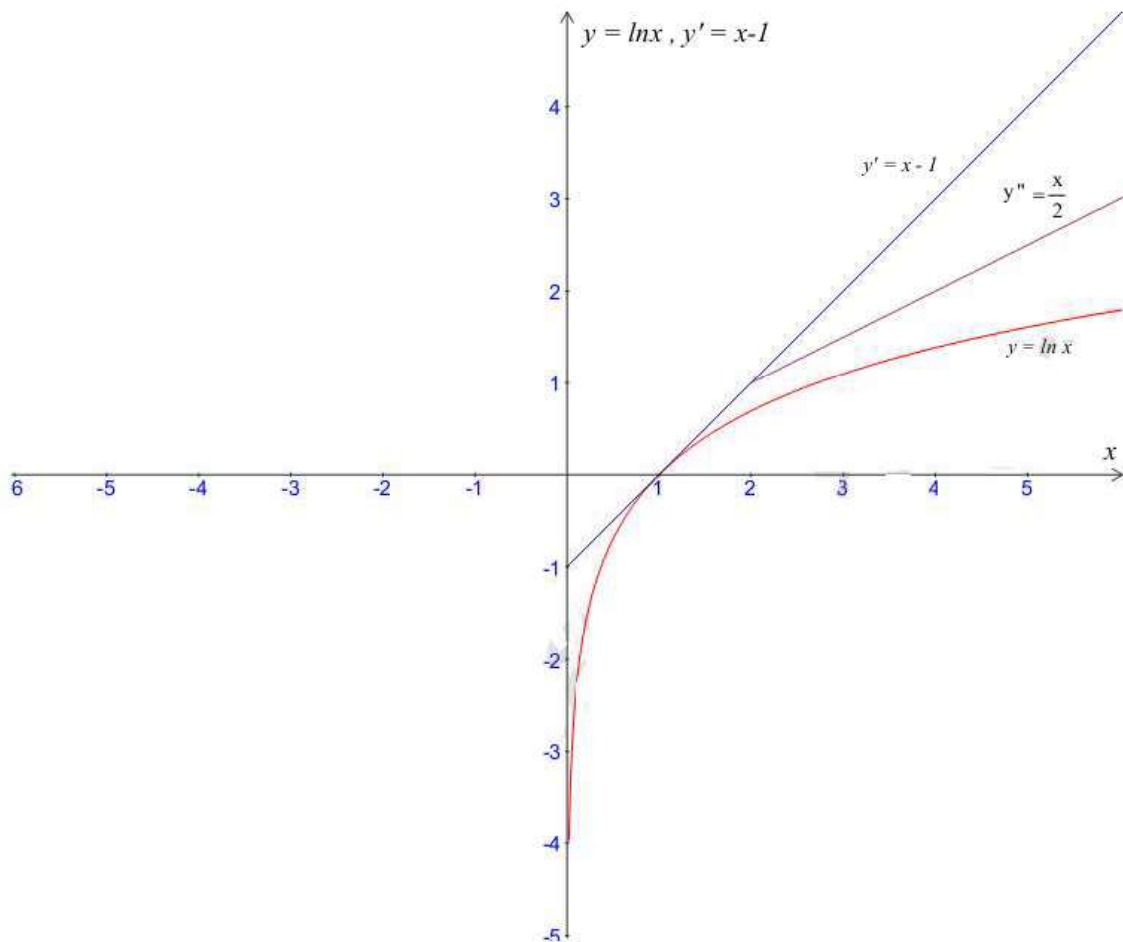
$$W' = nRT_o \left(\frac{P_2}{2P_1} - 1 \right)$$

Le travail total W_3 a pour expression :

$$W_3 = W + W' = nRT_o \frac{P_2}{2P_1}$$

Ce résultat correspond à la courbe $y'' = \frac{W_3}{nRT_o} = \frac{x}{2}$

La condition $P_2 > 2P_1$ implique $x > 2$. On ne trace alors que la partie $x > 2$ de la droite $y'' = \frac{x}{2}$.



On peut remarquer qu'opérer en deux étapes successives permet de se rapprocher de la courbe y , c'est-à-dire d'une transformation mécaniquement réversible

Exercice 3.

Une mole d'un gaz parfait est contenue dans un cylindre vertical comportant un piston mobile, de masse négligeable en contact avec une atmosphère extérieure à pression

constante $P_0 = 1,0$ bar et à la température $T_0 = 300$ K. Constante des gaz parfaits : $R = 8,31$ J.K⁻¹.mol⁻¹

1. On réalise la compression isotherme de ce gaz parfait. La température T_0 du gaz est maintenue constante grâce à l'atmosphère. On note $P_1 = 2,0$ bars la pression finale. Déterminer le travail W des forces de pression lors de cette évolution.

On réalise maintenant cette compression brutalement, en posant sur le piston de section S une masse M calculée de telle sorte que la pression finale à l'équilibre thermodynamique soit P_1 à la température T_0 .

2. Déterminer le travail W' des forces de pression lors de cette évolution.

3. Représenter le travail fourni dans ces deux situations en traçant $y = W/(nRT_0)$ et $y' = W'/(nRT_0)$ en fonction de $x = P_1/P_0$. On vérifiera que le travail fourni au gaz dans la transformation brutale, décrite ici, est toujours supérieur au travail fourni dans la compression isotherme.

4. Quelle est la chaleur échangée avec l'air dans les deux cas.

Solution :

1. Compression isotherme.

Lors d'une compression isotherme on a à chaque stade de la transformation :

$$T_{ex} = T_s = T_{gaz} = \text{cste}$$

$$p_{ex} = p_{gaz}$$

Le travail des forces de pression s'écrit alors :

$$W = - \int_1^2 p_{ex} dV = - \int_1^2 p_{gaz} dV$$

Le gaz étudié est supposé parfait, d'où :

$$p_{gaz} = \frac{nRT_0}{V}$$

$$W = - \int_1^2 \frac{nRT_0}{V} dV = nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W = nRT_0 \ln \frac{P_1}{P_0} \quad W = 1,7 \cdot 10^3 \text{ J}$$

2. Compression brutale.

Si à l'équilibre thermodynamique à l'état final la pression est égale à P_1 pour le gaz, cela veut dire que la pression extérieure lors de cette compression est justement P_1 et qui est constante.

$$W' = - \int_1^2 p_{ex} dV = - \int_1^2 p_1 dV = -p_1(V_1 - V_2)$$

$$W' = -p_1 V_1 \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right)$$

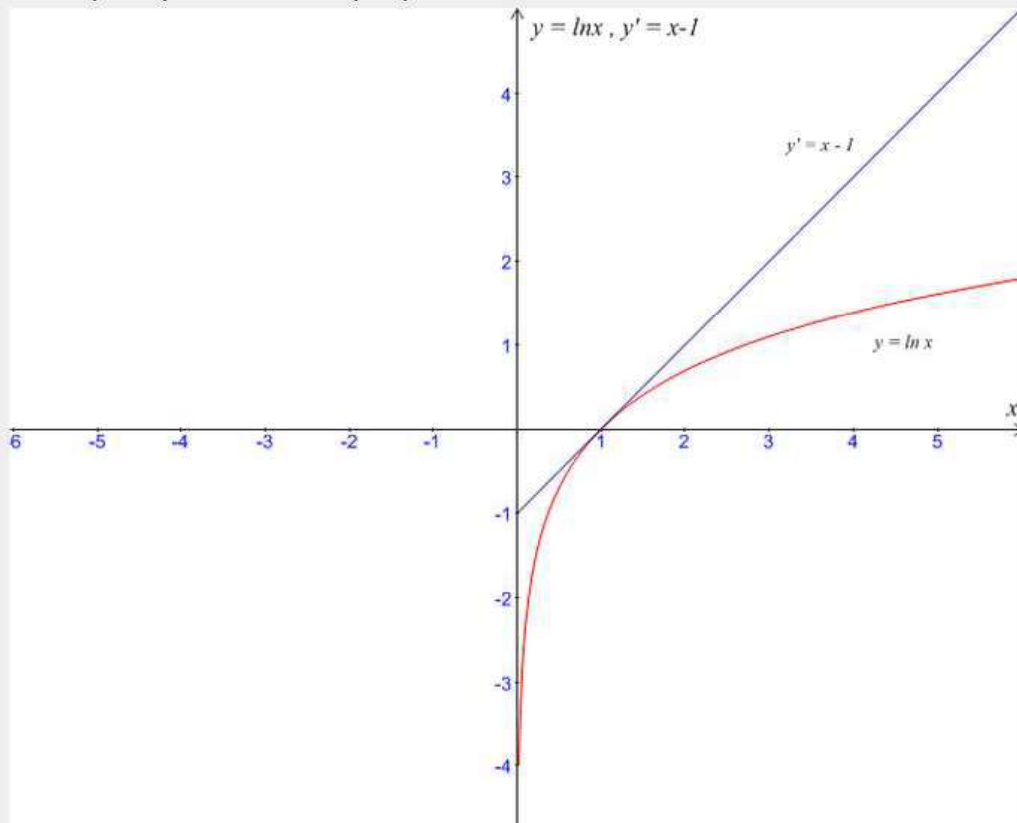
$$\text{Or } p_1 V_1 = nRT_0 \text{ et } p_2 V_2 = nRT_0 \text{ d'où :}$$

$$W' = -nRT_0 \left(1 - \frac{P_1}{P_0} \right)$$

$$W' = nRT_0 \left(\frac{P_1}{P_0} - 1 \right) \quad W' = 2,5 \cdot 10^3 \text{ J}$$

3. Représentation graphique.

On pose : $y = \frac{W}{nRT_o} = \ln \frac{P_1}{P_o} = \ln x$ et $y' = \frac{W'}{nRT_o} = \frac{P_1}{P_o} - 1 = x - 1$



On peut remarquer que : $y' \geq y$. Le travail fourni lors de la compression isotherme qui est mécaniquement réversible est plus faible que celui fourni lors de la compression brutale.

4. Chaleur échangée.

Dans les cas, la température finale du gaz parfait est la même que celle de son état initial. D'où :

$$\Delta U = W + Q = 0 \Rightarrow Q = -W$$

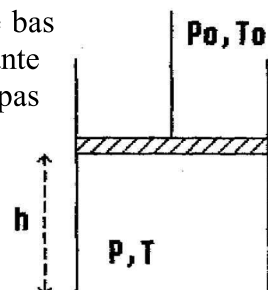
$$\Delta U = W' + Q' = 0 \Rightarrow Q' = -W'$$

Exercice 4.

Un cylindre de section s est fermé par un piston de masse négligeable et couissant sans frottement. Il contient un gaz parfait caractérisé par les trois variables d'état P, h, T . L'extérieur est l'atmosphère à la température T_o et à la pression P_o . Au départ le piston est en équilibre, et les paramètres initiaux du gaz parfait sont $T = T_o$ et $h = h_o$.

Un opérateur applique brusquement au piston une force dirigée vers le bas telle que la pression totale exercée sur le piston soit P_1 et soit constante lors de la transformation. La transformation est rapide et ne permet pas d'échanges de chaleur entre gaz parfait et milieu extérieur.

Exprimer la hauteur, notée h_f dans l'état final où l'équilibre mécanique est réalisé.



On donne : Gaz parfait monoatomique : $\gamma = 5/3$.

(On note gamma le rapport C_p / C_v)

Solution :

il faudra exprimer C_v en fonction de R et de gamma !

On considère le système formé de l'association du cylindre, du piston de poids négligeable devant les autres mises en jeu et du gaz que l'on suppose parfait.

Dans les états initial et final, il y a équilibre mécanique :

Etat initial : état (0) $(p_o, V_o = Sh_o, T_o)$

Etat final : état (1) $(p_1, V_1 = Sh_1, T_1)$

On applique le premier principe à ce système :

$$\Delta U = W + Q$$

Or $Q = 0$ car les parois sont athermanes, la transformation est donc adiabatique.

Comme le gaz est supposé parfait et que la transformation est monobare on a l'égalité suivante :

$$\Delta U = C_v(T_1 - T_o) = -p_1(V_1 - V_o)$$

$$\frac{nR}{\gamma - 1} \left(\frac{p_1 V_1}{nR} - \frac{p_o V_o}{nR} \right) = -p_1(V_1 - V_o)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} (p_1 h_1 - p_o h_o) = -p_1(h_1 - h_o)$$

En regroupant les termes on obtient :

$$h_1 = h_o \frac{p_o + (\gamma - 1) p_1}{\gamma p_1}$$

Exercice 5.

Un récipient de volume V_o , fermé par une vanne, dont les parois ainsi que la vanne sont supposés athermanes, est initialement vide. Il est placé dans l'air ambiant (assimilable à un gaz parfait) à température T_o et à la pression P_o . On ouvre la vanne, l'air pénètre très rapidement dans le récipient, on referme la vanne lorsque l'équilibre de pression est réalisé. L'air dans le récipient se retrouve dans un état d'équilibre à la température T_1

1. Calculer T_1 .

2. Calculer la variation d'énergie interne ΔU de l'air entré dans le récipient.

Données: $P_o = 10^5$ Pa, $V_o = 2,0$ L, $T_o = 300$ K et $\gamma = 1,4$.

Solution :

1. Détermination de la température.

On étudie le système fermé constitué du récipient et de la partie de l'air de volume V_o qui à l'instant initial se trouve dans l'atmosphère et qui par la suite rentre dans ce récipient de volume V_1 .

Comme la transformation est rapide et que le récipient possède des parois athermanes on peut la considérer comme adiabatique. Le premier principe s'écrit alors :

$$\Delta U = W = - \int_{V_i}^{V_f} p_{ext} dV$$

Comme la pression extérieure p_{ext} est constante et égale à P_o on obtient :

$$\Delta U = W = -P_o (V_f - V_i) = -P_o (V_1 - (V_1 + V_o))$$

$$\Delta U = W = P_o V_o$$

Comme l'air est assimilé à un gaz parfait on a :

$$P_o V_o = n R T_o$$

$$\Delta U = n C_{vm} \Delta T = n C_{vm} (T_1 - T_o)$$

Ce qui permet d'exprimer la température finale T_1 :

$$n C_{vm} (T_1 - T_o) = n R T_o$$

$$T_1 = \frac{R + C_{vm}}{C_{vm}} T_o$$

L'utilisation de la relation de Mayer $C_{pm} - C_{vm} = R$ donne :

$$T_1 = \frac{C_{pm}}{C_{vm}} T_o$$

$$\boxed{T_1 = \gamma T_o} \quad T_1 = 420 \text{ K}$$

2. Variation d'énergie interne.

On utilise l'équation d'état du gaz parfait :

$$P_o V_o = n R T_o$$

$$P_o V_1 = n R T_1 \rightarrow n R = \frac{P_o V_1}{T_1}$$

$$\Delta U = P_o V_o = n R T_o = \frac{P_o V_1}{T_1} T_o$$

$$\boxed{\Delta U = \frac{P_o V_1}{\gamma}} \quad \Delta U = 1,4 \cdot 10^2 \text{ J}$$

Exercice 6.

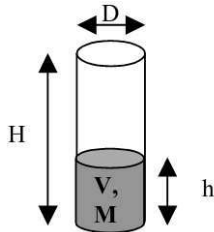
Un tube cylindrique de verre calorifugé a un diamètre $D \approx 3\text{cm}$, une hauteur $H \approx 1,1 \text{ m}$ et contient une masse $M \approx 1 \text{ kg}$ de mercure (masse volumique $\rho \approx 13600 \text{ kg.m}^{-3}$, chaleur massique $C \approx 138 \text{ J.kg}^{-1}$) à la température T_1 . Le tube étant vertical, on le retourne 50 fois et on constate que la température du mercure s'est élevée de ΔT .

1. Calculez le travail développé par la masse M de mercure (on donne l'accélération due à la pesanteur $g \approx 9,81 \text{ m.s}^{-2}$).

- Calculez alors la variation d'énergie interne du mercure.
- Calculez la variation de température ΔT sachant que toute le travail a servi à échauffer le mercure.

Solution :

1.



$W = M \cdot g \cdot (H - h) \times 50$ (travail de la force de pesanteur) $\Rightarrow$ déterminons alors h pour en déduire W .

On a $S = \pi \cdot (D/2)^2$, $\rho = M/V$ et $V = h \cdot S$, d'où $V = M/\rho = h \cdot S \Rightarrow h = M/(\rho \cdot S)$ et donc

$$h = \frac{M}{\rho \cdot \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{M}{\rho \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2} \approx 10,4 \text{ cm, on a alors } W = M \cdot g \cdot \left(H - \frac{M}{\rho \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2}\right) \times 50 \approx 488 \text{ J}$$

2.

$\Delta U = Q + W = W$ car $Q = 0$ (aucune chaleur échangée avec l'extérieur grâce aux parois calorifugées).

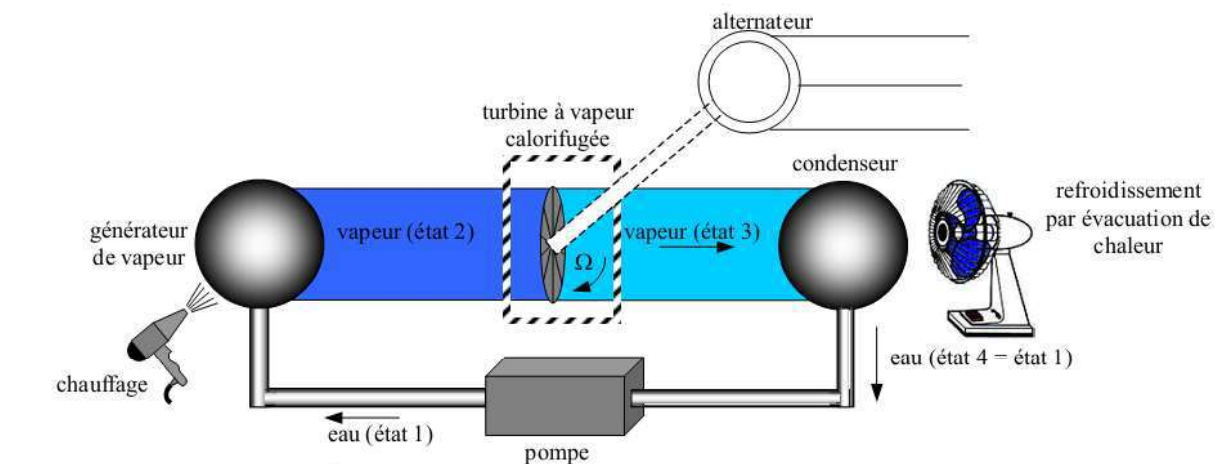
ainsi $\Delta U = W \approx 488 \text{ J}$

3.

La travail s'est transformé en chaleur grâce aux frottements (viscosité du mercure) : c'est tout simplement identique à l'expérience de Joule vue au cours n°1. Attention : cette chaleur reçue par le mercure n'est pas une chaleur échangée avec l'extérieur ($Q = 0$). On a finalement $W = Q_{\text{frottements}} = M \cdot C \cdot \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{W}{M \cdot C} = \frac{488}{1 \times 138} \approx 3,54 \text{ K}$ (ou $^{\circ}\text{C}$ puisque c'est une différence de température et donc l'unité K ou $^{\circ}\text{C}$ importe peu).

Exercice 7.

Une turbine à vapeur entraîne un alternateur. La vapeur d'eau sous pression entraîne les pals de la turbine qui se met à tourner et entraîne dans sa rotation le rotor de l'alternateur. L'installation est la suivante :



Le cycle décrit par $M = 1 \text{ kg}$ d'eau est le suivant : Le générateur de vapeur (parois indéformables) fournit $Q_{m1} \approx 2800 \text{ kJ / kg}$ de chaleur à l'eau qui se transforme alors en vapeur sous pression. Une valve de sortie du générateur de vapeur s'ouvre, la vapeur entraîne alors une turbine calorifugée, fournissant ainsi un travail à l'extérieur (la turbine). Cette vapeur, une fois son travail fourni, est récupérée dans un condenseur (11) (parois indéformables) qui la transforme à nouveau en eau grâce au refroidissement qui s'y opère. Cette vapeur liquéfiée (eau liquide) a cédé à l'extérieur (air ambiant) une quantité de chaleur de 1200 kJ/kg . L'eau a donc finalement décrit un cycle de transformations.

1. A l'aide du premier principe, calculez la variation d'énergie interne massique $(U_2 - U_1)/M$ et $(U_4 - U_3)/M$.
2. Sachant que l'eau décrit un cycle, déduisez- en la variation d'énergie interne massique $(U_3 - U_2)/M$ et le travail massique W_{23}/M qui est fourni à la turbine.
3. La turbine entraînant l'alternateur possède dans ce cas un débit massique $q_m = 4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculez la puissance P développée par la turbine (rappel : les watts sont des $\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$).

Solution :

1.

$\Delta U_{12} = Q_{12} + W_{12} = Q_{12}$ (parois indéformables, donc pas d'échange de travail avec l'extérieur).

$$\Rightarrow \Delta U_{12} = Q_{12} = M \times Q_{m1} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta U_{12}}{M} = Q_{m1}} \approx 2800 \text{ kJ / kg}$$

$$\Delta U_{34} = Q_{34} + W_{34} = Q_{34} \text{ (parois indéformables)} \Rightarrow \Delta U_{34} = Q_{34} = M \times (-1200) \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta U_{34}}{M}} \approx -1200 \text{ kJ/kg attention :}$$

chaleur cédée ! (signe négatif).

2.

$\Delta U_{\text{cycle}} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{34} = 0$ (puisque'il s'agit d'un cycle, la température initiale et la température finale du gaz n'a pas variée)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta U_{23}}{M} = \frac{-\Delta U_{12} - \Delta U_{34}}{M}} \approx -2800 + 1200 \approx -1600 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{De plus } W_{23} + Q_{23} = \Delta U_{23} \text{ or } Q_{23} = 0 \text{ (parois calorifugées)} \Rightarrow \boxed{\frac{W_{23}}{M} = \frac{\Delta U_{23}}{M}} \approx -1600 \text{ kJ / kg}$$

3.

l'énergie perdue entre l'état 2 et l'état 3 est perdue par le travail W_{23} , puisque ce ne peut pas être par la chaleur (parois calorifugées), grâce aux unités on peut retrouver la relation qui donne P :

$$P = q_m \times \frac{W_{23}}{M} \approx 4 \times (-1600 \cdot 10^3) = -6400 \text{ kW}$$

[kg.s⁻¹]

[J.kg⁻¹]

les unités suivent les mêmes règles
que les nombres : on retrouve bien
des J.s⁻¹, c'est - à - dire des Watt

Remarque 1 : en pratique on "oublie" le signe de la puissance, et on note plus volontiers 6400 kW

Remarque 2 : l'état 1 est identique à l'état 4 car la pompe effectue uniquement un travail de *transvasement* (voir cours) sans participer à la transformation de l'eau.

Exercice 8.

Une mole de gaz parfait à une température initiale de 298K se détend d'une pression de 5 atmosphères à une pression de 1 atmosphère. Dans chacun des cas suivants :

1. détente isotherme et réversible
2. détente isotherme et irréversible
3. détente adiabatique et réversible
4. détente adiabatique et irréversible

Calculer :

- a) la température finale du gaz
- b) la variation de l'énergie interne du gaz
- c) le travail effectué par le gaz
- d) la quantité de chaleur mise en jeu
- e) la variation d'enthalpie du gaz

On donne : $C_v = 3R/2$ et $C_p = 5R/2$

Remarque : Pour les cas des transformations adiabatiques réversibles et irréversibles (cas 3 et 4), on établira les relations servant aux calculs.

Solution :

1. Détente isotherme et réversible :

a) Température finale du gaz :

$$T_2 = T_1 = 298K \quad \text{transformation isotherme}$$

b) Variation de l'énergie interne du gaz pendant la détente isotherme :

$$\Delta U = 0 \quad \text{transformation isotherme}$$

c) Travail effectué par le gaz pendant la détente isotherme :

$$W_{rev}(1 \rightarrow 2) = -\int_1^2 P_{ext} dV = -\int_1^2 P_{gaz} dV = -\int_1^2 \frac{nRT}{V} dV = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W_{rev} = -\int_1^2 P_1 dV = nRT \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$W_{rev} = 8,31 \cdot 298 \ln 1/5$$

$$W_{rev}(1 \rightarrow 2) = -3985,6 \text{ J}$$

d) Quantité de chaleur Q mise en jeu pendant la détente isotherme :

$$\Delta U = Q + W \quad Q = -W \quad \text{puisque } \Delta U = 0$$

$$Q(1 \rightarrow 2) = 3985,6 \text{ J}$$

e) Variation d'enthalpie du gaz pendant la détente isotherme :

$$H = U + PV \Rightarrow dH = dU + d(PV)$$

$$\text{Or } d(PV) = 0 \text{ (détente isotherme)} \Rightarrow \Delta H = 0$$

2. Détente isotherme et irréversible

a) Température finale du gaz est :

$$T_2 = T_1 = 298\text{K (transformation isotherme)}$$

b) Variation de l'énergie interne du gaz pendant la détente isotherme irréversible :

$$\Delta U = 0 \text{ transformation isotherme}$$

c) Travail effectué par le gaz pendant la détente isotherme irréversible:

$$W_{\text{irrev}}(1 \rightarrow 2) = -\int_1^2 P_{\text{ext}} dV = -\int_1^2 P_{\text{gaz}} dV = -\int_1^2 P_{\text{final}} dV$$

$$= -P_{\text{final}} \int_1^2 dV = -P_2 (V_2 - V_1)$$

$$W_{\text{irrev}}(1 \rightarrow 2) = -P_2 (RT/P_2 - RT/P_1)$$

$$W_{\text{irrev}}(1 \rightarrow 2) = -1981 \text{ J}$$

d) Quantité de chaleur Q mise en jeu pendant la détente isotherme irréversible :

$$\Delta U = Q + W \quad Q = -W \text{ puisque } \Delta U = 0$$

$$Q = 1981 \text{ J}$$

e) Variation d'enthalpie du gaz pendant la détente isotherme irréversible :

$$\Delta H = 0 \text{ (détente isotherme)}$$

3. Détente adiabatique réversible

a) Température finale du gaz :

$$dU = C_v dT = \delta W + \delta Q \text{ car } \delta Q = 0$$

$$C_v dT = -P dV = -\frac{RT}{V} dV \text{ pour une mole}$$

$$C_v dT = -(C_p - C_v) T dV/V \text{ car pour un gaz parfait } C_p - C_v = R \text{ et } \gamma = C_p/C_v$$

$$dT/T = -((C_p - C_v)/C_v) dV/V = (1 - \gamma) dV/V$$

$$dT/T = (1 - \gamma) dV/V$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \quad (PV/R)V^{\gamma-1} = \text{constante}$$

$$PV^\gamma = R \text{ constante} \Rightarrow PV^\gamma = \text{constanté.}$$

b) En remplaçant V par $\frac{RT}{P}$, dans l'expression PV^γ , nous obtenons :

$$P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$$

$$\text{Soit } T_2 = T_1 (P_1/P_2)^{1/\gamma}$$

Pour le gaz monoatomique, nous avons : $C_v = 3R/2$ et $C_p = 5R/2 \Rightarrow \gamma = 5/3$

$$T_2 = T_1 (P_1/P_2)^{0.4} = 156,5 \text{ K}$$

c) La variation de l'énergie interne pour la détente adiabatique réversible est :

$$\Delta U = C_v (T_2 - T_1)$$

$$\Delta U = 3/2 (156,5 - 298) \cdot 8,31 = -1764 \text{ J.mol}^{-1}$$

d) La quantité de chaleur pour la détente adiabatique réversible est : $Q = 0$

e) Le travail mis en jeu pendant pour la détente adiabatique réversible est : $\Delta U = W$

$$W = -1764 \text{ J.mol}^{-1}$$

f) La variation d'enthalpie pour la détente adiabatique réversible est :

$$\Delta H = C_p (T_2 - T_1)$$

$$\Delta H = -2940 \text{ J.mol}^{-1}$$

4. Détente adiabatique irréversible

a) Température finale du gaz:

$$\delta Q = 0 \Rightarrow dU = \delta W \Rightarrow C_v dT = -P dV$$

$$C_v (T_2 - T_1) = -P_2 (V_2 - V_1) = -P_2 R (T_2/P_2 - T_1/P_1)$$

$$\Rightarrow T_2 = 203\text{K} \quad (T_{\text{ir}} > T_{\text{rev}})$$

b) La variation de l'énergie interne pour la détente adiabatique irréversible est : $\Delta U = C_v (T_2 - T_1)$

$$\Delta U = 3/2 \cdot 8,31 (203 - 298) = -1184 \text{ J.mol}^{-1}$$

c) La quantité de chaleur pour la détente adiabatique irréversible est :

$$Q = 0$$

d) Travail mis en jeu pour la détente adiabatique réversible

$$\Delta U = W + Q$$

$$\Delta U = W$$

$$W = -1184 \text{ J.mol}^{-1}$$

e) La variation d'enthalpie pour la détente adiabatique réversible est :

$$\Delta H = C_p (T_2 - T_1)$$

$$\Delta H = -1974 \text{ J.mol}^{-1}$$