

Matériaux composites

PARTIE 2 : Comportement mécanique des composites

Chapitre 4 : Rappels de mécanique des solides déformables

Tenseur des contraintes

I. Etat des contraintes dans un solide

L' état des contraintes en un point M d' un solide soumis à un chargement mécanique permet de caractériser les actions mécaniques exercées sur la matière en ce point.

1. Tenseur des contraintes

En tout point M d' un milieu continu, l' état des contraintes est entièrement déterminé par la connaissance du **tenseur des contraintes**, noté $\overline{\sigma}(M)$. Ce tenseur est symétrique et représenté par la matrice :

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Avec $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, $\sigma_{32} = \sigma_{23}$

Tenseur des contraintes

2. Force exercée en un point sur un élément de surface

L'action mécanique exercée sur la surface unité d'orientation $\vec{n}$ par la matière située du côté de l'orientation positive définie par $\vec{n}$ est une force dont la résultante $\vec{T}(M, \vec{n})$ appelé **vecteur des contraintes** s'exprime:

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{T} = \overline{\overline{\sigma}}(M) \cdot \vec{n}$$

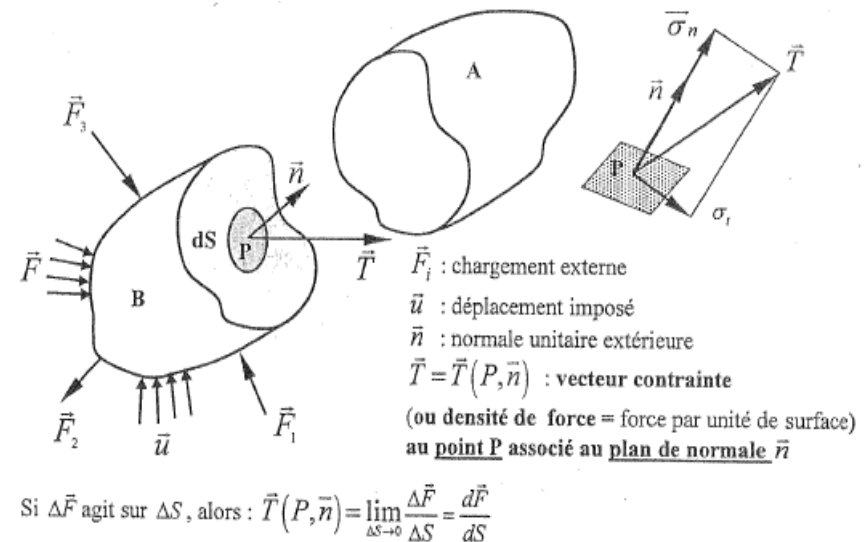
Sous forme matricielle

$$\vec{T} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \quad \vec{n} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \vec{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3$$

$$T_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3$$

$$T_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3$$



$\overline{\overline{\sigma}}(M)$ Contient toutes les informations pour exprimer le vecteur contrainte sur toutes surfaces de normale $\vec{n}$ au point M

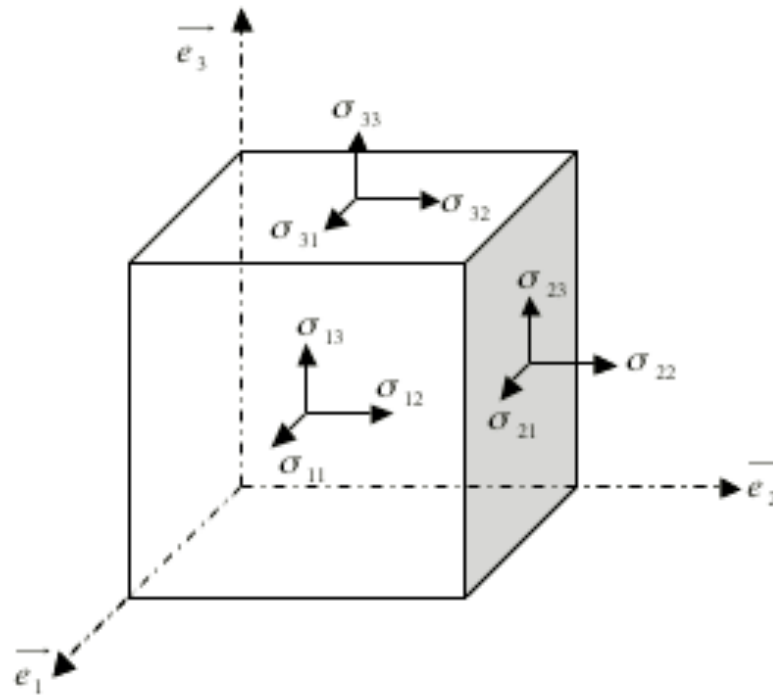
Tenseur des contraintes

II. Propriétés du tenseur des contraintes

1. Signification physique des composantes du tenseur

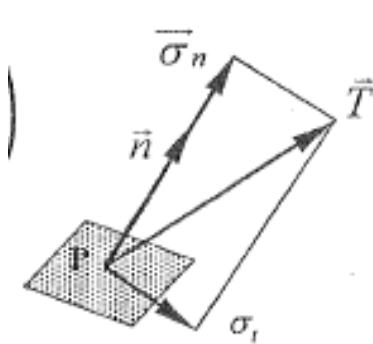
σ_{ij} est la **composante** sur $\vec{e}_i$ du **vecteur contrainte** de la face de normale $\vec{e}_j$

$$\begin{aligned} \vec{n} = \vec{e}_1 &\Rightarrow \vec{T}_1 \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} \\ \vec{n} = \vec{e}_2 &\Rightarrow \vec{T}_2 \begin{pmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \\ \vec{n} = \vec{e}_3 &\Rightarrow \vec{T}_3 \begin{pmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Tenseur des contraintes

2. Composantes normales et tangentielles du vecteur contrainte



Le vecteur contrainte $\vec{T}(P, \vec{n})$ est décomposé en :

- une **contrainte normale** $\vec{T}_n$ de direction $\vec{n}$
- une **contrainte tangentielle ou de cisaillement** $\vec{T}_t$ de direction contenue dans le plan vectoriel de l'élément de surface.



$$\vec{T} = \vec{T}_n + \vec{T}_t$$

$$T_n = \vec{n} \cdot \vec{T} = \vec{n} \cdot [\vec{\sigma} \cdot \vec{n}]$$



En notation indicielle $T_n = n_i \sigma_{ij} n_j$

En notation matricielle $T_n = n^t T = n^t \sigma n$

$$n^t = [n_1 \ n_2 \ n_3]$$

$$n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Tenseur des contraintes

2. Directions principales – contraintes principales

Il existe au moins une base dite **base principale** du tenseur des contraintes, dans laquelle la matrice représentant le tenseur est diagonale →

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{(3)} \end{pmatrix}$$

Contraintes principales: $\sigma^{(1)} \quad \sigma^{(2)} \quad \sigma^{(3)}$

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \sigma^{(1)} \quad \sigma^{(2)} \quad \sigma^{(3)} \quad \text{Solution de} \quad \det(\sigma - \lambda I) = 0$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} = 1 & \text{si } i = j \\ = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Symbole de Kronecker

Tenseur des contraintes

3. Etats particuliers de contraintes

a) *Tenseur sphérique et déviateur des contraintes*

$$\sigma(M) = \sigma_s(M) + \sigma_D(M)$$

Partie sphérique

$$\sigma_s(M) = \frac{s}{3} I$$

$$s = \text{trace}(\sigma(M))$$

Partie déviatorique

$$\sigma_D(M) = \sigma - \sigma_s(M) = \sigma - \frac{s}{3} I$$

Tenseur de trace nulle

Variation de volume

Tenseur des contraintes

b) Compression ou tension sphérique

Un état de contrainte en un point est un état de compression ou tension sphérique si le déviateur est le tenseur nul.

$$\sigma(M) = \sigma_s(M) = \frac{s}{3} I$$

Cet état est caractérisé par :

- le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ est colinéaire à $\vec{n}$
- les contraintes principales sont: $\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = s$

c) Traction ou compression simple dans une direction

2 contraintes principales sont nulles

Exemple: $\sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = 0$ ➔ Etat de contrainte uniaxiale dans la direction $\vec{e}_1$

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\sigma^{(1)} \geq 0$ Traction simple

Si $\sigma^{(1)} \leq 0$ compression simple

Tenseur des contraintes

d) Cisaillement simple

Exemple:

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Dans la base principale}$$

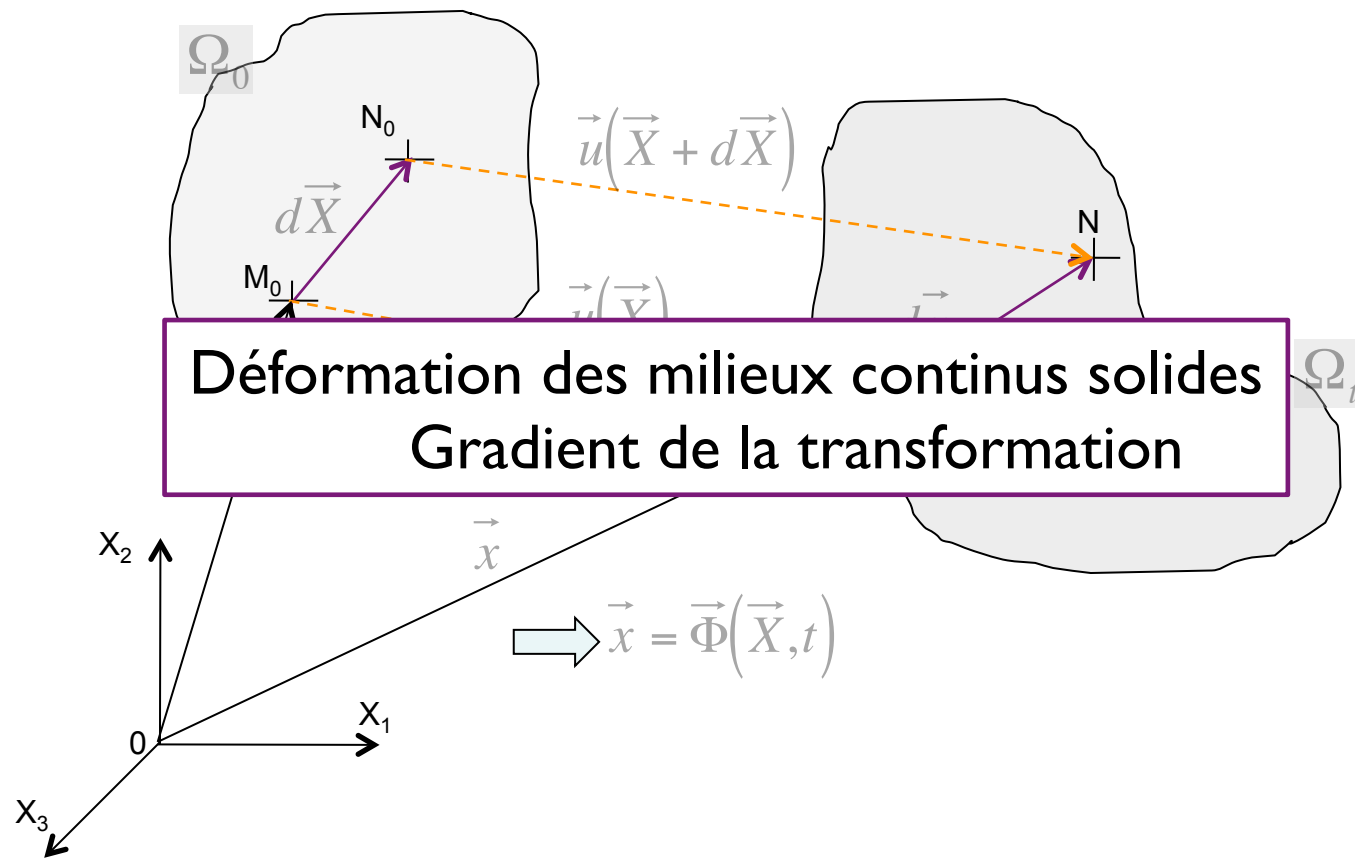
$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Dans une base quelle conque}$$

e) Etat de contraintes planes

Un état est un état de contraintes planes en un point si et seulement si, l'une des contraintes principales est nulle.

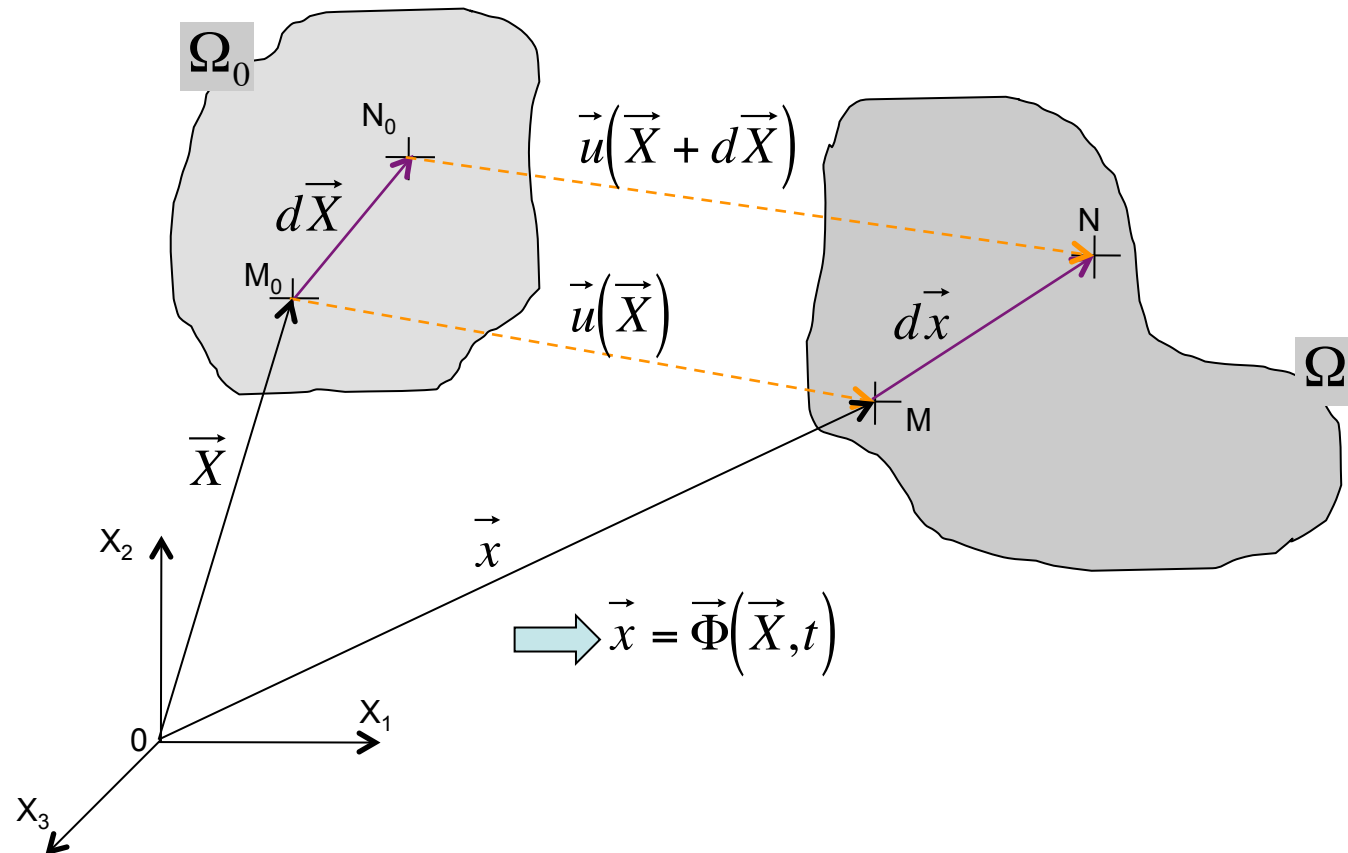
$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Dans une base quelle conque}$$

$$\text{Dans la base principale} \quad \sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Déformation des milieux continus solides Gradient de la transformation

On introduit une fonction vectorielle $\vec{\Phi}$ permettant de décrire le mouvement d'un milieu continu entre une configuration initiale (état non déformé) et une configuration actuelle (état déformé). On se propose de présenter les tenseurs permettant de décrire les déformations d'un milieu continu.



La transformation $\vec{\Phi}$ appliquée à Ω_0 est telle que pour tout point $M_0 \in \Omega_0$ repéré par le vecteur position $\vec{X} = \overrightarrow{OM_0}$ dans la base B , on a : $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{X}, t)$ avec $\vec{x} = \overrightarrow{OM}$.

Un déplacement de M_0 en M peut alors être défini de la façon suivante :

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{u}(\vec{X}, t) = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{x} - \vec{X}$$

On a donc :

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{\Phi}(\vec{X}, t) - \vec{X}$$

Gradient de la transformation

L'étude des déformations s'effectue donc en comparant les déplacements de deux points.

Considérons 2 points M_0 et N_0 de Ω_0 . On note :

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{X}$$

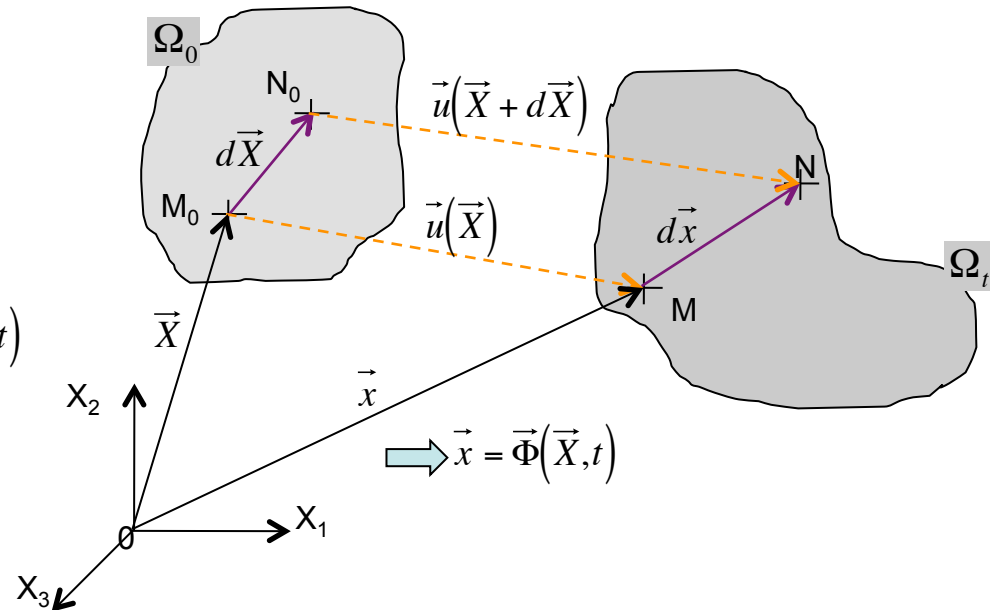
$$\overrightarrow{ON_0} = \vec{X} + d\vec{X}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{M_0N_0} = d\vec{X}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{x}$$

$$\overrightarrow{ON} = \vec{\Phi}(\vec{X} + d\vec{X}, t) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = d\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{X} + d\vec{X}, t) - \vec{\Phi}(\vec{X}, t)$$

$\overrightarrow{ON}$ est l'image de $\overrightarrow{ON_0}$ par l'application $\vec{\Phi}$



La transformation étant continue et différentiable en M_0 , on peut écrire :

$$\vec{\Phi}(\vec{X} + d\vec{X}, t) = \vec{\Phi}(\vec{X}, t) + \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{X}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X} + O(\varepsilon) \quad (\text{cf développement de Taylor})$$

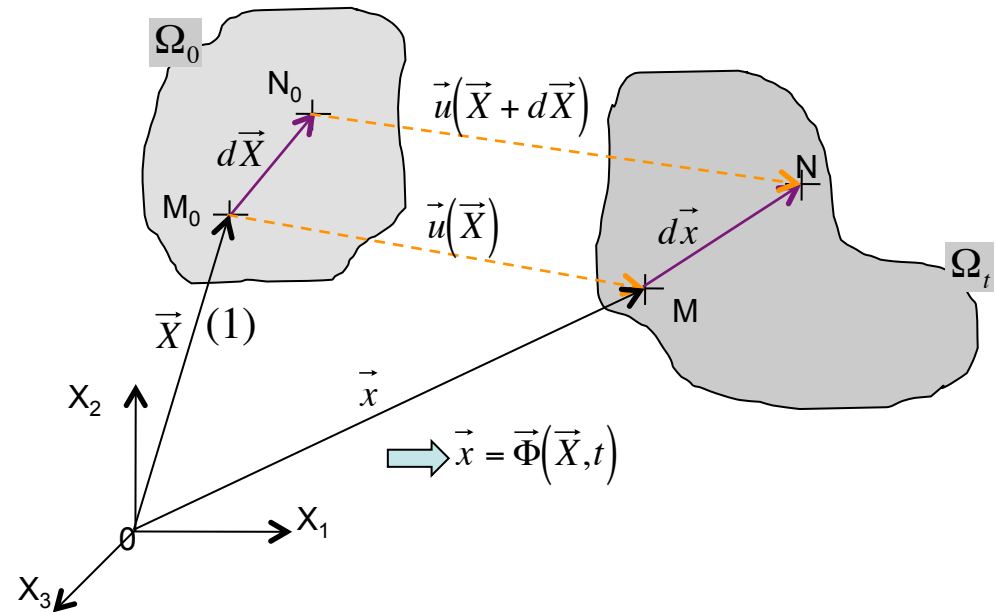
Cette application linéaire définit un tenseur d'ordre 2, $\underline{\underline{F}}$ dont les composantes sont :

$$F_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j}(\vec{X}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

Le tenseur $\underline{\underline{F}}$ est dénommé TENSEUR GRADIENT DE LA TRANSFORMATION

Gradient de la transformation

$$\vec{\Phi}(\vec{X} + d\vec{X}, t) = \vec{\Phi}(\vec{X}, t) + \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{X}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X} + O(\varepsilon)$$



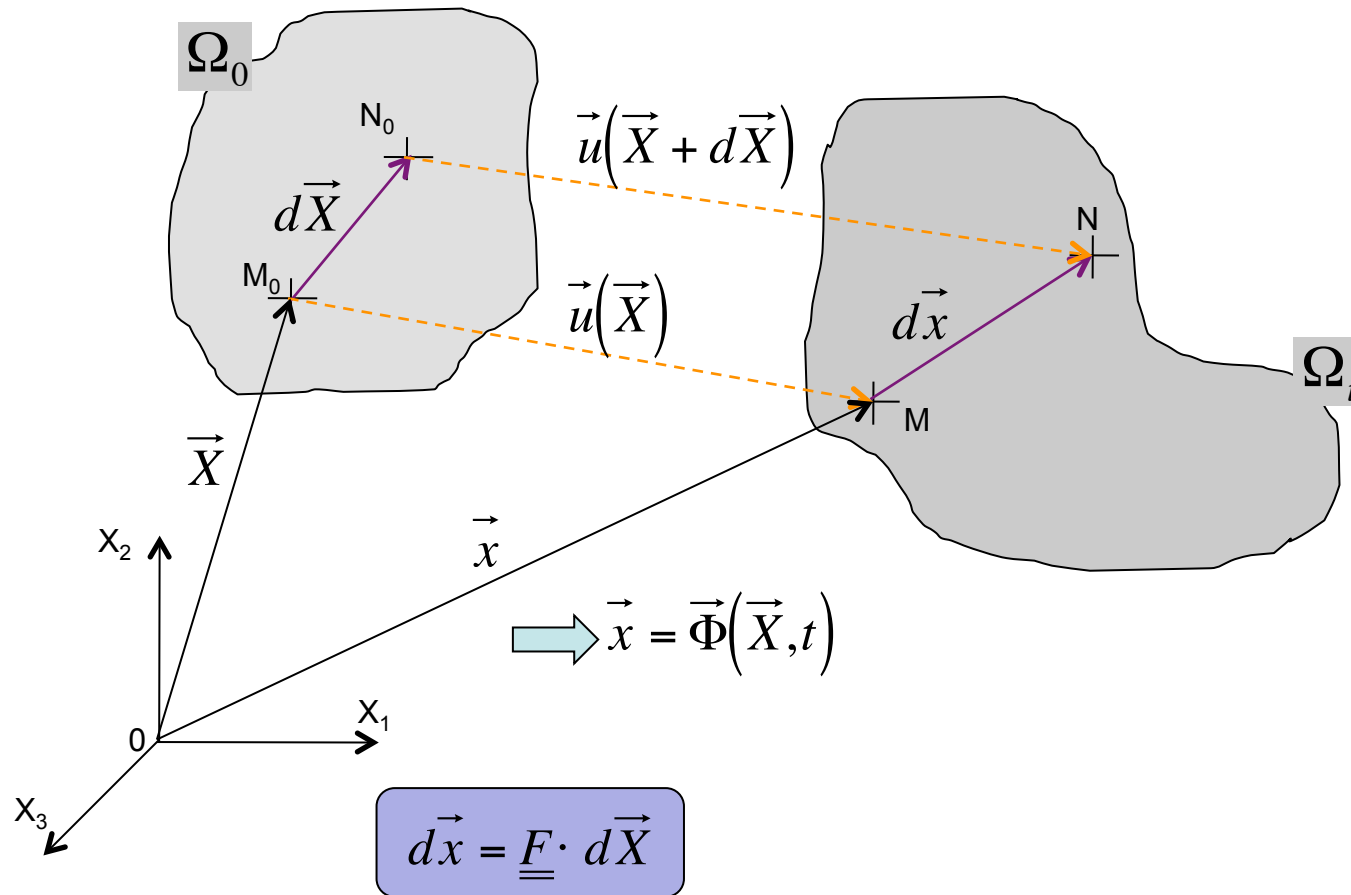
$\vec{\Phi}(\vec{X} + d\vec{X}, t)$ représente la transformée de $\overrightarrow{ON_0}$ c'est à dire $\overrightarrow{ON}$

$\vec{\Phi}(\vec{X}, t)$ représente la transformée de $\overrightarrow{OM_0}$ c'est à dire $\overrightarrow{OM}$

donc : $\vec{\Phi}(\vec{X} + d\vec{X}, t) - \vec{\Phi}(\vec{X}, t)$ représente $\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MN} = d\vec{x}$

et donc d'après la relation (1) $d\vec{x} = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{X}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X} \Rightarrow d\vec{x} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot d\vec{X}$

Donc $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ désigne le tenseur gradient de la transformation



$\underline{\underline{F}}$ désigne la matrice de transformation

La transformation est uniforme si $\underline{\underline{F}}$ ne dépend pas de $\vec{X}$

Dans ce cas, puisque $\underline{\underline{F}}$ ne dépend pas de $\vec{X}$, on peut écrire $\vec{x} = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{X}$

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X}$$

$$d\vec{u} = d\vec{x} - d\vec{X}$$

$$d\vec{u} = \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{X} - d\vec{X}$$

$$d\vec{u} = (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \cdot d\vec{X} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \cdot d\vec{X}$$

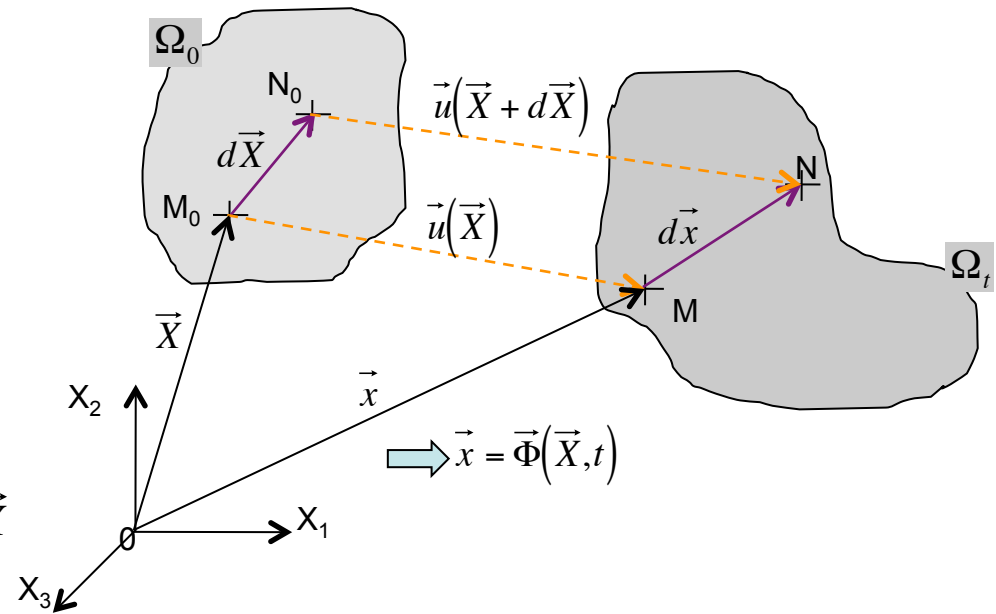
$$\Rightarrow \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}}$$

$$\|d\vec{x}\|^2 - \|d\vec{X}\|^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} - d\vec{X} \cdot d\vec{X} = {}^t d\vec{x} d\vec{x} - {}^t d\vec{X} d\vec{X}$$

$$\|d\vec{x}\|^2 - \|d\vec{X}\|^2 = {}^t d\vec{X} {}^t F F d\vec{X} - {}^t d\vec{X} d\vec{X}$$

$$\|d\vec{x}\|^2 - \|d\vec{X}\|^2 = {}^t d\vec{X} ({}^t F F - I) d\vec{X}$$

$$\|d\vec{x}\|^2 - \|d\vec{X}\|^2 = 2 {}^t d\vec{X} \left[\frac{1}{2} ({}^t F F - I) \right] d\vec{X}$$



$$E = \frac{1}{2} ({}^t F F - I) \quad \text{tenseur de déformations de Green - Lagrange}$$

$$\text{or } \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \Rightarrow E = \frac{1}{2} \left[\left(\underline{\underline{I}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \right) \left(\underline{\underline{I}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \right) - I \right] \Rightarrow E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right] \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right]$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1(1 + \lambda) \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

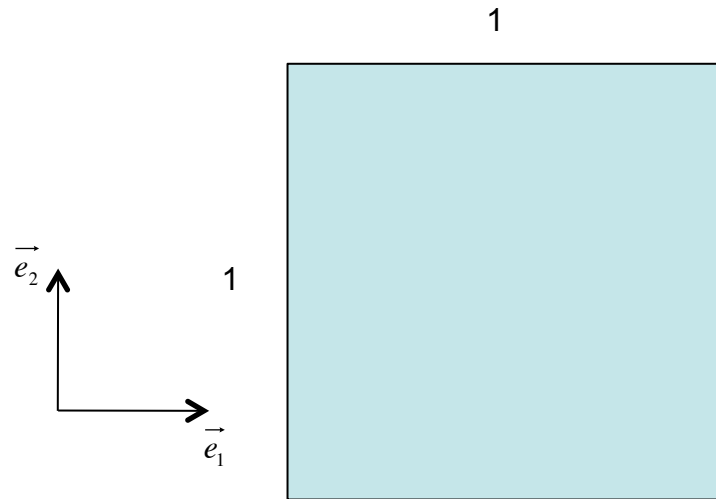
$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \gamma X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Calculer le vecteur déplacement $\vec{u}$

Calculer le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$

S'agit il d'une transformation homogène ?

Ω_0 étant un carré de côté 1, déterminer Ω_t



Exercice:

Un corps subit une déformation telle que:

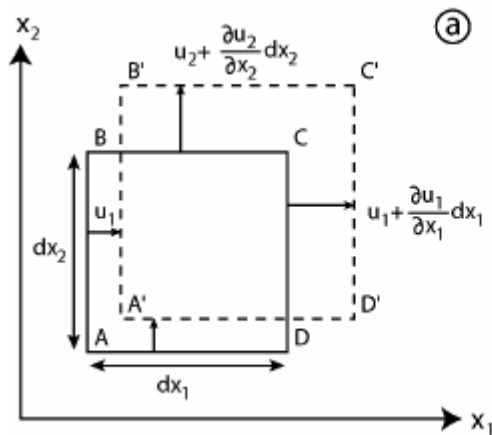
$$\begin{cases} x_1 = a_1(X_1 + \alpha X_2) \\ x_2 = a_2 X_2 \\ x_3 = a_3 X_3 \end{cases}$$

Où a_1 , a_2 , a_3 , α sont des constantes.

Calculer le tenseur des déformations à partir du vecteur déplacement, donner son expression en petites déformations.

Tenseur des petites déformations

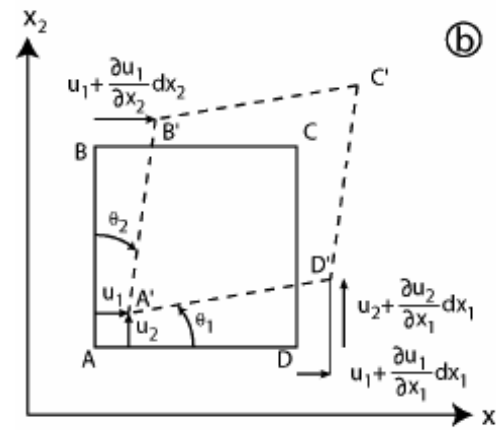
Signification des coefficients ε_{ij}



$$\varepsilon_{11} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \right) - u_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

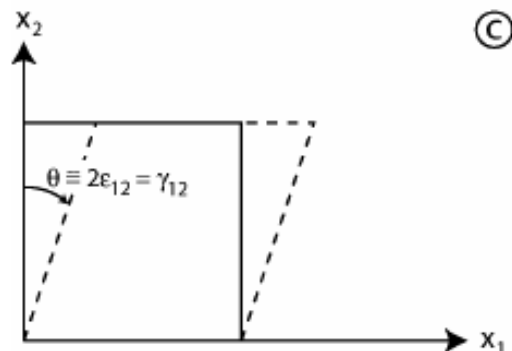
Allongements unitaires



$$\theta_1 \cong \tan \theta_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$\theta_2 \cong \tan \theta_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$



$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

$$\theta \equiv 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12}$$

Tenseur des déformations

Directions principales – contraintes principales

Il existe au moins une base dite **base principale** du tenseur des déformations, dans laquelle la matrice représentant le tenseur est diagonale →

$$\varepsilon(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{(3)} \end{pmatrix}$$

Déformations principales $\varepsilon^{(1)} \quad \varepsilon^{(2)} \quad \varepsilon^{(3)}$

$$\varepsilon(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \varepsilon^{(1)} \quad \varepsilon^{(2)} \quad \varepsilon^{(3)} \quad \text{Solution de} \quad \det(\varepsilon - \lambda I) = 0$$

Tenseur des petites déformations

Etats particuliers de contraintes

1. Tenseur sphérique et déviateur des contraintes

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_S(M) + \varepsilon_D(M)$$

Partie sphérique

$$\varepsilon_S(M) = \frac{e}{3} I$$

$$s = \text{trace}(\varepsilon(M))$$

Variation de volume

Partie déviatorique

$$\varepsilon_D(M) = \varepsilon - \varepsilon_S(M) = \varepsilon - \frac{e}{3} I$$

Tenseur de trace nulle

Tenseur des petites déformations

2. Etats particuliers

a) Dilatation uniforme

Un état de déformation en un point est un état de Dilatation uniforme si le déviateur est le tenseur nul.

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_s(M) = \frac{e}{3} I$$

Les déformations sont égales quelle que soit la direction

b) Déformation uniaxiale

2 déformations principales sont nulles

Exemple: $\sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = 0 \rightarrow$ Etat de déformation uniaxiale dans la direction $\vec{e}_1$

$$\varepsilon(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenseur des contraintes

c) Glissement simple

Exemple:

$$\varepsilon(M) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Dans la base principale}$$

$$\varepsilon(M) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Dans une base quelle conque}$$

d) Etat de contraintes planes

Un état est un état de déformations planes en un point si et seulement si, l'une des déformations principales est nulle.

$$\varepsilon(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Dans une base quelle conque}$$

$$\text{Dans la base principale} \quad \varepsilon(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notations matricielles de l'ingénieur (de Voigt)

La symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations ramènent à 6 le nombre de composantes nécessaires pour définir ces tenseurs

→ utilisation d'une notation consistant à remplacer les tableaux matriciels des 9 composantes des tenseurs par des matrices colonne à 6 composantes.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Cette notation permet de condenser l'écriture des relations d'élasticité

Loi de comportement

I. Généralités

Les lois de comportement des milieux sont celles qui définissent les relations entre déformations et contraintes.

Comportements solides:

On observe généralement:

- un comportement élastique, c'est-à-dire avec un retour à l'état initial quand la charge est supprimée,
- un comportement plastique avec des déformations plus importantes et une déformation résiduelle quand la charge est supprimée.

Comportements fluides (liquides et gaz):

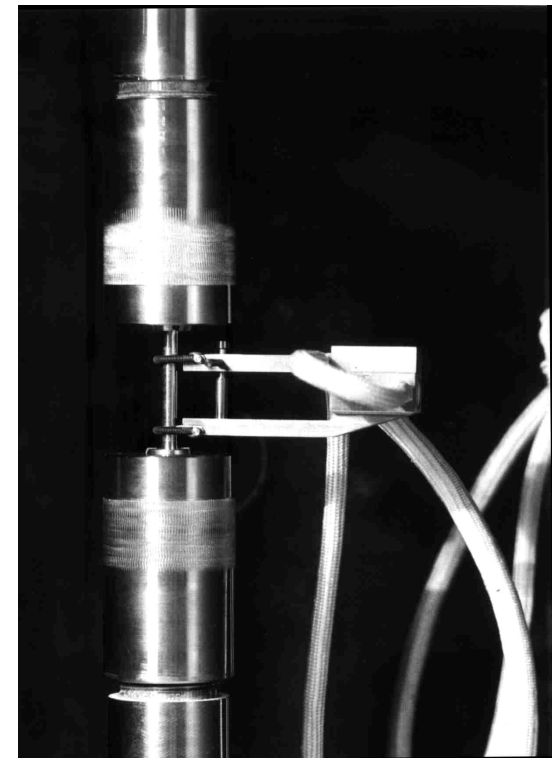
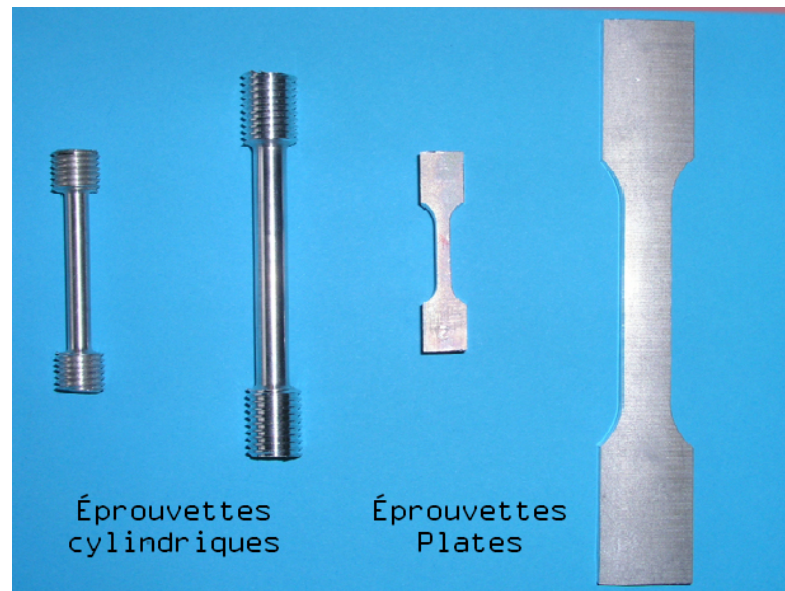
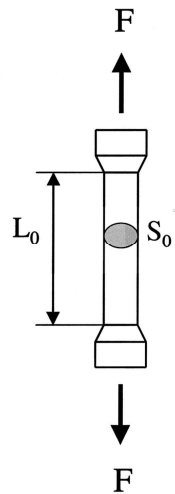
Ils sont caractérisés par leur viscosité μ qui est le rapport entre la contrainte tangentielle et le gradient de vitesse. On distingue:

- les fluides pascaliens (ou parfaits) sans viscosité,
- les fluides newtoniens de viscosité constante,
- les fluides non newtoniens dont la viscosité varie avec le gradient de vitesses.

2. Comportement solide: essai de traction

L'essai de traction (quasi-statique) est considéré comme le plus important des essais mécaniques car il permet de déterminer de nombreux paramètres importants dans le dimensionnement des pièces (résistance des matériaux).

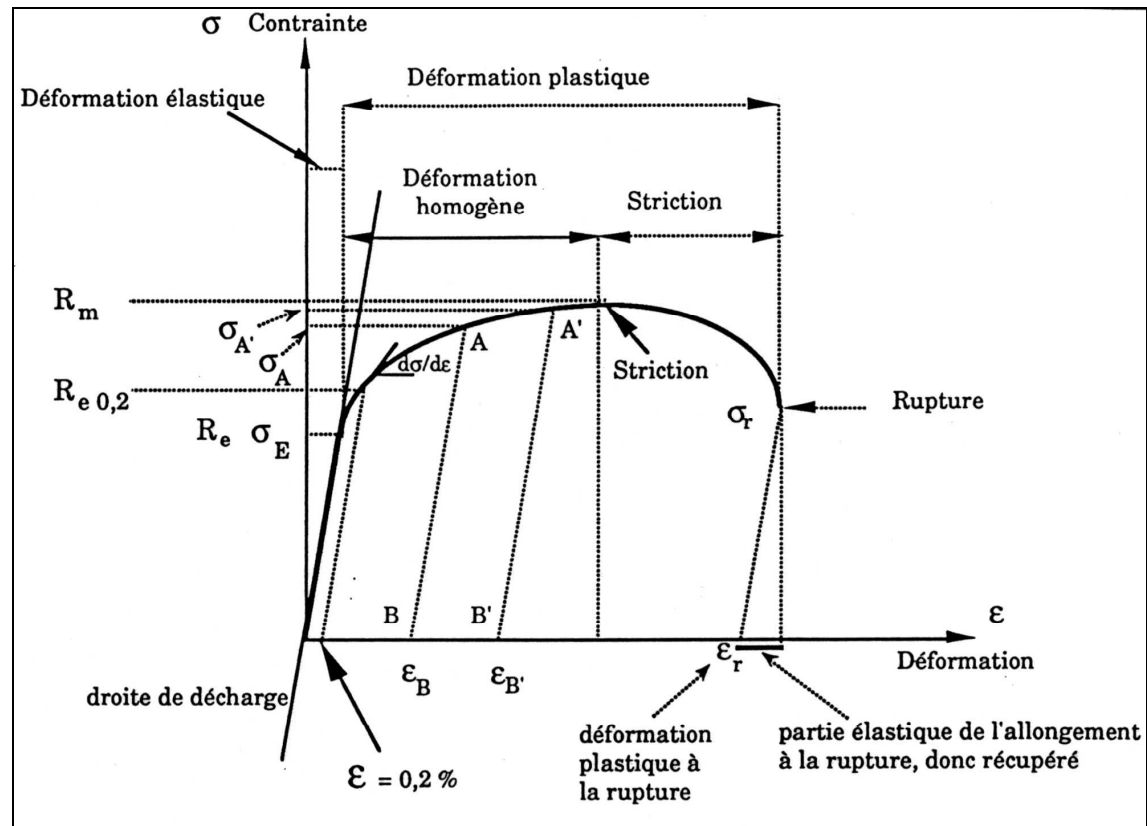
On applique un effort de traction pure uniaxiale F aux extrémités d'une éprouvette cylindrique longue vis à vis de ses dimensions transversales.



On engendre donc dans une section droite une contrainte apparente ou conventionnelle (c'est-à-dire rapportée à la section initiale S_0 de l'éprouvette), normale à cette section, et uniformément répartie :

$$\sigma = \frac{F(l)}{S_0}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$



Matériau	Module d'élasticité (MPa)	Matériau	Module d'élasticité (MPa)
Diamant	1000 000	or	80 000
Carbure de silicium (SiC)	450 000	Verre à vitre	70 000
Tungstène	400 000	Aluminium	70 000
Alumine (Al ₂ O ₃)	400 000	Béton	50 000
Fibre de carbone	300 000	Magnésium	40 000 à 45 000
Magnésie (MgO)	250 000	Bois aggloméré	7 000
Acier	210 000	Polystyrène	2 000
Cuivre	125 000	Polyamide 6-6	2 000
Titane	115 000	Polypropylène	1500
Laiton, bronze	110 000	Polyéthylène md	700
Silice vitreuse (SiO ₃)	95 000	caoutchoucs	1

3. Cas de l'élasticité linéaire

L'élasticité idéale est celle d'un matériau dont les états intermédiaires sont les mêmes lors de la mise en charge et lors de la décharge.
L'élasticité idéale se traduit donc par une relation biunivoque entre les contraintes et les déformations.

L'élasticité linéaire est celle qui se traduit par une relation de proportionnalité entre σ et les allongements relatifs ε .

$$\sigma = E\varepsilon$$

C'est la loi de HOOKE. E est le module d'Young, on l'exprime généralement en MPa. Le second paramètre qui caractérise l'élasticité parfaite est le coefficient de Poisson ν qui est le rapport constant entre la contraction transversale relative et l'allongement longitudinal relatif.

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad (\text{cas d'un essai de traction dans la direction 1})$$

Définition : L'élasticité linéaire concerne les solides déformables, homogènes et isotropes satisfaisant la loi de comportement de HOOKE.

On constate donc que pour un matériau homogène et isotrope :

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \quad \text{et donc :} \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}$$

Avec la loi de Hooke simplifiée : $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$, on obtient : $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\frac{\sigma_{11}}{E}$

La dilatation volumique étant égale à la trace du tenseur de déformation :

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = (1 - 2\nu)\frac{\sigma_{11}}{E}$$

Etant donné que E et ν sont positifs et que $\frac{\Delta V}{V}$ et σ_{11} sont toujours du même signe, ν est forcément compris entre 0 et 0.5.

Relations Contraintes – Déformations pour Un matériau homogène, isotrope élastique linéaire

Loi de Hooke unidimensionnelle:

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$$

Loi de Hooke généralisée pour
un matériau homogène isotrope:

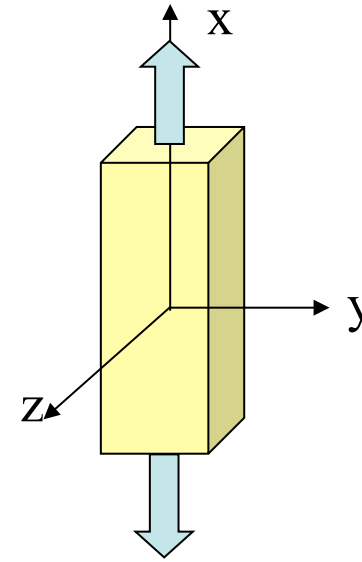
$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\delta}}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij}$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé

Inversion de la loi de Hooke

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \sigma_{mm} \delta_{ij} \right]$$



Relations Contraintes – Déformations pour
Un matériau homogène, isotrope élastique linéaire

$$\text{Avec } \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{mm} \delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{mm} \delta_{ij}$$

Avec :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Module de Coulomb, module de cisaillement

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \quad 2\varepsilon_{xz} = \dots \quad 2\varepsilon_{yz} = \dots$$

Loi de comportement

4. Ecriture avec la notation matricielle de l'ingénieur

De façon générale, la relation d'élasticité peut s'écrire sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

ou sous forme condensée

$$\sigma = C \varepsilon$$

C matrice de rigidité, symétrique

Loi appelée loi de Hooke généralisée

Loi de comportement

4. Ecriture avec la notation matricielle de l'ingénieur

Cette relation d'élasticité peut s'écrire sous la forme inverse:

$$\varepsilon = S\sigma$$

S matrice de souplesse, symétrique, inverse de C

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

Loi de comportement

4. Ecriture avec la notation matricielle de l'ingénieur

De façon générale, la relation d'élasticité peut s'écrire sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

ou sous forme condensée

$$\sigma = C \varepsilon$$

C matrice de rigidité, symétrique

Loi appelée loi de Hooke généralisée

Loi de comportement

Cas général : Matériaux anisotropes

Matrice de souplesse et de rigidité : 21 composantes

Matériaux sans aucune symétrie: matériaux tricliniques

Mais, la plupart des matériaux anisotropes dont les composites possèdent une ou plusieurs symétrie

- réduction du nombre de composantes indépendantes dans C et S nécessaires pour décrire le comportement du matériau.
- Plus il y a de symétries, plus le nombre de coefficients indépendants diminue.
- La limite est le matériau isotrope qui a les mêmes propriétés dans toutes les directions.

Loi de comportement

Matériaux monocliniques

Matériau qui possède un plan de symétrie.

Exemple: plan (1,2)

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

La matrice de souplesse a la même forme.

13 constantes d'élasticité indépendantes

Loi de comportement

Matériaux orthotrope

Matériau qui possède 3 plans de symétrie, perpendiculaires 2 à 2.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

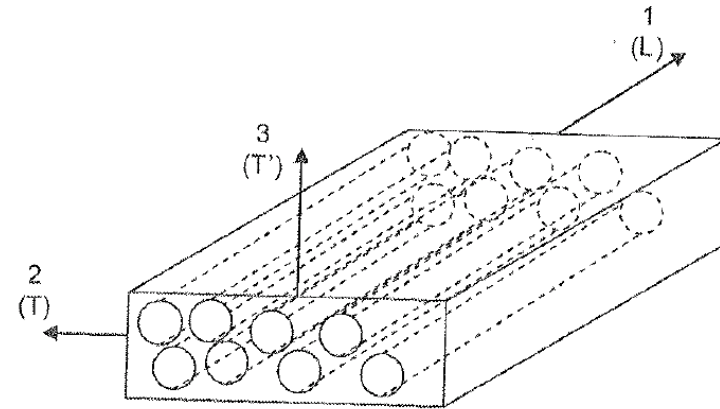
La matrice de souplesse a la même forme.

9 constantes d'élasticité indépendantes

Loi de comportement

Matériaux isotrope transverse ou orthotrope de révolution

Matériau orthotrope
possédant de plus un axe de
révolution



$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}$$

5 constantes d'élasticité indépendantes

Loi de comportement

Matériaux isotrope

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12}) \end{bmatrix}$$

2 constantes d'élasticité indépendantes : λ et μ ou E et ν

Lien avec la loi de hooke présentée précédemment:

$$C_{11} = \lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{12} = \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$S_{11} = \frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

$$S_{12} = -\frac{\nu}{E} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

$$S_{44} = \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{\mu}$$

Matériaux composites

PARTIE 2 : Comportement mécanique des composites

Chapitre 5 : Modélisation du comportement élastique des matériaux composites

Vanessa Bouchart

Introduction

BUT: savoir décrire le comportement du composite connaissant celui des constituants.

En effet, la spécificité du calcul des matériaux composites vient de l'hétérogénéité par conception et des discontinuités par microvides.

→ Recours à des techniques d'homogénéisation pour obtenir la relation de comportement tant au niveau d'une **monocouche** que du **stratifié** ou du sandwich.

BUT D'UN PROBLEME D'HOMOGENEISATION:

Remplacer le milieu hétérogène par un milieu homogène mécaniquement équivalent.

Il existe de nombreuses techniques d'homogénéisation plus ou moins élaborées qui ne feront pas l'objet direct de ce cours.

Un concept commun à toutes ces méthodes est celui de Volume Elementaires Représentatifs (VER)

I. Notion de VER et de modules effectifs

1. VER

- Volume minimum à prendre en considération pour que, une fois appliquée la théorie d'homogénéisation, les résultats obtenus soient représentatifs du comportement macroscopique du milieu hétérogène.
- Au VER, on applique un modèle mécanique, caractéristique de la théorie d'homogénéisation choisie.
- Le VER doit vérifier ce qu'on appelle **les conditions de séparation d'échelle**:

la taille L_{dv} doit être comprise entre la taille caractéristique des hétérogénéités d et la taille caractéristique de la structure L :

$$d < L_{dv} < L$$

I. Notion de VER et de modules effectifs

2. Modules effectifs (homogénéisés)

Propriétés mécaniques homogénéisées du matériau hétérogène

→ détermination sur un élément de volume V de dimension L_{dv} : **le VER**

Ce volume est soumis à des contraintes ou déformations homogènes au contour (à sa frontière).

La contrainte moyenne sur le VER peut alors d' écrire: $\overline{\sigma}_i = \frac{1}{V} \int_V \sigma_i(x_k) dV$

Et la déformation moyenne :

$$\overline{\varepsilon_j} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_j(x_k) dV$$

Avec x_k point quelconque de V et dV l'élément de volume entourant x_k

→ $\overline{\sigma}_i = C_{ij} \overline{\varepsilon}_j$ et $\overline{\varepsilon}_i = S_{ij} \overline{\sigma}_j$

↑ ↑

Constantes de rigidité et de souplesse du composite

I. Notion de VER et de modules effectifs

2. Modules effectifs (homogénéisés)

La détermination des propriétés homogénéisées d'un composite semble simple dans son principe, mais elle est complexe dans la pratique.

En effet :

Nécessité de trouver les solutions exactes des champs de contraintes et de déformations en chaque point du matériau hétérogène.

→ Possible dans certains cas de modèles géométriques simples et idéalisés + ou – loin de la réalité.

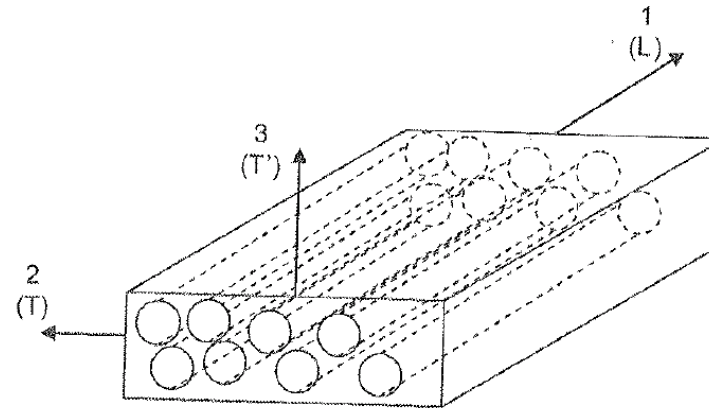
II. Comportement élastique d' un matériau composite unidirectionnel.

1.Loi de Hooke (Rappel du chapitre 3)

Ce genre de matériau constitue la configuration de base des matériaux composites à fibres

→ Importance de son étude.

VER (cellule élémentaire) d' un tel matériau, en première approximation;
fibre entourée d' un cylindre de matrice à base circulaire ou hexagonale



$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

ou sous forme condensée

$$\sigma = C \varepsilon$$

C matrice de rigidité, symétrique

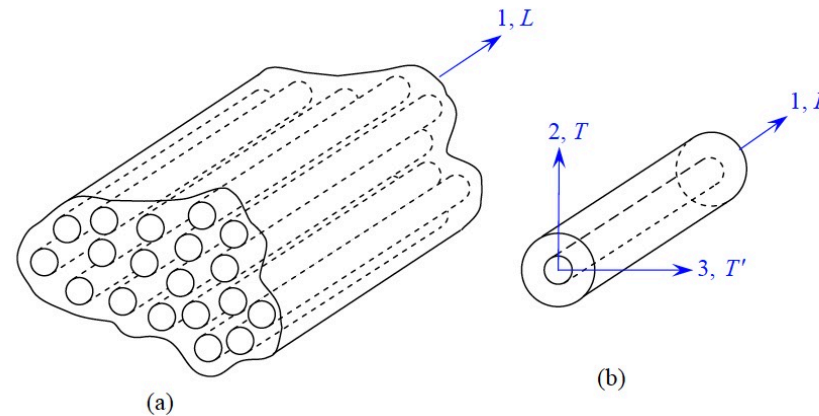
Loi appelée loi de Hooke généralisée

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

1. Loi de Hooke (Rappel du chapitre 3)

a. Rappel des matrices de rigidité et souplesse

Composite unidirectionnel =
matériau isotrope transverse



$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}$$

5 constantes d'élasticité indépendantes

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

1. Loi de Hooke

b. Modules de l'ingénieur en fonction des constantes de rigidité et de souplesse.

Modules de l'ingénieur = Modules d'Young, coefficients de Poisson et modules de cisaillement.

Ils sont mesurés dans des essais simples tels que traction uniaxiale ou cisaillement.

→ Ces modules correspondent à une utilisation usuelle plus pratique que les constantes de rigidité et de souplesse.

→ Etablir les relations entre ces modules et les constantes de rigidité et de souplesse

Pour cela, on considère différents types de sollicitations simples:

- Traction longitudinale → E_L et ν_{LT}
- Traction transversale → E_T , ν_{TL} , $\nu_{TT'}$
- Cisaillement longitudinal → G_{LT} , $G_{LT'}$
- Cisaillement transversal → $G_{TT'}$ et compression hydrostatique latérale → K_L

II. Comportement élastique d' un matériau composite unidirectionnel.

1.Loi de Hooke

b. Modules de l' ingénieur en fonction des constantes de rigidité et de souplesse

• Traction longitudinale

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

→ Détermination de E_L et de ν_{LT}

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

1. Loi de Hooke

b. Modules de l'ingénieur en fonction des constantes de rigidité et de souplesse

• Traction longitudinale

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3 \\ 0 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \\ 0 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \end{cases}$$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

1. Loi de Hooke

b. Modules de l'ingénieur en fonction des constantes de rigidité et de souplesse

• Traction longitudinale

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3 \\ 0 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \\ 0 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \end{cases}$$

De cette relation, on tire :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}} \varepsilon_1$$

et

$$\sigma_1 = \left(C_{11} - 2 \frac{C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}} \right) \varepsilon_1$$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

1. Loi de Hooke

b. Modules de l'ingénieur en fonction des constantes de rigidité et de souplesse

• Traction longitudinale

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3 \\ 0 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \\ 0 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \end{cases}$$

De cette relation, on tire :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}} \varepsilon_1$$

et

$$\sigma_1 = \left(C_{11} - 2 \frac{C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}} \right) \varepsilon_1$$



Module de Young longitudinal	$E_L = C_{11} - 2 \frac{C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}$
Coefficient de Poisson	$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

1. Loi de Hooke

b. Modules de l'ingénieur en fonction des constantes de rigidité et de souplesse

- Traction longitudinale

En fonction des constantes de souplesse

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1 \\ \varepsilon_2 = S_{12}\sigma_1 \\ \varepsilon_3 = S_{12}\sigma_1 \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \end{cases}$$



Module de Young longitudinal	$E_L = \frac{1}{S_{11}}$
Coefficient de Poisson	$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

1. Loi de Hooke

b. Modules de l'ingénieur en fonction des constantes de rigidité et de souplesse

• Traction transversale

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3 \\ \sigma_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \\ 0 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \end{cases}$$

De cette relation, on tire :

$$\varepsilon_1 = -\frac{C_{12}(C_{23} - C_{22})}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \varepsilon_2$$

et

$$\sigma_2 = \left(C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22} - 2C_{23}) + C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \right) \varepsilon_2$$



Module de Young transversal	$E_T = C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22} - 2C_{23}) + C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}$
Coefficient de Poisson	$\nu_{TL} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{C_{12}(C_{23} - C_{22})}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}$
Coefficient de Poisson	$\nu_{TT'} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

1. Loi de Hooke

b. Modules de l'ingénieur en fonction des constantes de rigidité et de souplesse

- Traction Transversale En fonction des constantes de souplesse

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = S_{12}\sigma_2 \\ \varepsilon_2 = S_{22}\sigma_2 \\ \varepsilon_3 = S_{23}\sigma_2 \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \end{cases}$$



Coefficient de Poisson $\nu_{TL} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -\frac{S_{12}}{S_{22}}$

Coefficient de Poisson $\nu_{TT'} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}$

Module de Young transversal $E_T = \frac{1}{S_{22}}$

Si on compare les expressions de E_L , E_T ... on a la relation suivante:

$$\frac{E_L}{\nu_{LT}} = \frac{E_T}{\nu_{TL}}$$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

1. Loi de Hooke

b. Modules de l'ingénieur en fonction des constantes de rigidité et de souplesse

- Cisaillement longitudinal ($\sigma_6 = \sigma_{12}$ ou $\sigma_5 = \sigma_{13}$ non nulle)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0 \\ \sigma_6 = C_{66} \varepsilon_6 \end{cases}$$



Module de cisaillement longitudinal $G_{LT} = C_{66}$ ou $G_{LT} = \frac{1}{S_{66}}$

Les directions T et T' sont équivalentes, nous avons $G_{LT'} = G_{LT}$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

1. Loi de Hooke

b. Modules de l'ingénieur en fonction des constantes de rigidité et de souplesse

- Cisaillement transversale (σ_4 non nulle)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \\ \sigma_4 = \frac{C_{22}-C_{23}}{2} \varepsilon_4 \end{cases}$$



Module de cisaillement transversal $G_{TT'} = \frac{C_{22}-C_{23}}{2}$ ou $G_{TT'} = \frac{1}{2(S_{22}-S_{23})}$

Ce module est lié à E_T et à $\nu_{TT'}$ par l'expression : $G_{TT'} = \frac{E_T}{2(1+\nu_{TT'})}$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

1. Loi de Hooke

b. Modules de l'ingénieur en fonction des constantes de rigidité et de souplesse

- Compression hydrostatique latérale sans déformation longitudinale

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ -p \\ -p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3 \\ -p = C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \\ -p = C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \end{cases}$$

p pression hydrostatique imposée

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \\ -p = (C_{22} + C_{23})\varepsilon_2 \\ \sigma_1 = 2C_{12}\varepsilon_2 \end{cases}$$

Dilatation surfacique e_s :

$$e_s = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -\frac{2}{C_{22} + C_{23}} p \quad \text{ou} \quad p = -\frac{C_{22} + C_{23}}{2} e_s$$

Module de compression latérale $K_L = \frac{C_{22} + C_{23}}{2}$

De même $K_L = \frac{1}{2(S_{22} + S_{23} - 2\frac{S_{12}^2}{S_{11}})}$

Ce module est lié à E_L et à ν_{LT} par l'expression : $K_L = \frac{C_{11} - E_L}{4\nu_{LT}^2}$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

1. Loi de Hooke

c. Expression des C_{ij} et des S_{ij} en fonction des modules de l'ingénieur.

$$\begin{aligned}C_{11} &= E_L + 4\nu_{LT}^2 \\C_{12} &= 2K_L \nu_{LT} \\C_{22} &= G_{TT'} + K_L \\C_{23} &= -G_{TT'} + K_L \\C_{66} &= G_{LT}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{11} &= \frac{1}{E_L} \\S_{22} &= \frac{1}{E_T} \\S_{66} &= \frac{1}{G_{LT}} \\S_{12} &= -\frac{\nu_{LT}}{E_L} \\S_{23} &= -\frac{\nu_{TT'}}{E_T}\end{aligned}$$

II. Comportement élastique d' un matériau composite unidirectionnel.

1.Loi de Hooke

d. Restriction sur les modules.

Les modules d' élasticité ont des valeurs qui doivent être en accord avec les principes physiques de base.

Exemples: une traction sur un solide ne peut entraîner qu' une déformation dans le sens de la traction ou une compression hydrostatique ne peut produire une dilatation du matériau.

$$\rightarrow E_L, E_T, G_{LT}, G_{TT}, K_L > 0$$

Remarque : Tout ce qui vient d' être fait d' un le cas d' un pli unidirectionnel (isotrope transverse) peut être fait pour un pli orthotrope c' est-à-dire avec un tissu bidimensionnel, il suffit d' utiliser les matrices de rigidité et de souplesse correspondantes.

II. Comportement élastique d' un matériau composite unidirectionnel.

1.Loi de Hooke

e. Comportement d' un pli hors de ses axes d' orthotropie

Les stratifiés sont élaborés par couches successives, la direction des fibres est décalée d' une couche à l' autre (**une couche peut être unidirectionnel (isotrope transverse) ou avec un tissu (orthotrope)**)).

→ Pour l' étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est nécessaire de prendre un **système d' axes de référence** pour l' ensemble du stratifié et de rapporter le comportement de chaque couche à ce système de référence.

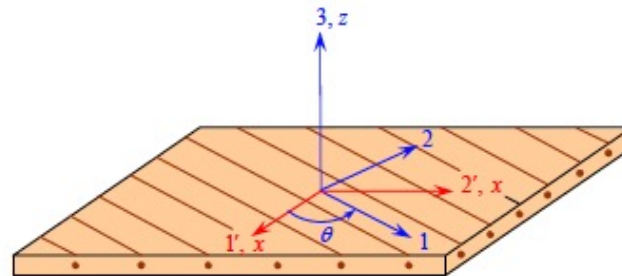


FIGURE 11.1. Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié et axes de référence (1', 2', 3) = (x, y, z) du stratifié.

→ **Changement de repère pour chaque pli du stratifié du repère d' orthotropie au repère global de référence.**

On traite ici le cas des plis unidirectionnels

II. Comportement élastique d' un matériau composite unidirectionnel.

1.Loi de Hooke

e. Comportement d' un pli hors de ses axes d' orthotropie

Relation de changement de base d' un tenseur d' ordre 2 (matrice)

Matrice de changement de base dans le cas d' une rotation d' angle θ :

Déterminer la matrice de changement de base?

$$\alpha = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{matrix}$$

II. Comportement élastique d' un matériau composite unidirectionnel.

1.Loi de Hooke

e. Comportement d' un pli hors de ses axes d' orthotropie

Relation de changement de base d' un tenseur d' ordre 2 (matrice)

Matrice de changement de base dans le cas d' une rotation d' angle θ :

$$\alpha = \begin{matrix} & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \begin{matrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Notation matricielle

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\varepsilon'}} &= \overline{\overline{\alpha}} \overline{\overline{\varepsilon}} \overline{\overline{\alpha}}^T & \text{ou} & \overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\alpha}}^T \overline{\overline{\varepsilon'}} \overline{\overline{\alpha}} \\ \overline{\overline{\sigma'}} &= \overline{\overline{\alpha}} \overline{\overline{\sigma}} \overline{\overline{\alpha}}^T & \overline{\overline{\sigma}} &= \overline{\overline{\alpha}}^T \overline{\overline{\sigma'}} \overline{\overline{\alpha}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ notation indicielle

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} \sigma_{pq} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} C_{pqmn} \varepsilon_{mn} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} C_{pqmn} \alpha_{km} \alpha_{ln} \varepsilon'_{kl}$$

$$\Rightarrow C'_{ijkl} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} C_{pqmn} \alpha_{km} \alpha_{ln}$$

II. Comportement élastique d' un matériau composite unidirectionnel.

1.Loi de Hooke

e. Comportement d' un pli hors de ses axes d' orthotropie

$$C'_{11} = C_{11} \cos^4 \theta + C_{22} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$C'_{12} = (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta),$$

$$C'_{13} = C_{12} \cos^2 \theta + C_{23} \sin^2 \theta,$$

$$C'_{14} = 0, \quad C'_{15} = 0,$$

$$C'_{16} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta,$$

$$C'_{22} = C_{11} \sin^4 \theta + C_{22} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$C'_{23} = C_{12} \sin^2 \theta + C_{23} \cos^2 \theta,$$

$$C'_{24} = 0, \quad C'_{25} = 0,$$

$$C'_{26} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta,$$

$$C'_{33} = C_{22}, \quad C'_{34} = 0, \quad C'_{35} = 0,$$

$$C'_{36} = (C_{12} - C_{23}) \sin \theta \cos \theta,$$

$$C'_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \cos^2 \theta + C_{66} \sin^2 \theta,$$

$$C'_{45} = \left[C_{66} - \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \right] \sin \theta \cos \theta, \quad C'_{46} = 0,$$

$$C'_{55} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \sin^2 \theta + C_{66} \cos^2 \theta, \quad C'_{56} = 0,$$

$$C'_{66} = [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).$$

$$S'_{11} = S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$S'_{12} = (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta),$$

$$S'_{13} = S_{12} \cos^2 \theta + S_{23} \sin^2 \theta,$$

$$S'_{14} = 0, \quad S'_{15} = 0,$$

$$S'_{16} = [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta,$$

$$S'_{22} = S_{11} \sin^4 \theta + S_{22} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$S'_{23} = S_{12} \sin^2 \theta + S_{23} \cos^2 \theta,$$

$$S'_{24} = 0, \quad S'_{25} = 0,$$

$$S'_{26} = [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta,$$

$$S'_{33} = S_{22}, \quad S'_{34} = 0, \quad S'_{35} = 0,$$

$$S'_{36} = 2(S_{12} - S_{23}) \sin \theta \cos \theta,$$

$$S'_{44} = 2(S_{22} - S_{23}) \cos^2 \theta + S_{66} \sin^2 \theta,$$

$$S'_{45} = [S_{66} - 2(S_{22} - S_{23})] \sin \theta \cos \theta, \quad S'_{46} = 0,$$

$$S'_{55} = 2(S_{22} - S_{23}) \sin^2 \theta + S_{66} \cos^2 \theta, \quad S'_{56} = 0,$$

$$S'_{66} = 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66}] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).$$

II. Comportement élastique d' un matériau composite unidirectionnel.

2. ETAT DE CONTRAINTE PLANE

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

3. Détermination expérimentale des modules en contrainte plane

Le comportement élastique d'un matériau composite est déterminé entièrement par la connaissance de 5 coefficients dans le cas d'un composite unidirectionnel et de 9 dans le cas d'un composite orthotrope.

Des essais simples permettent de mesurer ces caractéristiques.

Les chargements utilisés, sauf pour G_T , permettent de se placer en état de contrainte plane.

Les essais considérés :

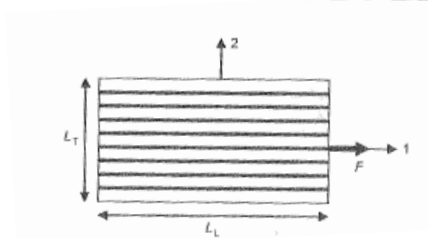
- traction longitudinale
- traction transversale
- traction hors axes

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

3. Détermination expérimentale des modules en contrainte plane

➤ Traction longitudinale

On applique un chargement F dans la direction « L » des fibres



Si S est l'aire de la section, l'état de contrainte associé est :

$$\sigma_1 = \frac{F}{S}; \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0$$

On mesure les allongements longitudinaux (direction 1) ΔL_L et transversaux (direction 2) ΔL_T . Les déformations associées sont : $\varepsilon_1 = \frac{\Delta L_L}{L_L}$; $\varepsilon_2 = \frac{\Delta L_T}{L_T}$

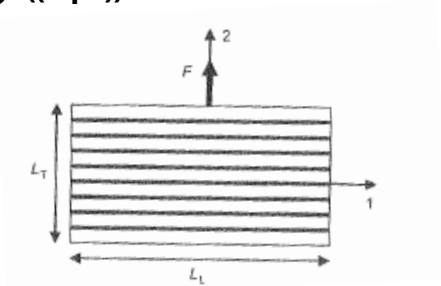
$$\rightarrow \boxed{E_L = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} ; \nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

3. Détermination expérimentale des modules en contrainte plane

➤ Traction Transversale

On applique un chargement F dans la direction transversale « T » perpendiculaires aux fibres



Si S est l'aire de la section, l'état de contrainte associé est :

$$\sigma_2 = \frac{F}{S}; \sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0$$

On mesure les allongements longitudinaux (direction 1) ΔL_L et transversaux (direction 2) ΔL_T . Les déformations associées sont : $\varepsilon_1 = \frac{\Delta L_L}{L_L}$; $\varepsilon_2 = \frac{\Delta L_T}{L_T}$

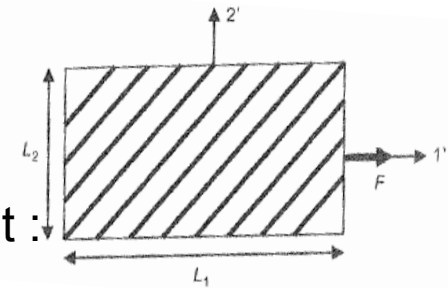
$$\rightarrow \boxed{E_T = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} ; \nu_{TL} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

3. Détermination expérimentale des modules en contrainte plane

➤ Traction HORS AXES

On utilise une éprouvette soumise à un chargement F qui fait un angle de 45° avec l'orientation des fibres ➔ on utilise les lois de comportements hors axes.



Si S est l'aire de la section, l'état de contrainte associé est :

$$\sigma'_1 = \frac{F}{S}; \sigma'_2 = \sigma'_3 = \sigma'_4 = \sigma'_5 = \sigma'_6 = 0$$

On mesure les allongements longitudinaux (direction $1'$) ΔL_L et transversaux (direction $2'$) ΔL_T . Les déformations associées sont : $\varepsilon'_1 = \frac{\Delta L_L}{L_L}$; $\varepsilon'_2 = \frac{\Delta L_T}{L_T}$

Loi de

comportement
hors axes

$$\Rightarrow S'_{11} = \frac{1}{4}(S_{11} + S_{22} + 2S_{12} + S_{66}) = \frac{\varepsilon'_1}{\sigma'_1} \Rightarrow \boxed{G_{LT} = \frac{1}{S_{66}} = 4S'_{11} - \frac{1}{E_L} - \frac{1}{E_T} + \frac{2\nu_{TL}}{E_T}}$$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

4. Approche théorique à la détermination des modules d'élasticité

On peut déterminer ces modules par différentes méthodes d'homogénéisation que nous ne décrirons pas dans ce cours.

Nous présenterons une approche très simplifiée du comportement mécanique de la cellule élémentaire du composite unidirectionnel → **loi des mélanges**

V_f : fraction volumique de fibres

$$V = V_f + V_m = 1$$

V_m : fraction volumique de matrice

Hypothèses:

- On travaille en élasticité linéaire
- on suppose que la liaison fibres/matrice est parfaite.
- Localement, on a: $\sigma_f = E_f \varepsilon_f$ et $\sigma_m = E_m \varepsilon_m$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

4. Approche théorique à la détermination des modules d'élasticité

On peut déterminer ces modules par différentes méthodes d'homogénéisation que nous ne décrirons pas dans ce cours.

Nous présenterons une approche très simplifiée du comportement mécanique de la cellule élémentaire du composite unidirectionnel → **loi des mélanges**

V_f : fraction volumique de fibres

$$V = V_f + V_m = 1$$

V_m : fraction volumique de matrice

Hypothèses:

- On travaille en élasticité linéaire
- on suppose que la liaison fibres/matrice est parfaite.
- Localement, on a: $\sigma_f = E_f \varepsilon_f$ et $\sigma_m = E_m \varepsilon_m$

→ **loi des mélanges**

$$\begin{aligned} E_L &= E_f V_f + E_m (1 - V_f) \\ \frac{1}{E_T} &= \frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_m} \\ \nu_{LT} &= \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \\ \frac{1}{G_{LT}} &= \frac{V_f}{G_f} + \frac{1 - V_f}{G_m} \end{aligned}$$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

5. Théorie des plaques – états de contraintes planes

Pour une structure, on parle de plaque quand l'une des dimensions de la structure est petite par rapport aux 2 autres.

Cette dimension suivant l'épaisseur de la plaque est en général notée (3).

Objectif: ramener l'analyse tridimensionnelle à une analyse bidimensionnelle plus simple.

Hypothèses élémentaires de la théorie des plaques: les contraintes normales dans la direction (3) sont négligeables.

→ $\varepsilon'_3 = -\frac{1}{C'_{33}} (C'_{13} \varepsilon'_1 + C'_{23} \varepsilon'_2 + 2C'_{36} \varepsilon'_6)$
ce qui nous permet d'éliminer ε_3 des équations.

$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3} C'_{j3}}{C'_{33}} \quad i, j = 1, 2, 6$$

Problème plan

Problème hors-plan

⇒ la relation de comportement s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{44} & Q'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{45} & Q'_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \end{pmatrix}$$

II. Comportement élastique d' un matériau composite unidirectionnel.

5. Théorie des plaques – états de contraintes planes

Dans le cas de contraintes planes:

$$\sigma'_4 = \sigma'_5 = \sigma_3 = 0$$

⇒ la relation de comportement s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{pmatrix}$$

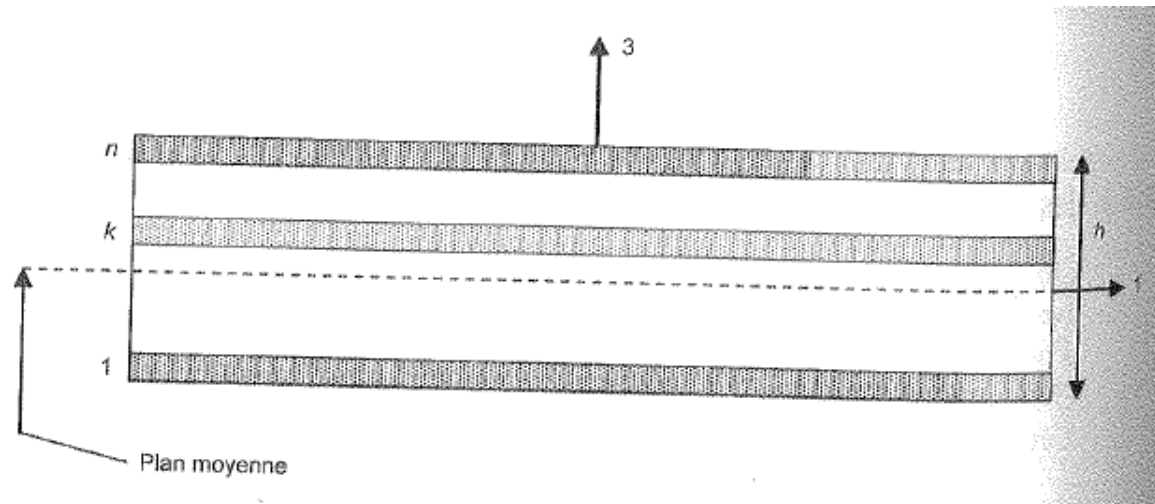
$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3} C'_{j3}}{C'_{33}} \quad i, j = 1, 2, 6$$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

6 . Théorie simplifiée des stratifiés

Dans un stratifié, chaque pli peut être considéré comme une plaque dont l'épaisseur est suivant e_3 .

Même hypothèse que la théorie des plaques : **les contraintes normales dans la direction (3) sont négligeables.**



II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

6 . Théorie simplifiée des stratifiés

Hypothèses en contraintes : $\boxed{\sigma_3 = 0}$ $\longrightarrow$ Ecriture loi de comportement comme théorie des plaques

On calcule les contraintes dans chaque pli et on définit les valeurs suivantes, dans l'épaisseur totale du stratifié:

- champs des résultantes dans le plan (1,2) (dit en membrane)

$$N(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} dx_3$$

- champs des résultantes en cisaillement hors plan (dits efforts tranchants)

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} Q_4 \\ Q_5 \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} dx_3$$

- champs des moments en flexion et en torsion

$$M(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} dx_3$$

où M_1 et M_2 moments de flexion et M_6 moment de torsion

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

6 . Théorie simplifiée des stratifiés

Hypothèses en déplacements :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2) + x_3 z_1(x_1, x_2) \\ v_2(x_1, x_2) + x_3 z_2(x_1, x_2) \\ v_3(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Schéma du premier ordre avec cisaillement transverse (le plus simple)

Une section droite perpendiculaire au plan moyen reste droite et perpendiculaire au plan moyen si la plaque est de faible épaisseur

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

6 . Théorie simplifiée des stratifiés

Hypothèses en déplacements : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + x_3 \varepsilon_1^1$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + x_3 \varepsilon_2^1$$

$$\varepsilon_6 = \varepsilon_6^0 + x_3 \varepsilon_6^1$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_4^0$$

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_5^0$$

où les termes ε_i^0 et ε_i^1 ne dépendent que de x_1 et x_2 :

$$\varepsilon_1^0 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$$

$$\varepsilon_6^0 = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon_1^1 = \frac{\partial z_1}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon_2^1 = \frac{\partial z_2}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon_6^1 = \frac{\partial z_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z_2}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon_4^0 = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + z_2$$

$$\varepsilon_5^0 = \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + z_1$$

- les déformations de membrane :

$$\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{pmatrix}$$

- les déformations de flexion ou courbure :

$$\varepsilon^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_6^1 \end{pmatrix}$$

- les déformations de cisaillement transverse :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_5^0 \end{pmatrix}$$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

6 . Théorie simplifiée des stratifiés

Loi de comportement pour un stratifié:

Efforts de membrane

$$N(x_1, x_2) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} dx_3 = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{16} \\ q_{12} & q_{22} & q_{26} \\ q_{16} & q_{26} & q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1^0 + x_3 \epsilon_1^1 \\ \epsilon_2^0 + x_3 \epsilon_2^1 \\ \epsilon_6^0 + x_3 \epsilon_6^1 \end{pmatrix} dx_3$$

$$N(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1^0 \\ \epsilon_2^0 \\ \epsilon_6^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1^1 \\ \epsilon_2^1 \\ \epsilon_6^1 \end{pmatrix}$$

les q_{ij} sont constants mais différents par couche.

On écrira :

$$N = A\epsilon^0 + B\epsilon^1$$

où A et B sont des matrices 3×3 telles que :

$$a_{ij} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} q_{ij} dx_3 ; \quad b_{ij} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} q_{ij} x_3 dx_3$$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

6 . Théorie simplifiée des stratifiés

Loi de comportement pour un stratifié:

Moments

$$M(x_1, x_2) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x_3 \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} dx_3 = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x_3 \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{16} \\ q_{12} & q_{22} & q_{26} \\ q_{16} & q_{26} & q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1^0 + x_3 \epsilon_1^1 \\ \epsilon_2^0 + x_3 \epsilon_2^1 \\ \epsilon_6^0 + x_3 \epsilon_6^1 \end{pmatrix} dx_3$$

$$M(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1^0 \\ \epsilon_2^0 \\ \epsilon_6^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1^1 \\ \epsilon_2^1 \\ \epsilon_6^1 \end{pmatrix}$$

$$M = B\epsilon^0 + D\epsilon^1$$

où D est une matrice 3×3 telle que :

$$d_{ij} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} q_{ij} x_3^2 dx_3$$

II. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel.

6 . Théorie simplifiée des stratifiés

Loi de comportement pour un stratifié:

Efforts tranchant

$$Q(x_1, x_2) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} dx_3 = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \begin{pmatrix} k_{44} & k_{45} \\ k_{45} & k_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_5^0 \end{pmatrix} dx_3$$

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e_{44} & e_{45} \\ e_{45} & e_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_5^0 \end{pmatrix} = E \gamma^0$$

où E est une matrice 2×2 telle que :

$$e_{ij} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} k_{ij} dx_3$$

Ces différentes relations sont regroupées sous une forme matricielle très utilisée reliant les efforts généralisés aux composantes de déformations :

$$\begin{pmatrix} N \\ M \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \\ \gamma^0 \end{pmatrix}$$