

Le dual topologique de $l^p(\mathbb{N})$

On définit pour $1 \leq p < \infty$

$$l^p(\mathbb{N}) := \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p < +\infty\},$$

qu'on munit de la norme

$$\|u\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

et $l^\infty(\mathbb{N}) := \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \exists M > 0 \text{ tel que } |u_n| \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$ muni de la norme $\|u\|_p := \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$

- (1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\epsilon_n \in l^p(\mathbb{N})$ défini par $(\epsilon_n)_i = 0$ si $i \neq n$ et $= 1$ si $i = n$. Montrez que $l^p(\mathbb{N}) = \overline{\text{Vect}(\epsilon_n / n \in \mathbb{N})}$.
- (2) Montrez que $(l^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Dans toute la suite, on se donne $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Attention : ceci inclut les cas $p = \infty$ et $q = \infty$. Pour $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^q(\mathbb{N})$, on définit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_a : & l^p(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R} \\ & (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n \end{array} \right\}$$

- (3) Pour de tels p, q et pour $a \in l^q(\mathbb{N})$, montrez que φ_a est bien définie et que $\varphi_a \in (l^p(\mathbb{N}))'$.
- (4) Déterminez $\|\varphi_a\|_{l^p \rightarrow \mathbb{R}}$ pour les normes associées.

On se donne $T \in (l^p(\mathbb{N}))'$ avec $1 \leq p < \infty$. On cherche à montrer qu'il existe un unique $a \in l^q(\mathbb{N})$ tel que $T = \varphi_a$.

- (5) On suppose qu'un tel $a \in l^q(\mathbb{N})$ existe. Déterminez alors a_n en fonction de $T(\epsilon_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (6) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $a_n := T(\epsilon_n)$. Montrez que $a_n \in l^q(\mathbb{N})$.
- (7) Montrez que φ_a et T coïncident sur $\{\epsilon_n / n \in \mathbb{N}\}$.
- (8) Montrez que $T = \varphi_a$.

On définit

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_{p,q} : & l^q(\mathbb{N}) \rightarrow (l^p(\mathbb{N}))' \\ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \rightarrow \varphi_a \end{array} \right\} \text{ où } \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_a : & l^p(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n \end{array} \right\}$$

Montrez que $T_{p,q}$ est un isomorphisme, et même une isométrie. On assimile alors couramment $(l^p(\mathbb{N}))'$ et $l^q(\mathbb{N})$.

Le résultat n'a pas lieu dans le cas $p = \infty$. La preuve utilise le Théorème de Hahn-Banach. A toute suite convergente, on associe sa limite. ceci se prolonge en une application linéaire continue sur $l^\infty(\mathbb{N})$. Mais elle n'est pas de la forme φ_a avec $a \in l^1(\mathbb{N})$.