

Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique

1. Calculer la transformée de Fourier d'une fonction porte $p(t)$ de largeur T telle que :

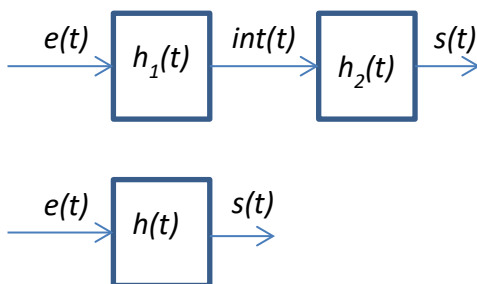
$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

2. On rappelle que la convolution d'une fonction porte $p(t)$ de largeur T par elle-même est :

$$y(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow y(t) = \text{Tri}_T(t) \text{ telle que } \text{Tri}_T(t) = \begin{cases} T - |t| & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

Quelle est la transformée de Fourier de $\text{Tri}(t)$?

3. Soit un système H constitué de deux systèmes H1 et H2 linéaires et invariants par translation de réponse impulsionnelle respective $h_1(t)$ et $h_2(t)$. Les deux systèmes sont associés en série tels que le montre la figure 1:



3.1. Exprimer $\text{int}(t)$ en fonction de $e(t)$ et $h_1(t)$ et $s(t)$ en fonction de $\text{int}(t)$ et de $h_2(t)$.

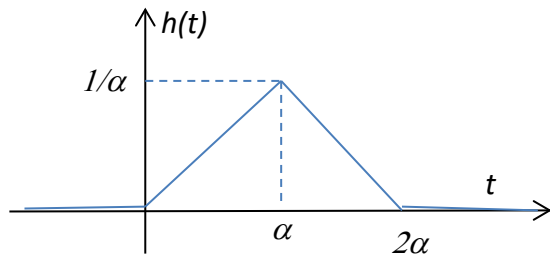
3.2. En déduire l'expression de $h(t)$ en fonction de $h_1(t)$ et $h_2(t)$

3.3. Exprimer $s(t)$ en fonction de $h(t)$ et $e(t)$

On pose $h_1(t) = h_2(t) = p(t)$ avec $p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$

Figure 1

- 3.4. Exprimer la fonction de transfert harmonique $H(j\omega)$ du système H qui a pour réponse impulsionnelle $h(t)$
- 3.5. Est-ce qu'un système de filtrage temporel analogique temps réel peut avoir une réponse impulsionnelle telle que $p(t)$? Justifier votre réponse
4. Maintenant si on impose une réponse impulsionnelle telle que $h(t) = \text{Tri}_T(t - \alpha)$ avec $\alpha = T$ ($h(t)$ est représentée sur la figure 2)
- 4.1 Exprimer la fonction de transfert harmonique $H(j\omega)$ du système H qui a pour réponse impulsionnelle $h(t)$ en fonction de T



4.2. Exprimer le module et la phase de la fonction de transfert $H(j\omega)$

Figure2

On applique à l'entrée du système H le signal :

$$e(t) = e_1(t) + e_2(t)$$

$$\text{avec } e_1(t) = \beta \text{ et } e_2(t) = \gamma \cos(2\pi f_0 t)$$

et β et γ deux constantes réelles positives.

4.3. Déterminer la réponse $s(t)$ du système H à cette excitation

5. Pour un autre traitement du signal à partir du signal $e(t) = e_1(t) + e_2(t)$, on souhaite atténuer $e_2(t)$ de 80 dB. On prendra comme application numérique $f_0 = 1000 \text{ Hz}$.

5.1. Proposer une solution de gabarit de filtrage dont vous définirez précisément tous les paramètres

5.2. Préciser l'ordre du filtre sans définir le polynôme

6. On estime que le bruit à l'entrée du filtre défini dans la question précédente peut être considéré comme un bruit blanc de densité spectrale de puissance $G_e(f) = G_0 \forall f \in \mathbb{R}$ (AN: $G_0 = 10^{-8} \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}}$). Pour faciliter le calcul on considérera le filtre comme parfait c'est-à-dire que la sortie est nulle en dehors de sa bande passante $[0, f_0]$ ou $[0, 1000] \text{ Hz}$

6.1. Exprimer la puissance de bruit à la sortie du filtre.

6.2. Exprimer la valeur de la tension efficace de bruit en sortie

6.3. Exprimer le rapport signal sur bruit en dB

Rappels

Transformée de Fourier : $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$

Transformée de Fourier inverse : $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j2\pi ft} df$

Série de Fourier de $x(t)$ signal périodique de période T :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(n) e^{j2\pi \frac{n}{T} t} \quad \text{et} \quad c_n(n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt$$

La décomposition en série d'un signal carré d'amplitude A_0 et de période T_0 est telle que

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)} A_0 \sin\left(\frac{2\pi t(2n+1)}{T_0}\right)$$

Egalité de Parseval : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$ (E = énergie)

Transformée des signaux périodiques $\rightarrow$ spectre de raies

$$\cos(2\pi f_0 t) \rightleftharpoons \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \rightleftharpoons \frac{1}{2j} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons \delta(f - f_0)$$

Quelques propriétés $TF(x(t)) = X(f)$

$$TF(x(at)) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$TF(x(t-a)) = e^{-j2\pi af} X(f)$$

$$TF(x(t)e^{j2\pi at}) = X(f-a)$$

$$TF\left(\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right) = (j2\pi f)^n \cdot X(f)$$

Formule trigonométrique

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)) \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b)) \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\text{Convolution : } z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau) d\tau = y(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau$$

$$\text{Gain en dB : } G_H(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$$

$$\text{Puissance moyenne fonction de la densité spectrale de puissance } P = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df$$

Densité spectrale de puissance de sortie $G_S(f)$ en fonction de la densité spectrale d'entrée $G_E(f)$ d'un système

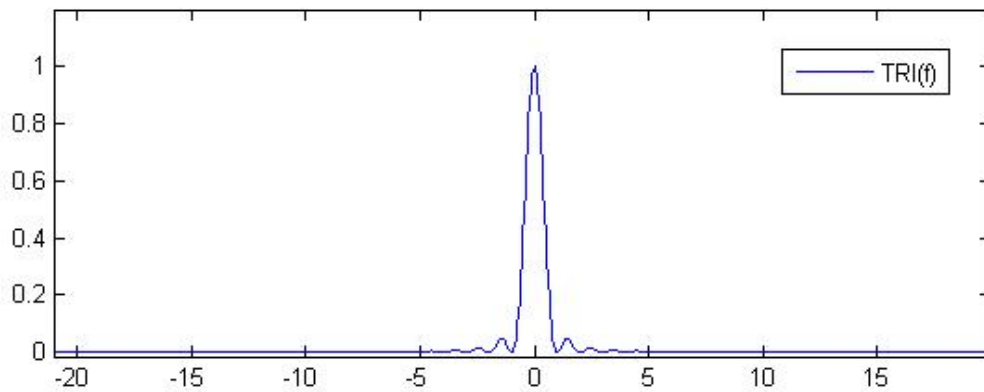
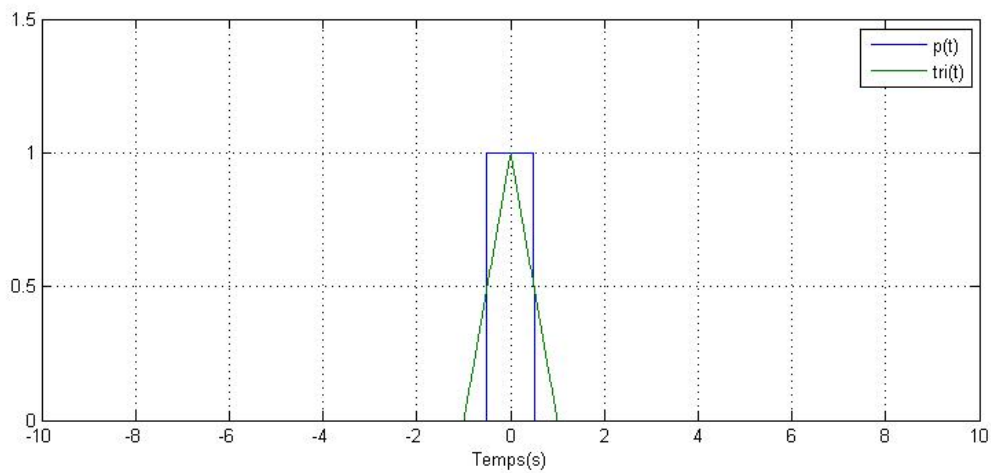
$$H(f) : G_S(f) = |H(f)|^2 G_E(f)$$

La valeur efficace en tension a pour expression en fonction de la puissance, la fonction suivante $V_{eff} = \sqrt{P}$

Corrigé

$$1. P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi ft} dt = \left[\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right]_{-T/2}^{+T/2} = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

$$2. TRI(f) = [P(f)]^2 = T^2 \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right]^2$$



$$3. int(t) = h_1(t) * e(t)$$

$$s(t) = h_2(t) * int(t)$$

$$s(t) = h_2(t) * h_1(t) * e(t)$$

$$3.3 h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$3.4 H(jf) = TRI(jf) = [P(jf)]^2 = T^2 \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right]^2$$

3.5. non car la réponse impulsionnelle est anticausale

$$4.1. H(jf) = TF(Tr(t - \alpha)) = e^{-j2\pi\alpha f} Tri(f) = e^{-j2\pi\alpha f} \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \right]^2$$

$$4.2. |H(jf)| = |TF(Tr(t - \alpha))| = |e^{-j2\pi\alpha f} Tri(f)| = \left| \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \right]^2 \right|$$

$$\rho_H = \arg(H(jf)) = -2\pi\alpha f$$

$$4.3. e(t) = e_1(t) + e_2(t) = \beta + \gamma \cos(2\pi f_0 t)$$

$$s(t) = \beta + \gamma \cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \alpha t) \left[\frac{\sin(\pi f_0 T)}{\pi f_0} \right]^2$$

Pour un autre traitement du signal à partir du signal $e(t) = e_1(t) + e_2(t)$, on souhaite atténuer $e_2(t)$ de 80 dB. On prendra comme application numérique $f_0 = 1000$ Hz.

5.1. Proposer une solution de gabarit de filtrage dont vous définirez précisément tous les paramètres. Filtre passe bas de fréquence de coupure $F_c = 10$ Hz.

5.2. Préciser l'ordre du filtre sans définir le polynôme : -80 dB pour 2 décades soit -40 dB par décade → passe bas d'ordre 2 fréquence de coupure 10 Hz.

6.1

$$P_b = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df = \int_{-f_c}^{+f_c} G(f) df$$

6.2

$$V_{eff} = \sqrt{P_b}$$

6.3. Le rapport signal sur bruit

$$SNR = 10 \log \left(\frac{\beta^2}{P_b} \right) = 20 \log \left(\frac{\beta}{V_{eff}} \right)$$