

Outils Logiques - L1 MIASHS - La logique intuitionniste

Romain Péchoux

1 Introduction

La notion d'intuitionnisme a été introduite par le mathématicien Brouwer afin d'exclure des principes du raisonnement mathématique classique qu'il jugeait non-constructifs. Par exemple, le principe du tiers exclu qui consiste à dire que $F \vee \neg F$ est tautologique. La logique obtenue à travers ces restrictions s'appelle *logique intuitionniste*. L'intérêt d'étudier une telle logique est qu'une preuve corresponde à un objet mathématique que l'on peut construire (pas de raisonnement par l'absurde, pas d'existentiel classique, ...).

La syntaxe de la logique intuitionniste (des propositions) est cependant similaire au cas classique

$$F, F_1, F_2, \dots ::= \perp \mid \top \mid P \mid (F_1 \wedge F_2) \mid (F_1 \vee F_2) \mid (\neg F_1) \mid (F_1 \Rightarrow F_2) \mid (F_1 \Leftrightarrow F_2).$$

▲ En revanche, les opérateurs du langage ne peuvent plus se définir à partir des autres comme en logique classique: les lois de Morgan (e.g., $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$), l'involution de la négation $\neg\neg A \equiv A$, ou l'équivalence $\neg A \vee B \equiv A \Rightarrow B$, la validité du tiers exclu $P \vee \neg P \equiv \top$,... ne sont pas des définitions acceptables de la logique intuitionniste.

Ce sont les règles d'inférence des théorèmes prouvables qui vont donc restreindre la logique et contraindre l'ensemble des propriétés qui peuvent être prouvées.

2 La déduction naturelle

Nous allons ici aborder la version intuitionniste de la déduction naturelle. Le système logique correspondant est habituellement appelé NJ.

Etant donné un ensemble de formule $\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}$ et une formule F , le jugement $\Gamma \vdash_{DJ} F$ signifie : de l'ensemble des formules Γ , on déduit F .

On annote le symbole $\vdash$ par NJ pour préciser qu'il s'agit d'une dérivation de la déduction naturelle intuitionniste.

Voici les règles de NJ:

2.1 Règles d'axiome

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash_{\text{NJ}} F} \text{ (Axiom)}$$

2.2 Règle de l'absurdité

$$\frac{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} \perp}{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} F} (\perp\text{E})$$

2.3 Règles d'introduction et d'élimination

$$\frac{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} F \quad \Gamma \vdash_{\text{NJ}} \neg F}{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} \perp} (\neg\text{E}) \quad \frac{\Gamma, F \vdash_{\text{NJ}} \perp}{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} \neg F} (\neg\text{I})$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} F_i} (\wedge\text{E}) \quad \frac{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} F_1 \quad \Gamma \vdash_{\text{NJ}} F_2}{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} F_1 \wedge F_2} (\wedge\text{I})$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} F \vee G \quad \Gamma, F \vdash_{\text{NJ}} H \quad \Gamma, G \vdash_{\text{NJ}} H}{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} H} (\vee\text{E}) \quad \frac{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} F_i}{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} F_1 \vee F_2} (\vee\text{I})$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash_{\text{NJ}} F}{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} G} (\Rightarrow\text{E}) \quad \frac{\Gamma, F \vdash_{\text{NJ}} G}{\Gamma \vdash_{\text{NJ}} F \Rightarrow G} (\Rightarrow\text{I})$$

La règle $\neg\text{E}$ dans NJ est très différente de la règle de la négation de NK car les deux preuves menant à l'absurdité sont disjointes. On ne peut donc pas obtenir F à partir de $\neg\neg F$ comme dans NK.

3 Exemples

Voici une liste d'énoncés dont la validité peut être prouvée dans NK et NJ:

- $F \Rightarrow (\neg(\neg F))$
- $(\neg F) \Leftrightarrow (\neg(\neg(\neg F)))$
- $((\neg F) \vee (\neg G)) \Rightarrow (\neg(F \wedge G))$
- $((\neg F) \wedge (\neg G)) \Leftrightarrow (\neg(F \vee G))$
- $((\neg F) \vee G) \Rightarrow (F \Rightarrow G)$

Voici une liste d'énoncés dont la validité ne peut pas être prouvée dans NJ:

- $(\neg(\neg F)) \Leftrightarrow F$
- $((\neg F) \vee (\neg G)) \Leftrightarrow (\neg(F \wedge G))$
- $((\neg F) \vee G) \Leftrightarrow (F \Rightarrow G)$

4 Et qu'en est-il des séquents ?

De la même manière qu'il existe une version classique (NK) et une version intuitionniste (NJ) de la déduction naturelle, il existe une version classique (LK) et une version intuitionniste (LJ) du calcul des séquents.

On obtient le panorama ci-dessous:

	Déduction naturelle	Calcul des séquents
Classique	NJ	LJ
Intuitionniste	NK	LK

On peut obtenir LJ à partir de changements simples sur LK:

- On se restreint à des séquents avec une seule formule dans la conclusion,
- On transforme les règles pour que cette propriété soit garantie. Par exemple, la règle:

$$\frac{\Gamma, F \vdash_{LK} \Delta \quad \Gamma, G \vdash_{LK} \Delta}{\Gamma, F \vee G \vdash_{LK} \Delta} \text{ (L-disjunction)}$$

devient

$$\frac{\Gamma, F \vdash_{LJ} H \quad \Gamma, G \vdash_{LJ} H}{\Gamma, F \vee G \vdash_{LJ} H} \text{ (L-disjunction)}$$

Il existe aussi un théorème d'élimination des coupures en logique intuitionniste.

Par ailleurs, la validité dans LJ implique la validité dans LK. C'est-à-dire que $\Gamma \vdash_{LJ} F$ implique $\Gamma \vdash_{LK} F$. La réciproque est évidemment fausse car nous avons des contre-exemples.