

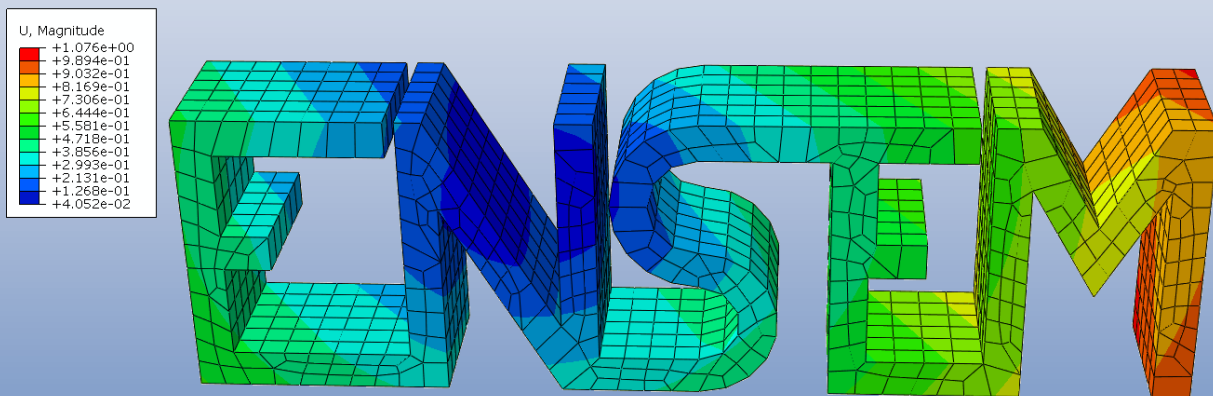
B8-12 Analyse par Eléments Finis des Machines et des Structures

ENSEM 2^{ème} année NRJ FISE

Année 2024-2025

Responsable de cours : Cédric LAURENT cedric.laurent@univ-lorraine.fr

assistant TP : Amirouche GOUMGHAR amirouche.goumghar@univ-lorraine.fr



ODB: Job-1.odb Abaqus/Standard 6.13-1 Mon Jun 25 14:57:29 GMT+02:00 2018

Step: Step-1
Mode 2: Value = -1.23658E-17 Freq = 0.0000 (cycles/time)
Primary Var: U, Magnitude
Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +1.342e+01

PLANNING 2024/2025

Contenu	
CM1 : Rappels et contexte	20 janvier 2025
CM2 : Cœur de la méthode MEF	22 janvier 2025
CM3 : Extension au non-linéaire et applications	24 janvier 2025
TP1 : étude d'un treillis plan	27 au 31 janvier 2025
TP2 : étude du barrage hydroélectrique	5 au 10 février 2025
TP3 : étude du volant d'inertie	12 au 24 février 2025
TP4 : étude du contact pneu-route	26 février au 3 mars 2025
TP5 (évalué)	5 au 12 mars 2025

MÉTHODE D'ÉVALUATION

Un compte-rendu réalisé **pendant la séance** sera demandé pour le dernier TP. Ce compte-rendu (seul ou en binôme) prendra la forme d'un diaporama dont la trame est disponible sur Arche, complété avec le travail des étudiant·e·s en séance, et sera remis **sur Arche avant la fin de la séance**.

Un QCM en ligne sur Arche portant sur des éléments de cours viendra également compléter cette note, et sera réalisé pendant la dernière séance de TP.

La note finale sera égale à la somme de la note de compte-rendu de TP pondérée par un coefficient $3/4$ et la note du QCM pondérée par un coefficient $1/4$.

TABLE DES MATIÈRES

1.	Présentation générale de la méthode	3
1.1.	Intérêt de la méthode en mécanique	3
1.2.	Domaines d'application	6
2.	Rappels de mécanique des milieux continus en HPP.....	7
2.1.	Hypothèses	7
2.2.	Cinématique des milieux continus : les déformations	8
2.3.	Efforts intérieurs : les contraintes.....	9
2.4.	Loi de comportement élastique linéaire isotrope	13
2.5.	Les équations fondamentales.....	14
3.	Exemple de résolution directe pour un treillis	16
3.1.	Discrétisation.....	16
3.2.	Fonction de forme.....	17
3.3.	Comportement de l'élément	18
3.4.	Passage au repère de la structure.....	22
3.5.	Assemblage des matrices élémentaires	23
3.6.	Conditions aux limites.....	25
3.7.	Résolution	26
4.	Extension au cas général en HPP	28
4.1.	L'énergie potentielle totale	28
4.2.	Discrétisation et maillage	30
4.3.	Les différents types d'éléments.....	31
4.4.	Interpolation et fonctions de forme.....	32
4.5.	Matrices élémentaires.....	34
4.6.	Passage au repère de la structure.....	37
4.7.	Assemblage des matrices élémentaires	38
4.8.	Résolution pour les cas linéaires	39
4.9.	Éléments isoparamétriques	40
4.10.	Méthode d'intégration de Gauss et modes indésirables	43
4.11.	Analyse vibratoire.....	46
5.	Utilisation dans un code de calcul : introduction à Abaqus.....	50
5.1.	Généralités.....	50
5.2.	Géométrie.....	51
5.3.	Matériaux	52
5.4.	Assemblage et interactions	53
5.5.	Types de calculs.....	53
5.6.	Chargements et conditions aux limites	53
5.7.	Maillage.....	54
5.8.	Calcul statique et exploitation des résultats.....	54
5.9.	Calcul de fréquences propres.....	55
6.	Quelques mots sur les non-linéarités	57
6.1.	Non-linéarités géométriques.....	57
6.2.	Non-linéarités matérielles.....	62
6.3.	Le traitement du contact dans la MEF	63
7.	Éléments de conclusions : la note de calcul.....	69

1. Présentation générale de la méthode

1.1. Intérêt de la méthode en mécanique

1.1.1. Positionnement par rapport à la mécanique à l'ENSEM

Les méthodes de résolution analytiques vues jusqu'ici durant le cursus ENSEM (mécanique des milieux continus, théorie des poutres, dynamique des structures) permettent de trouver une solution **exacte** (aux hypothèses de modélisation près) à un problème simple. Cette solution exacte se détermine à l'issue de la **résolution d'équations aux dérivées partielles qui décrivent le comportement physique de la matière** (et qui seront rappelées ci-dessous). Si ces méthodes sont suffisantes pour effectuer du dimensionnement de certaines structures (treillis, conduites sous pression, ...), elles ne permettent pas d'étudier un problème industriel réel où la géométrie des structures, les comportements des matériaux, et la diversité des conditions aux limites sont trop complexes pour qu'une solution analytique existe.

1.1.2. Philosophie de la méthode

La **méthode des éléments finis** (MEF) propose d'offrir une solution numérique approchée à un problème complexe, en *discrétisant* la structure en un nombre *finis* d'éléments simples au sein desquels des calculs analytiques sont possibles.

A retenir 1-1

Une introduction à la méthode générale a déjà été donnée en préambule de ce cours, au sein du *bloc de compétences 3* : dans le présent document, on se contente de décrire **l'application de la méthode des éléments finis au cas du calcul des solides et des structures**.

La *discrétisation* constitue le premier pilier de la méthode : on considère que la caractérisation des **déplacements de certains points de la structure** sont représentatifs du déplacement du milieu continu. L'*interpolation* en constitue le second pilier : **à partir des déplacements de certains points, on se donne le droit d'interpoler les résultats au sein de toute la structure**. Pour caractériser l'équilibre global de la structure, c'est le principe de la *stationnarité de l'énergie potentielle totale* qui permettra de trouver un champ de déplacements solution du problème.

Si la MEF ne constitue pas la seule et unique méthode numérique dans la boîte à outils de l'ingénieur en mécanique des structures, elle est de très loin **la plus utilisée dans les bureaux d'études** en raison de sa relative simplicité d'implémentation, des validations qui ont été apportées, de la diversité des phénomènes qui peuvent être étudiés (thermiques, magnétiques, acoustiques, ...), et de la complexité des géométries pour lesquelles les capacités de calcul actuelles sont capables de fournir des solutions.

1.1.3. Lien avec les développements informatiques

Aussi efficaces que peuvent être les récents algorithmes de calcul par éléments finis et les méthodes numériques associées, les ressources informatiques utilisées pour résoudre un problème réel n'en sont pour autant pas moins gigantesques. Ainsi, l'utilisation de la MEF dans les bureaux d'études ne doit son essor qu'à **la capacité des ordinateurs d'effectuer un nombre croissant d'opérations** par seconde et de stocker un grand nombre de données en mémoire durant ce calcul pour des coûts de plus en plus faibles (Figure 1). Malgré de telles avancées, le modélisateur est constamment confronté à la nécessité d'effectuer un compromis entre temps de calcul et précision des résultats, car un problème réel complexe nécessite toujours entre quelques minutes et quelques heures de temps de calcul.

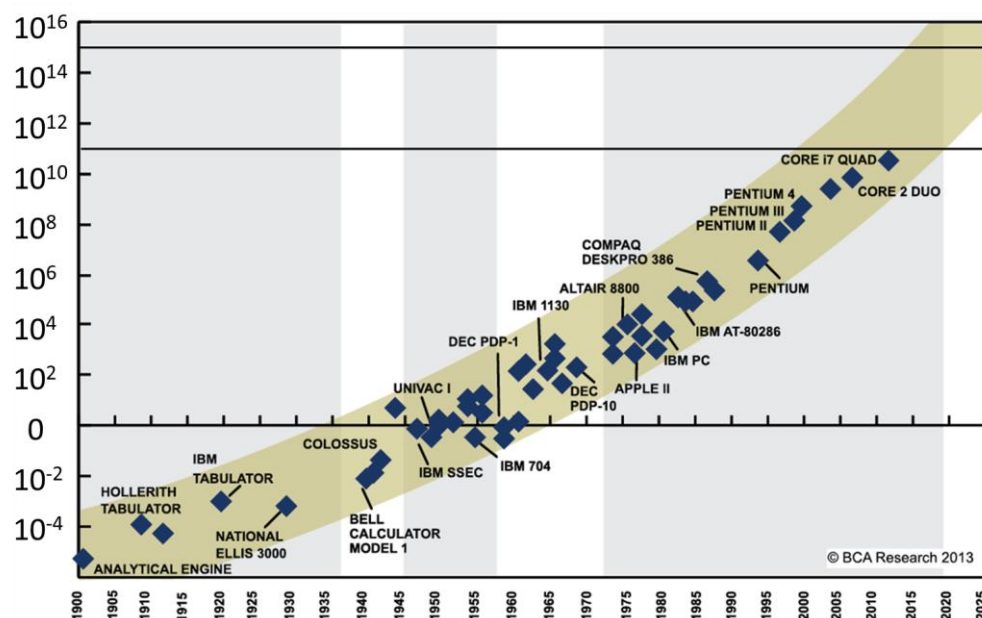


Figure 1: Evolution (échelle logarithmique!) des capacités de calcul (nombre d'opérations par seconde et pour 1000\$)

Lorsqu'on effectue une démarche analytique, on doit simplifier le problème pour en déterminer une solution : l'erreur est d'origine analytique et porte sur les hypothèses.

Lorsqu'on on opte pour une démarche numérique, on introduit des **approximations supplémentaires** dues aux techniques de résolutions, une erreur d'origine numérique vient s'ajouter aux hypothèses de modélisation. Dans tous les cas, **ces erreurs ne peuvent être acceptables que si elles sont quantifiées**, et par conséquent si les résultats sont comparés à des solutions analytiques connues ou à des résultats expérimentaux (qui eux-mêmes peuvent être liés à des erreurs expérimentales). Si le problème qui est simulé est complexe, une validation expérimentale peut être impossible ou trop coûteuse : néanmoins, une partie du talent du modélisateur est de réussir à isoler certains problèmes simples qui peuvent être comparés à des points expérimentaux.

1.1.4. Limites et avertissements

Les codes de résolution actuels utilisant la MEF sont devenus simples d'utilisation et leur interface utilisateur rend invisible la complexité des détails numériques et théoriques qui peuvent se cacher derrière un clic. Ces avancées sont **tout autant un atout qu'un danger pour l'utilisateur**, qui peut être amené à remplacer sa réflexion d'ingénieur par une confiance aveugle ! Si l'ingénieur utilise de tels codes avec un excès de confiance, les « **notes de calculs** » qui seront issus du bureau d'étude peuvent être totalement fausses et mener à des catastrophes.

Une liste (non exhaustive) de points qui devraient rester à tout moment à l'esprit du modélisateur pourrait être :

- 1) les **hypothèses de modélisation** doivent être en accord avec la physique du problème simulé. Une solution même exacte à un problème mal posé ne peut pas être une bonne solution !
- 2) la signification des **paramètres du calcul** et leur impact potentiel sur les résultats doivent être maîtrisés
- 3) la **sensibilité** des résultats aux paramètres du calcul doit être évaluée
- 4) des sources de **validation** expérimentale de tout ou partie du problème doivent être recherchées
- 5) une figure ne peut en aucun cas constituer un résultat et remplacer un **post-traitement** rigoureux des résultats du calcul !

1.2. Domaines d'application

La MEF est dorénavant utilisée dans la plupart des domaines de la physique (thermique, électromagnétisme), et en particulier des domaines de l'ingénieur en mécanique (dimensionnement, analyse modale, fatigue et fissuration, etc...).

En mécanique du solide, on peut notamment donner les secteurs d'applications ci-dessous qui utilisent dorénavant quotidiennement la MEF (Figure 2):

- 1) la **conception** et l'**allégement** des structures dans l'aéronautique et l'automobile
- 2) Le transfert de chaleur dans des moteurs thermiques
- 3) L'optimisation de procédés de mise en forme
- 4) L'analyse du comportement vibratoire
- 5) L'étude dynamique de la résistance aux chocs en accidentologie
- 6) La conception de dispositifs orthopédiques

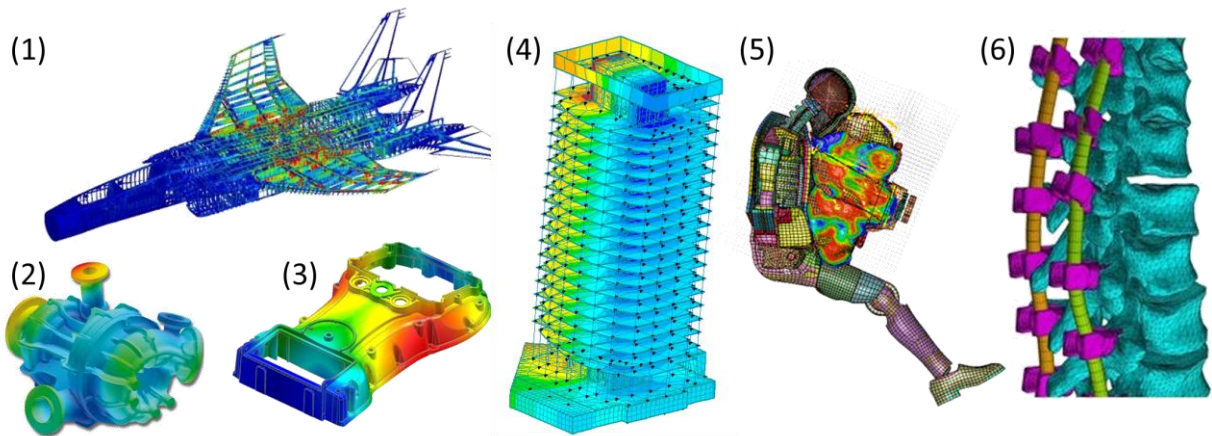


Figure 2: Exemple d'applications de la MEF dans différents domaines de l'ingénieur en mécanique.

2. Rappels de mécanique des milieux continus en HPP

2.1. Hypothèses

Dans toute section on va effectuer quelques rappels nécessaires du cours de Mécanique des Milieux Continus (MMC) de 1^{ère} année ENSEM qui seront utilisés dans toute la suite. Le lecteur est encouragé si besoin à consulter le cours de MMC en ligne sur Arche pour davantage de précisions et d'exemples.

La notion de **milieu continu** implique qu'on se place à une échelle « *suffisamment grande* » pour que les variations locales des champs dues à l'hétérogénéité de la matière ne soient pas « observables », mais « *suffisamment petite* » pour pouvoir parler de matière et non d'un système matériel. Les matériaux qui seront abordés seront considérés **homogènes** à l'échelle d'un **Volume Élémentaire Représentatif** (VER), dont la taille dépend du type de matériau que l'on considère.

A retenir 2-1

Ce cours repose sur la notion de **milieu continu** : ainsi il ne sera pas possible de modéliser l'apparition de discontinuité de la matière, comme l'apparition de fissures.

Dans ce chapitre nous nous intéresserons uniquement aux problèmes linéaires et sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP), dont on rappelle la définition suivante :

A retenir 2-2

Hypothèse des petites perturbations (HPP) =

hypothèse des petites **déformations** + hypothèse des petits **déplacements**

On considère donc que la position des points dans l'état *actuel* (déformé) de la structure est proche de leur position dans l'état *initial* (non déformé), et que les déformations sont infinitésimales durant la transformation. Dans la pratique (et arbitrairement), on considère en général que l'on se trouve sous **l'hypothèse des petites perturbations** lorsque la déformation est de l'ordre de quelques dixièmes de pourcents.

2.2. Cinématique des milieux continus : les déformations

2.2.1. Configuration actuelle, configuration de référence

À l'instant $t = t_0$, le système matériel est dans la configuration dite **configuration de référence** que l'on va comparer à une configuration actuelle à l'instant t . Un point se trouvant en $\underline{X}$ dans la configuration de référence se trouve en $\underline{x}$ dans la configuration déformée, cette position dépendant évidemment du temps et de la position $\underline{X}$. On peut caractériser la **transformation** à partir du **champ de déplacements** qui fait le lien entre les deux configurations (déformée et non déformée) :

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X}$$

Le lien entre ces deux configurations peut être décrit par le tenseur mixte appelée « gradient de la transformation », et dont la définition est :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{\underline{Grad}} \underline{u} + \underline{\underline{I}}$$

Ce tenseur détient notamment l'information sur la variation de volume lors de la transformation :

Equation fondamentale 2-1

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det \underline{\underline{F}} = J$$

Le déterminant du tenseur gradient de la transformation est une mesure de la variation locale de volume.

2.2.2. Tenseur des déformations linéarisé

Le tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ contient toute l'information concernant la transformation (mouvement de corps rigide **ET** déformation du milieu).

Le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$ (valable uniquement en HPP) ne s'intéresse qu'à la partie de **déformation pure** et a pour définition :

Equation fondamentale 2-2

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \right)$$

2.2.3. Interprétations des composantes de la déformation

Le tenseur des déformations est nul lors d'un mouvement de corps rigide, et possède toute l'information sur les **changements de longueur** et **changements d'angle** au sein du matériau lors de la transformation.

A retenir 2-3

La composante ε_{ii} correspond à un **allongement** (si $\varepsilon_{11} > 0$) ou à un **rétrécissement** (si $\varepsilon_{11} < 0$) relatif selon la direction $\underline{e}_{ii}$.

A retenir 2-4

La composante ε_{ij} correspond à la **moitié de la variation d'angle** dans le plan $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$

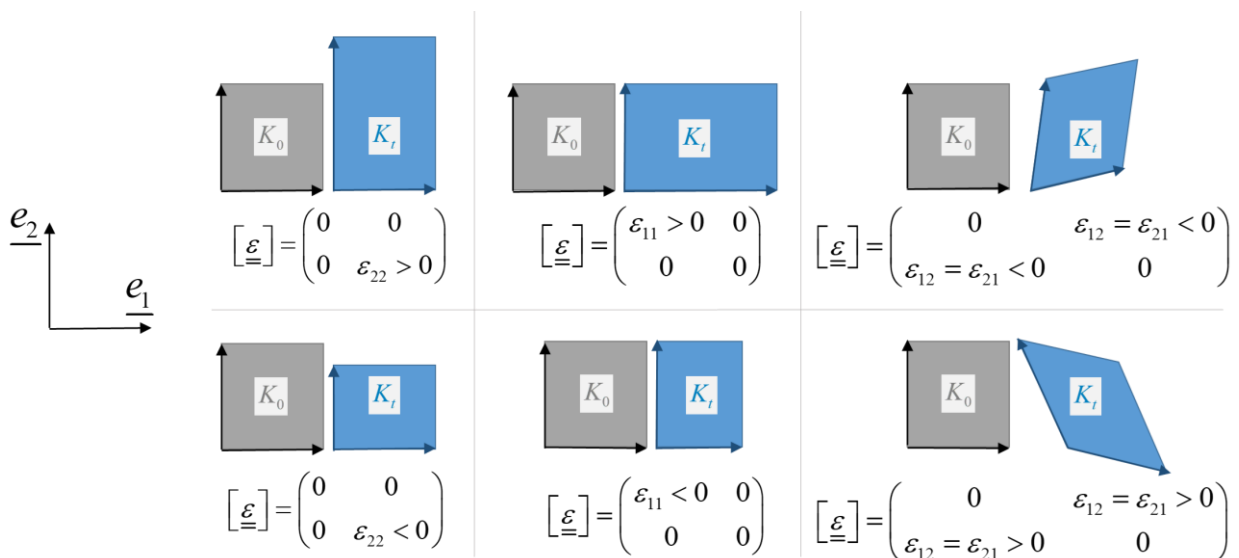


Figure 3 : Interprétation physique des composantes de $\underline{\varepsilon}$ dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

A retenir 2-5

Les composantes des tenseurs des déformations sont sans dimension.

2.3. Efforts intérieurs : les contraintes

2.3.1. Le vecteur-contrainte

On imagine que l'on **coupe de façon fictive** le système matériel en deux parties dans la configuration actuelle. Le "plan de coupe fictif", qu'on appellera **facette**, est de normale **sortante** à la partie du système pour laquelle on veut calculer la contrainte

(Figure 4): on postule que les efforts intérieurs peuvent être représentés par une **densité surfacique de forces** appelée **vecteur-contrainte**, et qui dépend de la **position** de la facette (point M) ainsi que de son **orientation** définie par sa normale.

On a par conséquent:

$$\sigma_n = \underline{t}(M, \underline{n}(x)) \cdot \underline{n}(x)$$

En raison de la convention de normale sortante, on comprend donc intuitivement qu'une **contrainte normale positive** traduit localement un état de **traction** tandis qu'une **contrainte normale négative** traduit localement un état de **compression**. Une contrainte contenue dans le plan défini la facette de normale $\underline{n}(x)$ sera appelée **contrainte de cisaillement**.

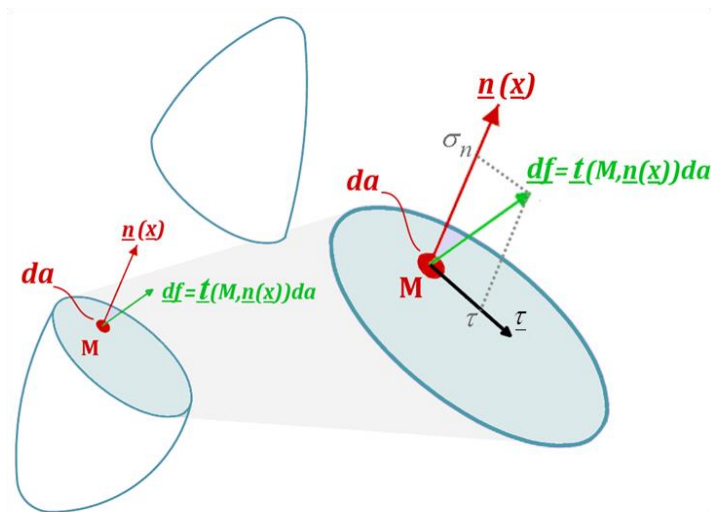


Figure 4: Vecteur contrainte $\underline{t}(M, \underline{n}(x))$ par une coupe fictive du solide au point M et selon un plan normal à $\underline{n}(x)$

A retenir 2-6

Les composantes du vecteur-contrainte sont homogènes à une **pression**
(force par unité de surface , $1 \text{ N/m}^2 = 1\text{Pa}$)

2.3.2. Le tenseur des contraintes de Cauchy

Le **tenseur des contraintes de Cauchy** possède une interprétation physique évidente si l'on considère un élément de volume infinitésimal représenté ci-dessous (Figure 5). Pour chaque **facette** de normale $\underline{n}$, on peut exprimer le **vecteur-contrainte** comme la densité surfacique d'efforts exercé par l'extérieur sur cette facette et telle que :

$$\underline{df} = \underline{t}(M, \underline{n}(x)) da .$$

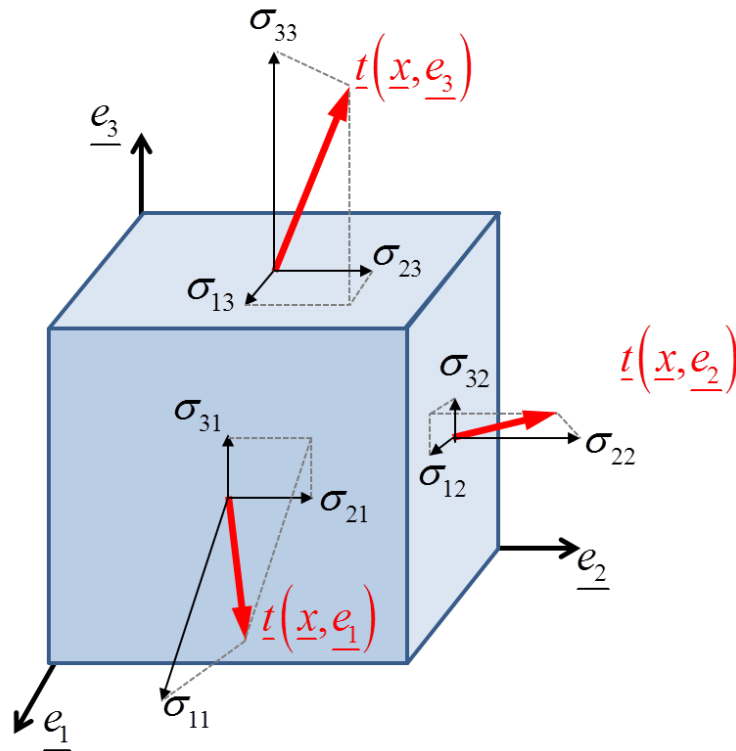


Figure 5: Représentation physique des composantes du tenseur des contraintes de Cauchy.

Les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy correspondent alors aux projections des vecteurs-contraintes correspondant à chaque facette de l'élément de volume infinitésimal :

$$\begin{cases} \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_1) = \sigma_{11}\underline{e}_1 + \sigma_{21}\underline{e}_2 + \sigma_{31}\underline{e}_3 \\ \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_2) = \sigma_{12}\underline{e}_1 + \sigma_{22}\underline{e}_2 + \sigma_{32}\underline{e}_3 \\ \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_3) = \sigma_{13}\underline{e}_1 + \sigma_{23}\underline{e}_2 + \sigma_{33}\underline{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$$

La notation ci-dessus revient à écrire :

Equation fondamentale 2-3

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \sigma_{ij}(\underline{x})n_j(\underline{x})\underline{e}_i = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) : \text{définition du vecteur-contrainte}$$

La relation $\underline{t}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ montre que le vecteur-contrainte dépend linéairement de la normale à la facette considérée.

A retenir 2-7

Le tenseur des contraintes peut être vu comme une **application linéaire** qui transforme la normale $\underline{n}(\underline{x})$ en vecteur-contrainte $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}))$

La contrainte normale est alors définie comme la projection du vecteur-contrainte sur la normale à la facette. On comprend donc intuitivement qu'une **contrainte normale positive** traduit localement un état de **traction** tandis qu'une **contrainte normale négative** traduit localement un état de **compression**. Les composantes du vecteur-contrainte sont homogènes à une **pression (force par unité de surface)**. Une contrainte non normale est appelée **contrainte de cisaillement**.

A retenir 2-8

σ_{ij} : premier indice i = direction (projection sur $\underline{e}_i$)
second indice j = facette de normale $\underline{e}_j$

2.3.3. Interprétation du tenseur des contraintes

Comme on l'a vu précédemment et comme on l'observe sur l'incontournable Figure 5, les composantes diagonales représentent des **tractions** ou **compressions**, tandis que les composantes non-diagonales représentent des **cisaillements** dans le plan.

Ci-dessous, on a représenté deux cas de chargement différents pour un même morceau de matière (Figure 6.2).

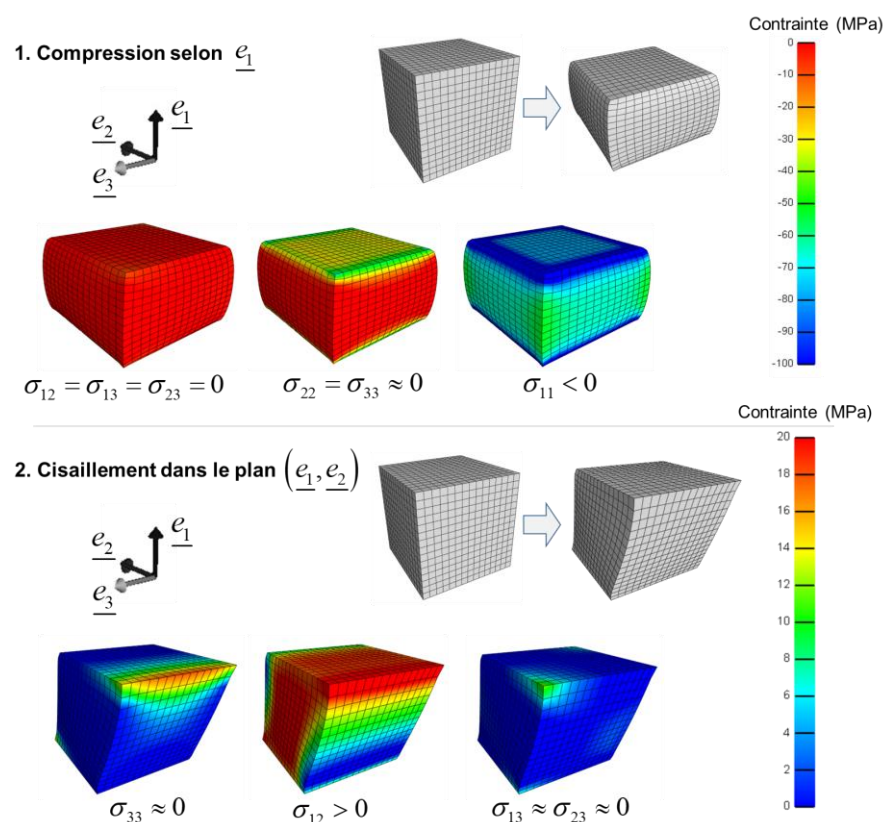


Figure 6 : Exemple d'états de contraintes et composantes du tenseur des contraintes associées. 1) compression selon $\underline{e}_1$, 2) cisaillement dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$

*Remarque : Les autres composantes ne sont pas strictement nulles en raison de l'application des conditions aux limites, qui impliquent **localement** d'autres contraintes.*

Pour tout tenseur des contraintes, il existe une base principale telle que dans cette base les contraintes soient uniquement des contraintes normales (traction ou compression) : .

A retenir 2-9

Quelque soit $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ il existe une base principale $(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})$ telle que :

$$\sigma_I \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \sigma_{II} \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II} + \sigma_{III} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III}$$

Les valeurs $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ sont alors appelées **contraintes principales** et par convention :

$$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$$

2.4. Loi de comportement élastique linéaire isotrope

Expérimentalement, on constate que pour de nombreux matériaux **la loi qui lie les contraintes et les déformations est linéaire** lorsque les déformations sont suffisamment faibles, assez peu sensible à de petites variations de température et de vitesse de déformation, et que ces petites déformations sont réversibles. Ces observations constituent les hypothèses de l'élasticité linéaire.

On montre que dans ce cas, et dans le cas où l'état de contraintes initial est nul et sans variation de température, on a une relation du type :

Equation fondamentale 2-4 : loi de comportement élastique linéaire

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

avec $\underline{\underline{A}}$: **tenseur des modules d'élasticité**, 81 coefficients dans le cas général

On montre facilement que sur les 81 composantes du tenseur des modules d'élasticité, seules 21 sont indépendantes. Dans le cas où le matériau peut être considéré **isotrope**, on réduit le nombre de coefficients à **deux** paramètres et on a :

Equation fondamentale 2-5 : loi élastique linéaire isotrope (loi de Hooke)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad : \lambda \text{ et } \mu \text{ sont appelés coefficients de Lamé}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad : E \text{ le module d'Young et } \nu \text{ le coefficient de Poisson}$$

On peut faire le lien entre ces différents paramètres d'après les relations :

$$\begin{cases} E = \mu \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda = E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

A retenir 2-10

Lors de l'essai de traction, le **module d'Young** correspond à la pente de la courbe $\sigma_{11} = f(\varepsilon_{11})$, et le **coefficient de Poisson** est un **coefficient de compaction transverse** qui lie la déformation dans une direction aux déformations dans les deux autres directions.

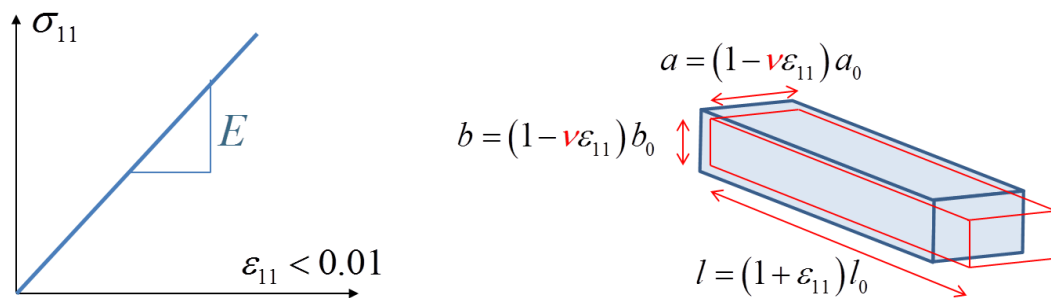


Figure 7: Interprétation du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν

2.5. Les équations fondamentales

L'application du principe fondamental de la statique à l'élément de volume ci-dessus permet rapidement de retrouver la propriété suivante :

Equation fondamentale 2-6

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \quad \text{soit} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad : \text{le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique}$$

Si on exprime l'équilibre de ce volume soumis à des forces extérieures de volume et de surface, on arrive également rapidement à l'**équation d'équilibre** qui constitue l'une des équations les plus importante de la MMC :

Equation fondamentale 2-7

$$\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{\underline{f}}^m - \underline{\underline{a}}) = \underline{\underline{0}} : \text{équation d'équilibre}$$

Enfin, l'introduction du Principe des Puissances Virtuelles (PPV) en cours de MMC (cf cours de 1A) a conduit à l'écriture du **théorème de l'énergie cinétique** pour un milieu continu, qui s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}(\underline{\underline{v}}) = \mathcal{P}_e(\underline{\underline{v}}) + \mathcal{P}_i(\underline{\underline{v}}) : \text{théorème de l'énergie cinétique}$$

→ $\mathcal{P}_e(\underline{\underline{v}})$ représente la puissance des efforts extérieurs, due aux efforts de volume et aux efforts de surface, de telle sorte que :

$$\mathcal{P}_e = \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{v}} da}_{\text{surface}} + \underbrace{\int_{\Omega_t} \rho \underline{\underline{f}}^m \cdot \underline{\underline{v}} d\Omega_t}_{\text{volume}}$$

→ $\mathcal{P}_i(\underline{\underline{v}})$ représente la puissance des efforts intérieurs, qui s'écrit :

$$\mathcal{P}_i(\underline{\underline{v}}) = - \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} d\Omega_t \text{ avec la vitesse de déformation } \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

→ $\mathcal{K}(\underline{\underline{v}})$ représente l'énergie cinétique du système.

Dans le cas d'un problème de **statique** en **HPP**, on arrive à l'expression suivante :

$$\mathcal{P}_e(\underline{\underline{v}}) = -\mathcal{P}_i(\underline{\underline{v}}) \Rightarrow \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{v}} da}_{\text{surface}} + \underbrace{\int_{\Omega_t} \rho \underline{\underline{f}}^m \cdot \underline{\underline{v}} d\Omega_t}_{\text{volume}} = \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} d\Omega_t$$

Cette équation permet d'introduire les notions de **travail des efforts intérieurs** et **extérieurs** si on tente de l'intégrer par rapport au temps :

$$\left(\int_{\partial\Omega_t} \underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{du}} da + \int_{\Omega_t} \rho \underline{\underline{f}}^m \cdot \underline{\underline{du}} d\Omega_t \right) dt = \left(\int_{\Omega_t} \left(\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) : d\underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega_t \right) dt$$

On introduit alors le travail des efforts intérieurs $\mathcal{W}_{\text{int}}$ et le travail des efforts extérieurs $\mathcal{W}_{\text{ext}}$ tels que :

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{u}} da + \int_{\Omega_t} \rho \underline{\underline{f}}^m \cdot \underline{\underline{u}} d\Omega_t}_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) d\Omega_t = \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\Omega_t} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) d\Omega_t}_{\mathcal{W}_{\text{int}}} \Rightarrow \mathcal{W}_{\text{int}} = \mathcal{W}_{\text{ext}}$$

Equation fondamentale 2-8

En statique , **travail des efforts intérieurs** $\mathcal{W}_{\text{int}}$ = **travail des efforts extérieurs** $\mathcal{W}_{\text{ext}}$

3. Exemple de résolution directe pour un treillis

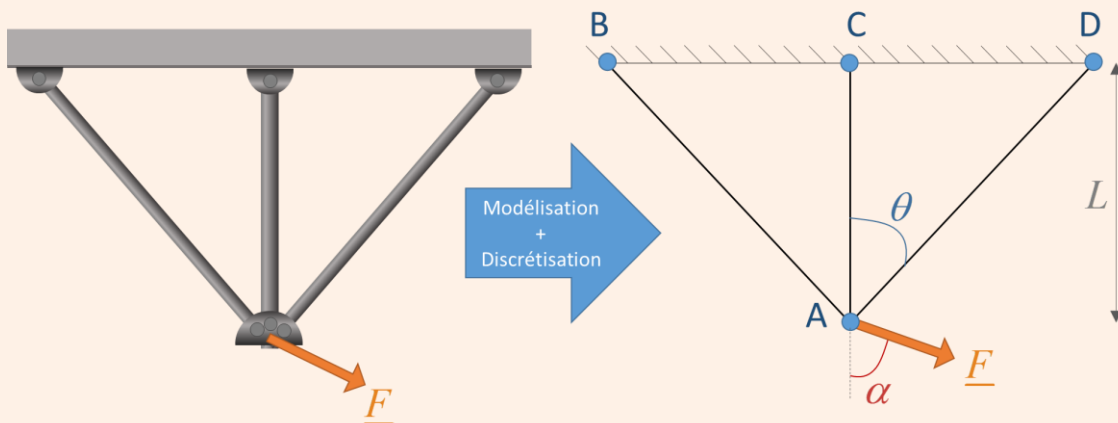
Pour illustrer la philosophie et les étapes incontournables de la résolution d'un problème d'élastostatique par la méthode des éléments finis, on se propose de chercher à **résoudre un cas concret**, plan et sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP). Ce cas sera facilement généralisable à tous les treillis composés de barres : nous verrons dans la section suivante comme la méthode est également **généralisable au cas d'un milieu continu en 3D**.

3.1. Discrétisation

Un des piliers de la modélisation par éléments finis consiste à **discrétiser** la géométrie du problème en une série d'éléments de bases appelés **éléments**.

Exemple du treillis plan hyperstatique

Considérons le montage suivant composé de trois pièces articulées, assemblées entre elles à une extrémité et en liaison pivot à l'autre extrémité. On applique un effort $\underline{F}$ **connu**, et on cherche à **connaître le déplacement au point d'application de cet effort**.



On peut modéliser le problème comme un ensemble de trois barres articulées entre elles au point A, et en liaison pivot aux points B, C et D. On peut décider de paramétrer la géométrie comme représenté ci-dessus : longueur de la barre centrale L , angle θ entre les barres et angle α entre l'effort et la verticale.

L'étape de discrétisation consiste à découper le système en un ensemble de géométries simples, appelés **éléments**, liés entre eux en des points appelés **nœuds**. On

se propose maintenant de décrire **le comportement de tout le système à partir du déplacement de ces nœuds uniquement**.

3.2. Fonction de forme

Exemple du treillis plan hyperstatique

Intéressons-nous désormais au comportement d'une seule des barres qui constituent le treillis ci-contre. On se place dans le repère de la barre, en on considère que chacune de ces extrémités possède **un seul degré de liberté** (leur déplacement dans la direction de la barre).

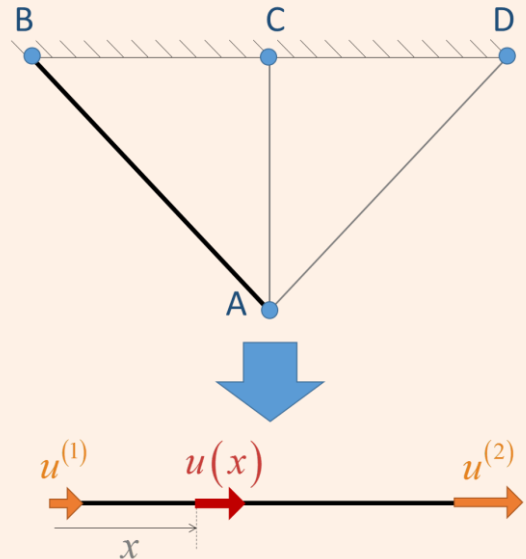
On appelle l la longueur de la barre, et $u(x)$ son déplacement. Ainsi, pour chaque barre on peut écrire une condition de type : $u(0) = u^{(1)}$ et $u(l) = u^{(2)}$.

On fait l'hypothèse (**forte !**) que l'évolution du déplacement est **linéaire** le long de cette barre. On peut alors écrire immédiatement :

$$\begin{cases} u(x) = \alpha + \beta x \\ u(0) = u^{(1)} \Rightarrow \alpha = u^{(1)} \\ u(l) = u^{(2)} \Rightarrow \beta = \frac{u^{(2)} - u^{(1)}}{l} \end{cases} \Rightarrow u(x) = u^{(1)} + \frac{u^{(2)} - u^{(1)}}{l} x$$

Une autre écriture de ce champ de déplacement le long d'une barre est celle-ci :

$$u(x) = u^{(1)} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + u^{(2)} \left(\frac{x}{l}\right) \quad \text{ou encore} \quad u(x) = \begin{pmatrix} N_1(x) = 1 - \frac{x}{l} & N_2(x) = \frac{x}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$$



En s'appuyant sur l'exemple ci-dessus, on vient de voir qu'à partir d'une hypothèse sur la forme du champ de déplacement (ici linéaire) et une hypothèse sur le nombre de degrés de liberté par nœuds (ici un seul) on a pu écrire le champ de déplacement **partout** sur les barres qui constituent le treillis en fonction du déplacement **de certains nœuds uniquement**. On introduit ici la notion de **fonctions de forme**, qui permet d'écrire le champ de déplacement :

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u^{(i)} \quad \text{avec } n \text{ le nombre de nœuds.}$$

On peut faire notamment les deux constats suivants :

- Il y a autant de fonctions de formes que de nœuds pour lesquels le déplacement est connu
- Si nous n'avions pas fait l'hypothèse d'une évolution linéaire du déplacement le long de la barre, les fonctions de forme auraient été différentes.
- La fonction de forme ainsi introduite est unitaire au nœud auquel elle fait référence, et nulle pour l'autre nœud.

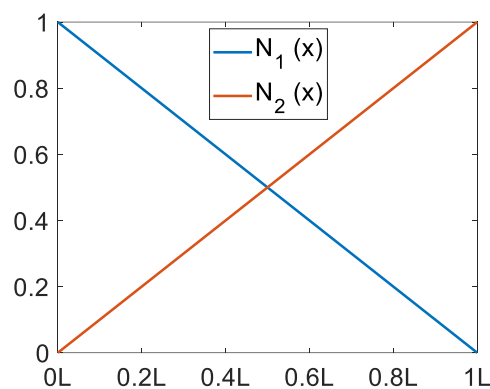


Figure 8: Fonctions de forme linéaire de l'élément à deux nœuds.

- Il est aussi possible d'écrire l'équation précédente sous forme matricielle :

$$u(x) = \begin{pmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$$

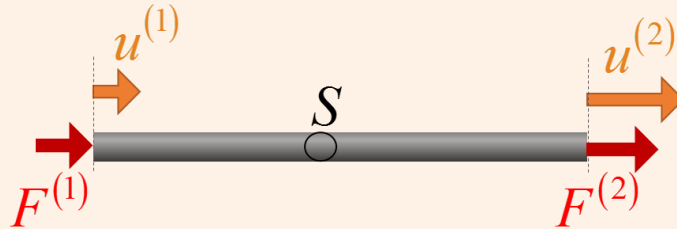
C'est cette dernière écriture qui sera largement utilisée plus tard lorsque nous généraliserons la démarche.

3.3. Comportement de l'élément

Pour un élément simple (ici constitué d'une barre, avec deux nœuds et un seul degré de liberté par nœud), nous allons tenter d'établir un lien entre la cinématique de l'élément (les déplacements aux nœuds) et les efforts extérieurs qui lui sont appliqués. Dans le cas général, c'est l'égalité entre le travail des efforts extérieurs et le travail des efforts intérieurs qui permettra d'établir ce lien. Pour cet élément simple, il est possible d'établir cette relation entre se rappelant juste du lien entre déformation et contrainte dans une barre en traction-compression.

Exemple du treillis plan hyperstatique

On considère à nouveau la barre précédente, de section S , soumise à deux efforts $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$ en chacun de ces nœuds dont les déplacements sont $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$. Si la barre est en équilibre, on a évidemment $F^{(1)} + F^{(2)} = 0$.



Peut-on écrire un lien entre les déplacements et les efforts en chacun des nœuds de cette barre ?

Dans le cas de cette éprouvette unidimensionnelle, soumise à de la traction simple, on peut évidemment appliquer la loi de Hooke telle que :

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{F}{S} = -\frac{F^{(1)}}{S} = \frac{F^{(2)}}{S} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{du(x)}{dx} + \frac{du(x)}{dx} \right) = \frac{du(x)}{dx}$$

Or, on a précédemment écrit la relation $u(x) = \sum_i^n N_i(x) u^{(i)}$.

Comme les déplacements aux nœuds ne dépendent pas de x on en déduit facilement la forme :

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{dN_1(x)}{dx} u^{(1)} + \frac{dN_2(x)}{dx} u^{(2)}$$

En utilisant les fonctions de formes précédentes il vient :

$$\begin{cases} N_1(x) = 1 - x/L \\ N_2(x) = x/L \end{cases} \Rightarrow \varepsilon = \frac{du(x)}{dx} = -\frac{1}{L} u^{(1)} + \frac{1}{L} u^{(2)} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$$

En reprenant la loi de Hooke on écrit donc :

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{F^{(2)}}{S} = E\varepsilon &\Rightarrow F^{(2)} = ES\varepsilon = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} \\ \sigma = -\frac{F^{(1)}}{S} = E\varepsilon &\Rightarrow F^{(1)} = -ES\varepsilon = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Enfin, si on veut écrire un système matriciel contenant les efforts aux nœuds $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$ en fonctions des déplacements aux nœuds $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$, on peut organiser l'équation précédente sous la forme :

$$\begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$$

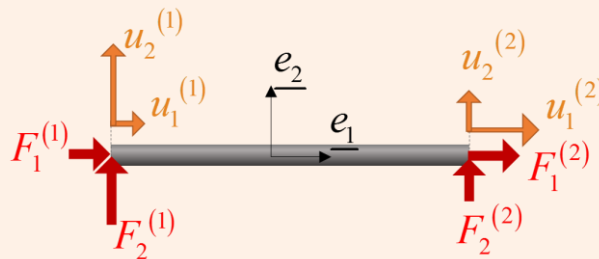
Pour un élément simple (ici constitué d'une barre, avec deux nœuds et un seul degré de liberté par nœud) nous venons de réussir à écrire un lien entre les **efforts** et les **déplacements** en chacun des nœuds de cet élément. Cette relation est **matricielle** et peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e$$

si on considère que $\mathbf{f}_e$ est un vecteur qui rassemble les efforts en chacun des nœuds (efforts **nodaux**), $\mathbf{u}_e$ est un vecteur qui rassemble les déplacements en chacun des nœuds de l'élément (déplacements **nodaux**), et $\mathbf{K}_e$ est une **matrice** appelé **matrice de rigidité de l'élément** et qui dépend de la géométrie de l'élément et des propriétés du matériau qui le constitue.

Exemple du treillis plan hyperstatique

On reprend le même cas que précédemment, avec cette fois deux déplacements possibles dans le plan, de telle sorte que le champ de déplacements s'écrit $\underline{u}(x) = u_1(x)\underline{e}_1 + u_2(x)\underline{e}_2$.



Ce qui a été écrit précédemment concernant les fonctions de formes s'extrapolent facilement (si on conserve l'hypothèse de linéarité du champ de déplacement le long de la barre), de telle sorte qu'on puisse maintenant écrire : $u_j(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_j^{(i)}$.

On peut alors introduire le vecteur $\mathbf{q}_e$ qui rassemble tous les degrés de liberté de l'élément :

$$\mathbf{q}_e^T = (u_1^{(1)} \quad u_2^{(1)} \quad u_1^{(2)} \quad u_2^{(2)})$$

Dans ce cas on écrit les deux composantes du champ de déplacement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1(x) & 0 & N_2(x) & 0 \\ 0 & N_1(x) & 0 & N_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{ou encore : } \mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e$$

En introduisant le vecteur $\mathbf{q}_e$ contenant les degrés de liberté de l'élément, on peut écrire le champ de déplacement sous la forme :

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e$$

Généralisation : on tentera dans la suite d'écrire le champ de déplacement au sein d'un élément à partir des degrés de liberté de chacun de ses nœuds, rassemblés dans le vecteur $\mathbf{q}_e$. Cette écriture est possible en utilisant la matrice des fonctions de forme de l'élément $\mathbf{N}_e$.

- la matrice $\mathbf{N}_e$ possède autant de lignes que la dimension du problème (1, 2 ou 3)
- la matrice $\mathbf{N}_e$ possède autant de colonnes que de degrés de liberté dans le problème

Exemple du treillis plan hyperstatique

On a écrit précédemment le comportement de l'élément « barre à deux nœuds », soumis à de la traction-compression uniquement, sous la forme :

$$\begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$$

Si on utilise le vecteur $\mathbf{q}_e$ contenant les degrés de liberté de l'élément barre, on peut alors écrire le système précédent sous la forme :

$$\begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{où } \times \text{ sont à déterminer.}$$

Or, pour que la barre soit en équilibre, il est nécessaire que les deux composantes $F_2^{(1)}$ et $F_2^{(2)}$ soient nulles (elles entraîneraient inévitablement un couple. On en déduit le système :

$$\begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{ou encore } \mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e$$

On vient donc d'écrire la **matrice de rigidité de l'élément barre en 2D** qui s'écrit :

$$\mathbf{K}_e = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Généralisation : on peut décrire le comportement d'un élément à travers l'écriture de sa **matrice de rigidité**, qui permet d'écrire le **vecteur des forces nodales** $\mathbf{f}_e$ en fonction du vecteur des **degrés de liberté** $\mathbf{q}_e$:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e$$

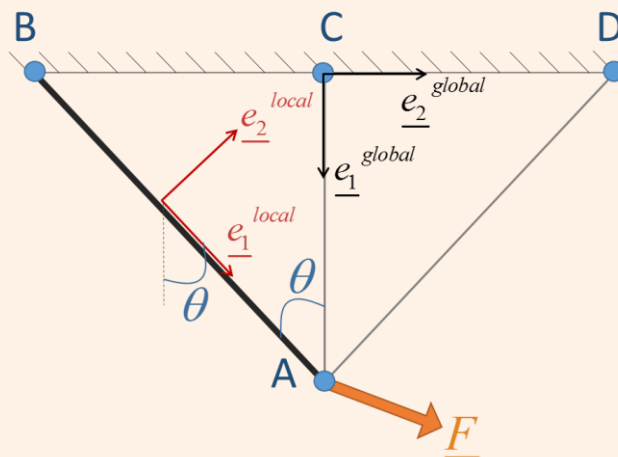
Dans la section 4, il s'agira de définir une démarche générale qui permet de déterminer cette matrice pour n'importe quel élément.

3.4. Passage au repère de la structure

Ce qui a été écrit en section précédente concerne le repère **local** de l'élément. Si l'on veut calculer le comportement **global** de la structure, il s'agit alors de réécrire ce qui précède dans un repère **global** commun à tous les éléments qui composent la structure.

Exemple du treillis plan hyperstatique

On se place maintenant à l'échelle de la structure globale, pour laquelle on peut définir un repère **global** noté $(\underline{e}_1^{global}, \underline{e}_2^{global})$ en opposition au repère **local** de l'élément noté $(\underline{e}_1^{local}, \underline{e}_2^{local})$.



Les vecteurs précédents $\mathbf{f}_e$ et $\mathbf{q}_e$ correspondent au repère de l'élément et peuvent donc être notés $\mathbf{f}_e^{local}$ et $\mathbf{q}_e^{local}$, et on cherche désormais à les exprimer dans la base $(\underline{e}_1^{global}, \underline{e}_2^{global})$.

Pour la barre AB on peut faire le changement de notation suivant :

$$(\mathbf{q}_e^{local})^T = (u_1^A \quad u_2^A \quad u_1^B \quad u_2^B)$$

Pour cette barre, la longueur est égale à $L/\cos \theta$.

On peut opérer facilement au changement de base suivant (on note $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$):

$$\begin{cases} (u_1^A)^{global} = u_1^A c - u_2^A s \\ (u_2^A)^{global} = u_1^A s + u_2^A c \\ (u_1^B)^{global} = u_1^B c - u_2^B s \\ (u_2^B)^{global} = u_1^B s + u_2^B c \end{cases} \Rightarrow (\mathbf{q}_e^{AB})^{global} = \underbrace{\begin{pmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_e^{AB}} \cdot (\mathbf{q}_e^{AB})^{local}$$

De la même façon on pourrait facilement changer de base le vecteur des forces nodales :

$$(\mathbf{f}_e^{AB})^{global} = \mathbf{T}_e^{AB} (\mathbf{f}_e^{AB})^{local}$$

Ainsi, si on reprend l'écriture de la matrice de rigidité de la barre AB dans le repère global :

$$(\mathbf{f}_e^{AB})^{local} = (\mathbf{K}_e^{AB})^{local} (\mathbf{q}_e^{AB})^{local} \Rightarrow (\mathbf{f}_e^{AB})^{global} = \underbrace{\mathbf{T}_e^{AB} (\mathbf{K}_e^{AB})^{local} (\mathbf{T}_e^{AB})^{-1}}_{(\mathbf{K}_e^{AB})^{global}} (\mathbf{q}_e^{AB})^{global}$$

On montre facilement que **dans le repère global** on a alors :

$$(\mathbf{f}_e^{AB})^{global} = (\mathbf{K}_e^{AB})^{global} (\mathbf{q}_e^{AB})^{global} \text{ avec } (\mathbf{K}_e^{AB})^{global} = \frac{E^{AB} S^{AB}}{L/c} \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix}$$

On effectuant la même démarche pour les autres barres on trouve :

$$(\mathbf{K}_e^{AC})^{global} = \frac{E^{AC} S^{AC}}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (\mathbf{K}_e^{AD})^{global} = \frac{E^{AD} S^{AD}}{L/c} \begin{pmatrix} c^2 & -cs & -c^2 & cs \\ -cs & s^2 & cs & -s^2 \\ -c^2 & cs & c^2 & -cs \\ cs & -s^2 & -cs & s^2 \end{pmatrix}$$

Généralisation : pour chaque élément, la matrice de raideur qui a été écrite dans le **repère local de l'élément** peut être également écrite dans un **repère global propre à la structure**, en suivant l'équation :

$$\mathbf{K}_e^{global} = \mathbf{T}_e \mathbf{K}_e^{local} \mathbf{T}_e^{-1}$$

où $\mathbf{T}_e$ est la matrice de passage qui permet de passer de $\mathbf{q}_e^{local}$ à $\mathbf{q}_e^{global}$.

3.5. Assemblage des matrices élémentaires

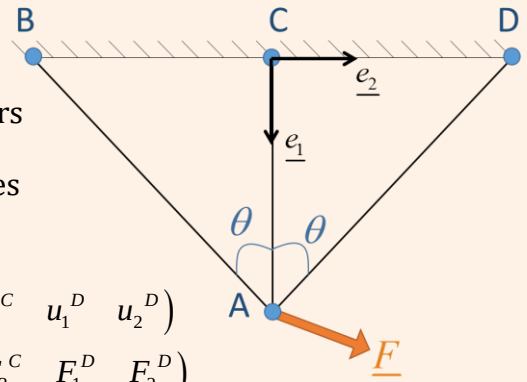
Dans la section précédente, nous avons écrit les matrices de rigidité de chaque élément qui constitue la structure. Il s'agit maintenant de tenter de décrire les liens qui existent entre les différents éléments de la structure, en tentant d'écrire une matrice de rigidité structurale.

Exemple du treillis plan hyperstatique

Dans la suite on se place uniquement dans le repère global de la structure. On peut alors écrire les vecteurs $\mathbf{q}_s$ et $\mathbf{f}_s$ contenant les degrés de liberté de la structure et les forces nodales de la structure respectivement :

$$\mathbf{q}_s^T = (u_1^A \quad u_2^A \quad u_1^B \quad u_2^B \quad u_1^C \quad u_2^C \quad u_1^D \quad u_2^D)$$

$$\mathbf{f}_s^T = (F_1^A \quad F_2^A \quad F_1^B \quad F_2^B \quad F_1^C \quad F_2^C \quad F_1^D \quad F_2^D)$$



Or, des relations entre ces différents efforts et ces différents degrés de libertés ont déjà été écrits dans la section précédente. Par exemple, pour la barre AB on avait écrit :

$$\mathbf{K}_e^{AB} = \frac{E^{AB} S^{AB}}{L/c} \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_1^A = \frac{E^{AB} S^{AB}}{L/c} (c^2 u_1^A + cs u_2^A - c^2 u_1^B - cs u_2^B) \\ F_2^A = \frac{E^{AB} S^{AB}}{L/c} (cs u_1^A + s^2 u_2^A - cs u_1^B - s^2 u_2^B) \\ \dots \end{cases}$$

En combinant ces différentes expressions on peut formuler la matrice de rigidité **globale** suivante en **assemblant** toutes les matrices précédentes :

$$\begin{pmatrix} F_1^A \\ F_2^A \\ F_1^B \\ F_2^B \\ F_1^C \\ F_2^C \\ F_1^D \\ F_2^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^{AB} + \mathbf{K}_{11}^{AC} + \mathbf{K}_{11}^{AD} & \mathbf{K}_{12}^{AB} + \mathbf{K}_{12}^{AC} + \mathbf{K}_{12}^{AD} & \mathbf{K}_{13}^{AB} & \mathbf{K}_{14}^{AB} & \mathbf{K}_{13}^{AC} & \mathbf{K}_{14}^{AC} & \mathbf{K}_{13}^{AD} & \mathbf{K}_{14}^{AD} \\ \mathbf{K}_{21}^{AB} + \mathbf{K}_{21}^{AC} + \mathbf{K}_{21}^{AD} & \mathbf{K}_{22}^{AB} + \mathbf{K}_{22}^{AC} + \mathbf{K}_{22}^{AD} & \mathbf{K}_{23}^{AB} & \mathbf{K}_{24}^{AB} & \mathbf{K}_{23}^{AC} & \mathbf{K}_{24}^{AC} & \mathbf{K}_{23}^{AD} & \mathbf{K}_{24}^{AD} \\ & & \mathbf{K}_{33}^{AB} & \mathbf{K}_{34}^{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathbf{K}_{43}^{AB} & \mathbf{K}_{44}^{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & \mathbf{K}_{33}^{AC} & \mathbf{K}_{34}^{AC} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & \mathbf{K}_{43}^{AC} & \mathbf{K}_{44}^{AC} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{33}^{AD} & \mathbf{K}_{34}^{AD} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{43}^{AD} & \mathbf{K}_{44}^{AD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_1^B \\ u_2^B \\ u_1^C \\ u_2^C \\ u_1^D \\ u_2^D \end{pmatrix}$$

Les différents termes de cette matrice (représentés par des couleurs différentes) viennent des trois différentes barres de la structure.

Généralisation : il est possible d'écrire une matrice de rigidité **globale** de la structure, qui contient les différents termes des matrices de rigidités **locales** de chaque élément, de telle sorte que le comportement de la structure s'écrive :

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s$$

3.6. Conditions aux limites

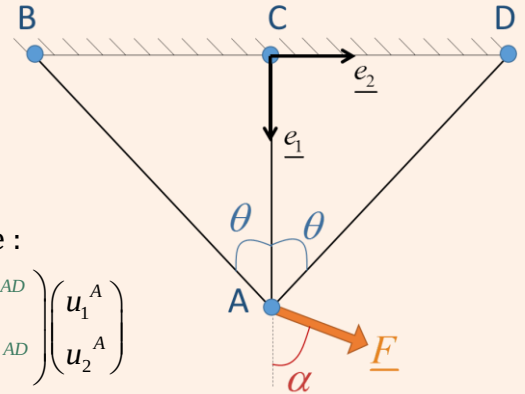
Lors de la démarche précédente, nous n'avons pas pris en compte les conditions aux limites de la structure, qui impose en général que certains des **efforts nodaux** ou des **degrés de liberté nodaux** sont nuls (ou imposés).

Exemple du treillis plan hyperstatique

Dans la structure ci-contre, les deux degrés de liberté des points B,C et D sont nuls en raison des liaisons pivot.

On peut donc s'intéresser davantage au point A où les deux degrés de liberté sont inconnus, et pour lequel on a le système :

$$\begin{pmatrix} F_1^A = F \cos \alpha \\ F_2^A = F \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}^{AB} + K_{11}^{AC} + K_{11}^{AD} & K_{12}^{AB} + \cancel{K_{12}^{AC}} + K_{12}^{AD} \\ K_{21}^{AB} + \cancel{K_{21}^{AC}} + K_{21}^{AD} & K_{22}^{AB} + \cancel{K_{22}^{AC}} + K_{22}^{AD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix}$$



On reprenant les différentes expressions précédentes on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} F \cos \alpha \\ F \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} E^{AB} S^{AB} c^3 + E^{AC} S^{AC} + E^{AD} S^{AD} c^3 & E^{AB} S^{AB} c^2 s - E^{AD} S^{AD} c^2 s \\ E^{AB} S^{AB} c^2 s - E^{AD} S^{AD} c^2 s & E^{AB} S^{AB} c s^2 + E^{AD} S^{AD} c s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} F \cos \alpha \\ F \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} E^{AC} S^{AC} + (E^{AD} S^{AD} + E^{AB} S^{AB}) c^3 & (E^{AB} S^{AB} - E^{AD} S^{AD}) c^2 s \\ (E^{AB} S^{AB} - E^{AD} S^{AD}) c^2 s & (E^{AB} S^{AB} + E^{AD} S^{AD}) c s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix}$$

Dans ce système de deux équations, les deux inconnues sont u_1^A et u_2^A (car $\underline{F}$ est imposé). Il sera donc possible de déterminer les deux inconnues.

L'écriture des conditions aux limites permet d'écrire : $u_1^B = u_2^B = u_1^C = u_2^C = u_1^D = u_2^D = 0$

Ces conditions nous permettent d'écrire les équations suivantes :

$$\begin{cases} F_1^B = K_{31}^{AB} u_1^A + K_{32}^{AB} u_2^A + \cancel{K_{33}^{AB} u_1^B} + \cancel{K_{34}^{AB} u_2^B} \\ F_2^B = K_{41}^{AB} u_1^A + K_{42}^{AB} u_2^A + \cancel{K_{43}^{AB} u_1^B} + \cancel{K_{44}^{AB} u_2^B} \\ F_1^C = K_{31}^{AC} u_1^A + K_{32}^{AC} u_2^A + \cancel{K_{33}^{AC} u_1^C} + \cancel{K_{34}^{AC} u_2^C} \\ F_2^C = K_{41}^{AC} u_1^A + K_{42}^{AC} u_2^A + \cancel{K_{43}^{AC} u_1^C} + \cancel{K_{44}^{AC} u_2^C} \\ F_1^D = K_{31}^{AD} u_1^A + K_{32}^{AD} u_2^A + \cancel{K_{33}^{AD} u_1^D} + \cancel{K_{34}^{AD} u_2^D} \\ F_2^D = K_{41}^{AD} u_1^A + K_{42}^{AD} u_2^A + \cancel{K_{43}^{AD} u_1^D} + \cancel{K_{44}^{AD} u_2^D} \end{cases}$$

Dans ce système d'équations, les 6 inconnues sont les efforts de liaison aux points B,C et D si on considère que les déplacements u_1^A et u_2^A peuvent être déterminés à partir du système précédent.

3.7. Résolution

Lorsqu'un système sous la forme $\mathbf{f}_s = \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s$ a été écrit, et les conditions aux limites prises en compte pour ce qui concerne les déplacements nodaux et forces nodales, il est en général possible de déterminer les degrés de liberté inconnus en écrivant :

$$\mathbf{q}_s = \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{f}_s : \text{méthode dite } \textit{directe}$$

Cette expression n'est évidemment possible que si la matrice de rigidité globale est inversible. On remarque notamment les points suivants en ce qui concerne cette matrice :

- elle est nécessairement symétrique
- suivant la **numérotation** des nœuds utilisée (c-à-d la constitution du vecteur $\mathbf{q}_s$),

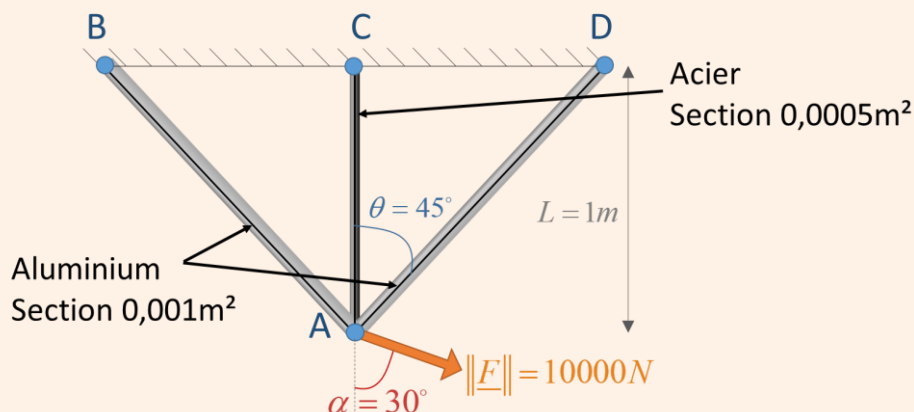
la matrice sera plus ou moins structurée *autour de la diagonale*. Dans la pratique, plus la matrice de rigidité sera centrée autour de la diagonale, moins la résolution de cette équation sera coûteuse en calculs. Il existe évidemment différentes méthodes numériques pour effectuer cette résolution, qui ne seront pas détaillées ici.

Exemple du treillis plan hyperstatique

On a écrit précédemment le système d'équations suivant, pour lequel une résolution directe par inversion de la matrice de rigidité est envisageable :

$$\begin{pmatrix} F \cos \alpha \\ F \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} E^{AC} S^{AC} + (E^{AD} S^{AD} + E^{AB} S^{AB}) c^3 & (E^{AB} S^{AB} - E^{AD} S^{AD}) c^2 s \\ (E^{AB} S^{AB} - E^{AD} S^{AD}) c^2 s & (E^{AB} S^{AB} + E^{AD} S^{AD}) c s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix}$$

On va considérer par exemple que les deux barres sont inclinées à 45° , sont en aluminium de section 0.001m^2 tandis que la barre verticale est en acier de section 0.0005m^2 et d'une longueur d' 1m . On considère un effort de 10000N incliné à 30° par rapport à la verticale.



La résolution est directe (ici avec Matlab):

```
theta=pi/4;c=cos(theta);s=sin(theta);
alpha=pi/6;
E_AC=210e9;%acier E=210GPa= 210e9N/m²
E_AB=70e9;%alu E=70GPa=70e9N/m²
E_AD=E_AB;%alu
S_AC=0.0005;%en m²
S_AB=0.001;%en m²
S_AD=S_AB;
F=10000;% en N
L=1;%en m
F_s=[F*cos(alpha);F*sin(alpha)];
K_s=(1/L)*[E_AC*S_AC+(E_AD*S_AD+E_AB*S_AB)*c^3 (E_AB*S_AB-E_AD*S_AD)*c*c*s;...
(E_AB*S_AB-E_AD*S_AD)*c*c*s (E_AD*S_AD+E_AB*S_AB)*c*s*s];
u=inv(K_s)*(F_s);
```

On détermine dans ce cas les deux degrés de liberté : $\begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.056054 \times 10^{-3} m = 56.054 \mu m \\ 0.101015 \times 10^{-3} m = 101.015 \mu m \end{pmatrix}$

On tentera de retrouver cette valeur en utilisant le code Abaqus durant le **TP1**.

4. Extension au cas général en HPP

Dans le cas précédent, nous avons pu formuler le comportement des éléments barres à partir de leur comportement unidimensionnel simple $\sigma = E\varepsilon$. Dans le cas général, il s'agit de formuler une approche permettant d'exprimer le comportement (c'est-à-dire les matrices de rigidité) des éléments : on va introduire pour cela la notion **d'énergie potentielle totale**.

4.1. L'énergie potentielle totale

On a vu durant les rappels en introduction de ce cours (section 2.5) que pour un problème de statique on avait :

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \underline{t} \cdot \underline{u} \, da + \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m \cdot \underline{u} \, d\Omega_t}_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) d\Omega_t = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega_t} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) \, d\Omega_t}_{\mathcal{W}_{\text{int}}} \Rightarrow \mathcal{W}_{\text{int}} = \mathcal{W}_{\text{ext}}$$

Ainsi, la solution **exacte** au problème l'élastostatique est telle qu'on a équilibre entre le travail des efforts intérieurs et extérieurs : $\mathcal{W}_{\text{int}} = \mathcal{W}_{\text{ext}}$.

Cette égalité est vérifiée pour le champ de déplacement **réel** $\underline{u}$.

On peut introduire dès maintenant la notion **d'énergie potentielle totale** associé au champ de déplacement $\underline{u}$, qui s'écrit comme la différence du travail des efforts intérieurs $\mathcal{W}_{\text{int}}$ et du travail des efforts extérieurs $\mathcal{W}_{\text{ext}}$:

$$\Pi(\underline{u}) = \mathcal{W}_{\text{int}}(\underline{u}) - \mathcal{W}_{\text{ext}}(\underline{u})$$

Si on calcule cette quantité pour n'importe quel champ $\underline{u}$, on observe que l'équilibre du système est obtenu lorsque cette énergie est **minimale**. Elle est alors stationnaire et on peut écrire :

$$\forall \delta \underline{u} \quad , \quad \delta \Pi(\delta \underline{u}) = 0$$

Ainsi, si on a le choix entre plusieurs champs de déplacements, celui qui sera le plus proche du champ de déplacements réel sera celui qui assure $\delta \Pi(\delta \underline{u}) = 0$.

La **stationnarité de l'énergie potentielle totale** est schématisée ci-dessous (Figure 9).

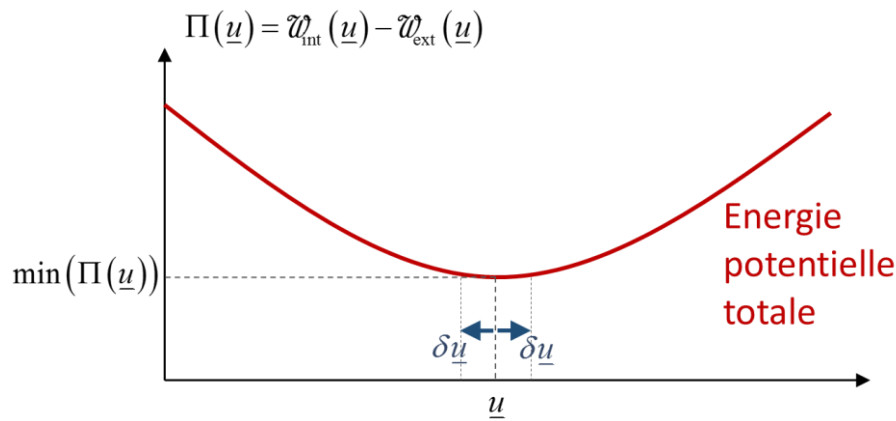
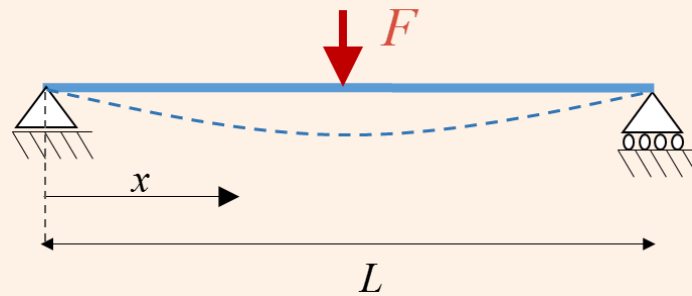


Figure 9: principe de l'énergie potentielle totale minimale.

Exemple 4-1

On cherche à connaître la déformée d'une poutre sur deux appuis soumise à une charge ponctuelle. On hésite entre une déformée de type **polynomiale** du second degré, et une autre de type **sinusoïdale**. Quelle est celle qui correspond le mieux à la réalité ?



Les deux allures doivent respecter les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$$

On propose ainsi les deux formes suivantes :

$$u^{\text{polynomiale}}(x) = u_{\max} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

$$u^{\text{sinusoïdale}}(x) = u_{\max} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

La théorie des poutres nous dit qu'en flexion, la déformation s'écrit : $\varepsilon = -y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

On en déduit pour les deux formes proposées :

$$\varepsilon^{\text{polynomiale}}(x) = y \frac{2}{L^2} u_{\max} \quad \varepsilon^{\text{sinusoïdale}}(x) = y \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) u_{\max}$$

On calcule ainsi l'énergie potentielle totale en écrivant :

$$\Pi(u) = \mathcal{W}_{\text{int}}(u) - \mathcal{W}_{\text{ext}}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \sigma \varepsilon(x) d\Omega_t - Fu_{\text{max}} = \frac{1}{2} \int \int_{dS} E \varepsilon^2(x) dS dx - Fu_{\text{max}}$$

En effectuant le calcul dans les deux cas on trouve :

$$\Pi^{\text{polynomiale}}(u) = \frac{2EI}{L^3} u_{\text{max}}^2 - Fu_{\text{max}} \quad \text{avec } I \text{ le moment quadratique de la poutre.}$$

$$\Pi^{\text{sinusoïdale}}(u) = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} u_{\text{max}}^2 - Fu_{\text{max}}$$

Si le système est en équilibre alors l'énergie potentielle totale doit être stationnaire et donc :

$$\delta \Pi^{\text{polynomiale}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{4EI}{L^3} u_{\text{max}} - F \right) \delta u_{\text{max}} = 0$$

$$\delta \Pi^{\text{sinusoïdale}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\pi^4 EI}{2L^3} u_{\text{max}} - F \right) \delta u_{\text{max}} = 0$$

Cette équation doit être valide pour toute perturbation δu_{max} et on déduit les deux flèches maximales suivantes :

$$u_{\text{max}}^{\text{polynomiale}} = \frac{FL^3}{4EI} \quad u_{\text{max}}^{\text{sinusoïdale}} = \frac{2FL^3}{\pi^4 EI}$$

Le champ de déplacement le plus réaliste est celui qui minimise l'énergie potentielle totale, et on doit donc calculer laquelle des deux énergies est la plus petite. On trouve :

$$\Pi^{\text{polynomiale}}(u) = -\frac{F^2 L^3}{8EI} > \Pi^{\text{sinusoïdale}}(u) = -\frac{F^2 L^3}{\pi^4 EI}$$

On en déduit donc que la forme sinusoïdale est plus proche de la réalité. En réalité, la théorie des poutres nous donne la valeur de la flèche maximale $u_{\text{max}} = \frac{FL^3}{48EI}$.

On observe que cette valeur est différente des précédentes : la forme polynomiale donne une erreur d'environ 1100% (!), tandis que la forme sinusoïdale conduit à une erreur de seulement -1.4%.

4.2. Discrétisation et maillage

Comme dans le cas du treillis précédent (section 3.1), on va chercher à discrétiser la géométrie du problème (1D, 2D ou 3D) en la découpant en sous-domaines appelés **éléments**. Les connexions entre ces différents éléments seront comme précédemment appelées des **nœuds**, et l'ensemble de ces éléments formera ce qu'on appellera le **maillage**. Suivant que le problème soit 1D, 2D ou 3D, on trouvera évidemment des éléments de nature différentes :

- éléments 1D : principalement barres (traction/compression uniquement) et poutres (traction/compression + flexion + torsion)

- éléments 2D : élasticité plane, problème axisymétrique ou modélisation des membranes et coques minces
- éléments 3D : solides massifs

A retenir 4-1

La qualité des résultats de la méthode des éléments finis **dépend fortement de la qualité et de la finesse du maillage** : il convient en général de quantifier l'effet de la taille du maillage sur les résultats avant de conclure !

4.3. Les différents types d'éléments

Il existe de nombreux types d'éléments finis, et de nombreuses façons de les cataloguer. On se contentera ici de dissocier la notion de **famille** d'éléments (1D, 2D, 3D) et la notion de **degré d'interpolation** (restreint à 1 ou 2 dans ce cours).

Dans le tableau ci-dessous (Tableau 1), on présente les éléments qui sont couramment utilisés.

Dans une seconde partie du cours, nous verrons qu'il existe des subtilités supplémentaires (intégration réduite ou complète, modes incompatibles, ...).

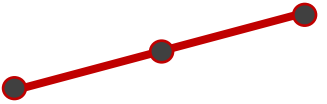
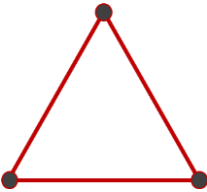
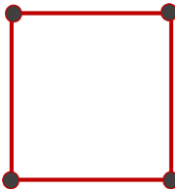
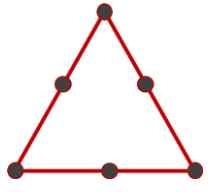
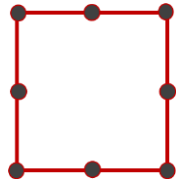
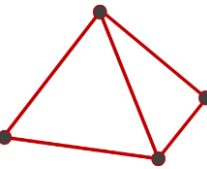
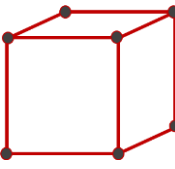
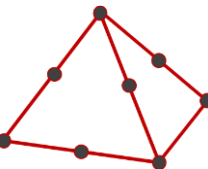
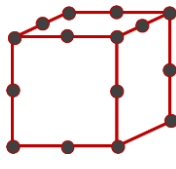
	Degré 1 (linéaire)		Degré 2 (quadratique)	
1D				
2D	 triangle	 quadrangle	 triangle	 quadrangle
3D	 tétraèdre	 hexaèdre	 tétraèdre	 hexaèdre

Tableau 1 : Types d'éléments linéiques, plans et volumiques.

Le choix du type d'éléments se fait en fonction essentiellement de la nature du problème (1D, 2D, 3D, axisymétrique) et de la complexité de la forme à mailler.

Si on a le doute entre des éléments triangulaires (ou tétraédriques) et des éléments quadrangulaires (ou hexaédriques), on pourra se rappeler des avantages et inconvénients de chacun de ces éléments :

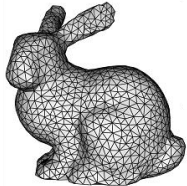
Triangles Tétraèdres 		Quadrangles Hexaèdres 	
+	- maillage facile pour des géométries complexes - peu sensibles à la distorsion de l'élément	+	- qualité du résultat équivalent à moindre coût en calcul (vitesse de convergence élevée)
-	- vitesse de convergence lente au raffinement du maillage - éléments du premier degré sont excessivement rigides - blocages pour des matériaux incompressibles	-	- sensible à la distorsion du maillage - maillage difficile à réaliser pour des géométries complexes - attention aux modes incompatibles (voir section 4.10)

Tableau 2: Avantages et inconvénients de maillages tri (tétra) et quadra (héxa).

4.4. Interpolation et fonctions de forme

La philosophie générale de l'interpolation par des fonctions de forme a été introduite en section 3.2. Ainsi, l'idée est de décrire le champ de déplacement partout sur un élément à partir des déplacements des déplacements des **nœuds** de l'élément uniquement, en utilisant les **fonctions de forme** ou **fonction d'interpolation** suivantes :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\underline{x}) \underline{u}^{(i)} \quad \text{avec } n \text{ le nombre de nœuds.}$$

Les fonctions de forme peuvent être linéaires ou polynomiales suivant le degré d'interpolation choisi. Si on note $\underline{x}^{(i)}$ la position du nœud i , ces fonctions doivent respecter les conditions :

$$N_i(\underline{x}^{(j)}) = \begin{cases} 1 & \text{au nœud } i = j \\ 0 & \text{aux nœuds } i \neq j \end{cases}$$

On se propose d'illustrer le concept de fonctions de formes en traçant les fonctions de formes de l'élément **quadrangulaire (2D)**, linéaire ou quadratique.

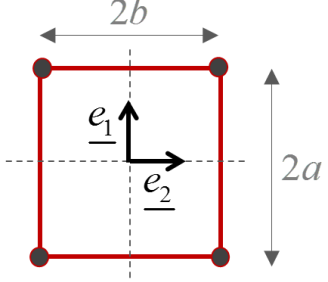
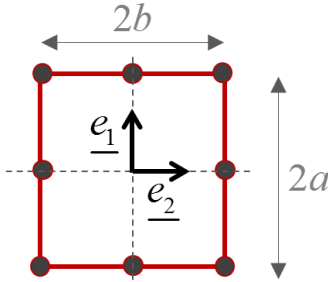
Elément quadrangulaire à 4 nœuds (linéaire)		$N_1 = (b - x_2)(a - x_1) / 4ab$ $N_2 = (b - x_2)(a + x_1) / 4ab$ $N_3 = (b + x_2)(a + x_1) / 4ab$ $N_4 = (b + x_2)(a - x_1) / 4ab$
Elément quadrangulaire à 8 nœuds (quadratiques)		$N_1 = -(b - x_2)(a - x_1)(1 + x_1/a + x_2/b) / 4ab$ $N_2 = -(b - x_2)(a + x_1)(1 - x_1/a + x_2/b) / 4ab$ $N_3 = -(b + x_2)(a + x_1)(1 - x_1/a - x_2/b) / 4ab$ $N_4 = -(b + x_2)(a - x_1)(1 + x_1/a - x_2/b) / 4ab$ $N_5 = (b - x_2)(a - x_1)(a + x_1) / 2a^2b$ $N_6 = (a + x_1)(b - x_2)(b + x_2) / 2ab^2$ $N_7 = (b + x_2)(a - x_1)(a + x_1) / 2a^2b$ $N_8 = (a - x_1)(b - x_2)(b + x_2) / 2ab^2$

Tableau 3: Fonctions de forme pour les éléments quadrangulaires à 4 et 8 nœuds.

Il existe de nombreuses méthodes pour construire les fonctions de forme (Serendip, polynômes de Lagrange, polynômes d'Hermite, etc...) que nous ne précisons pas dans ce cours.

On se propose comme précédemment (section 3.3) d'introduire le vecteur $\mathbf{q}_e$ contenant tous les degrés de libertés de l'élément. En 3D, ce vecteur prend la forme :

$$\mathbf{q}_e^T = (u_1^{(1)} \quad u_2^{(1)} \quad u_3^{(1)} \quad u_1^{(2)} \quad u_2^{(2)} \quad u_3^{(2)} \quad \dots \quad u_1^{(n)} \quad u_2^{(n)} \quad u_3^{(n)})$$

On peut donc introduire une matrice des fonctions de forme $\mathbf{N}_e$ contenant les fonctions de formes associées aux différents nœuds, de telle sorte que :

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \\ \dots \\ u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ u_3^{(n)} \end{pmatrix}$$

qu'on peut aussi noter sous la forme plus compacte : $\mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e$

Le champ de déplacements dans l'élément s'écrit donc :

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e$$

La matrice $\mathbf{N}_e$ contient autant de lignes que de nombre de champs du problème (une, deux ou trois dimensions spatiales... mais éventuellement d'autres champs comme la température) et autant de colonnes que de degrés de liberté de l'élément.

4.5. Matrices élémentaires

4.5.1. Expression des déformations

Dans le cas élastique linéaire, les déformations se calculent évidemment à partir des déplacements :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \mathbf{u} + (\underline{\underline{Grad}} \mathbf{u})^T \right)$$

Si on décide d'organiser dans un vecteur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ les composantes du tenseur des déformations, on peut écrire l'équation précédente sous forme matricielle (en 3D) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\underline{x}) \\ u_2(\underline{x}) \\ u_3(\underline{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{u}_e$$

De plus, si on prend en compte l'écriture précédente $\mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{q}_e$, on peut écrire les déformations sous la forme matricielle :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{D} \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e$$

- la matrice $\mathbf{B}_e$ contient les dérivées des fonctions de forme, et ses composantes sont donc indépendantes des déplacements.
- la matrice $\mathbf{D}$ contient les opérateurs des dérivées partielles
- la matrice $\mathbf{N}_e$ est la matrice des fonctions de forme de l'élément

La matrice $\mathbf{B}_e$ contient autant de lignes que de nombres de composantes indépendantes dans $\boldsymbol{\varepsilon}$ (6 en 3D et 2 en 2D), et autant de colonnes que de nombres de degrés de libertés de l'élément.

4.5.2. Expression des contraintes

En élasticité isotrope, on a rappelé précédemment (section 2.4) que la loi de Hooke permettait d'écrire une relation sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}$$

où les vecteurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ contiennent les composantes indépendantes des tenseurs des contraintes et de déformations (6 en 3D en raison de la symétrie). La matrice d'élasticité $\mathbf{A}$ (6x6 en 3D) contient les différentes propriétés matérielles de l'élément. Dans le cas de l'élasticité linéaire **isotrope** par exemple, on a la relation :

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

En intégrant le fait que $\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e$ on arrive naturellement à l'équation matricielle :

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{A} \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e$$

4.5.3. Matrice de rigidité de l'élément

Pour exprimer une forme générale pour la matrice de rigidité de l'élément, on se réfère à la stationnarité de l'énergie potentielle totale énoncée en section 4.1. On a écrit dans cette section :

$$\Pi(\underline{u}) = \mathcal{W}_{\text{int}}(\underline{u}) - \mathcal{W}_{\text{ext}}(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \left(\left(\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) d\Omega_t - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t} \cdot \underline{u} da - \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m \cdot \underline{u} d\Omega_t$$

$$\text{et la stationnarité : } \forall \delta \underline{u}, \quad \delta \Pi(\delta \underline{u}) = 0$$

On peut réécrire cette équation pour un **élément** sous forme **matricielle**, en utilisant les différentes notations précédentes (en utilisant $\mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}$):

$$\Pi_e(\mathbf{u}_e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_e d\Omega_t - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^S da - \int_{\Omega_t} \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^V d\Omega_t$$

On introduit dans ce cas deux nouveaux vecteurs : les forces surfaciques $\mathbf{f}_e^S$ et les forces volumiques $\mathbf{f}_e^V$. Si on considère une perturbation sous la forme $\delta \mathbf{q}_e$, on écrit alors la variation correspondante d'énergie potentielle totale :

$$\delta \Pi_e = \int_{\Omega_t} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_e d\Omega_t - \int_{\partial\Omega_t} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^S da - \int_{\Omega_t} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^V d\Omega_t$$

Dans cette expression on peut écrire $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e \cdot \delta \mathbf{q}_e$ et $\delta \mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e \cdot \delta \mathbf{q}_e$. De plus, le terme $\mathbf{q}_e$ peut sortir de l'intégrale de volume car ne dépend pas de la position et donc :

$$\delta \Pi_e = \int_{\Omega_t} \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t \mathbf{q}_e - \int_{\partial\Omega_t} \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^S da - \int_{\Omega_t} \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^V d\Omega_t$$

On peut factoriser dans cette expression le terme $\delta \mathbf{q}_e^T$, qui est arbitraire. Par conséquent on obtient l'équation fondamentale :

$$\delta \Pi_e = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t \mathbf{q}_e - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^S da - \int_{\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^V d\Omega_t$$

Si on écrit enfin qu'à l'équilibre on doit avoir $\delta \Pi = 0$ alors on arrive à l'expression :

$$\underbrace{\int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{q}_e = \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^S da + \int_{\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^V d\Omega_t}_{\mathbf{f}_e} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e$$

→ la matrice $\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t$ est la **matrice de rigidité de l'élément**.

C'est une matrice carrée qui contient autant de lignes (et de colonnes) que le nombre de degrés de libertés de l'élément

→ le vecteur $\mathbf{q}_e$ contient tous les degrés de libertés de l'élément

→ le vecteur $\mathbf{f}_e$ est le vecteur des **forces nodales équivalentes** qui contient tous les types d'efforts extérieurs (volumiques et surfaciques) appliqués à l'élément.

Exemple de la barre à deux noeuds

Pour l'élément « barre à deux noeuds », on a précédemment (3.3) identifié la matrice de rigidité :

$$\mathbf{K}_e = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Peut-on la retrouver en effectuant la démarche ci-dessus ?

On se propose alors de calculer le terme $\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t$ dans ce cas 1D de la barre en traction.

On a tout d'abord la matrice d'élasticité de l'élément qui lie les contraintes et les déformations.

Ici en 1D, les matrices $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon$ et $\boldsymbol{\sigma} = \sigma$ se limitent à des scalaires et on a $\boldsymbol{\sigma} = E\boldsymbol{\varepsilon}$ d'où : $\mathbf{A} = E$

La matrice $\mathbf{B}$ est le produit de la matrice des dérivées et la matrices des fonctions de forme :

$$\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_e = \begin{pmatrix} N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} & N_2(x) = \frac{x}{L} \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{B}_e = \mathbf{D} \mathbf{N}_e = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On calcule donc le produit : } \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot E \cdot \frac{1}{L} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{E}{L^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il reste à intégrer cette expression sur le volume :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t = L \times S \times \frac{E}{L^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{CQFD !}$$

4.6. Passage au repère de la structure

De la même façon que pour le treillis plan (voir section 3.4) les vecteurs des degrés de libertés $\mathbf{q}_e$ écrits indépendamment dans le repère lié à chacun des **éléments** doivent être écrits dans le repère global de la **structure**, afin de pouvoir écrire ensuite l'équilibre global de la structure.

Comme précédemment, on peut alors écrire :

$$\mathbf{K}_e^{global} = \mathbf{T}_e \mathbf{K}_e^{local} \mathbf{T}_e^{-1}$$

où $\mathbf{T}_e$ est la matrice de passage qui permet de passer de $\mathbf{q}_e^{local}$ à $\mathbf{q}_e^{global}$.

4.7. Assemblage des matrices élémentaires

Chaque élément de la structure montre le comportement :

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_e$$

Comme précédemment (section 3.5), il s'agit désormais de définir l'**assemblage** entre les différents éléments de la structure en décrivant les **connexions aux nœuds** de la structure. On introduit alors la matrice de sélection $\mathbf{S}_e$ (qui contient des 0 et des 1), de telle sorte qu'on peut décrire tous les degrés de liberté de la structure (dans le repère de la structure) sous la forme : $\mathbf{q}_e = \mathbf{S}_e \mathbf{q}_s$. On peut remonter aux vecteurs dans le repère de l'élément en opérant la transformation : $\mathbf{q}_e^{local} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{S}_e \mathbf{q}_s$

Or, on a écrit précédemment qu'à l'échelle de l'élément l'énergie potentielle totale était stationnaire, et donc : $\delta \Pi_e = 0$, avec l'expression :

$$\delta \Pi_e = \delta \mathbf{q}_e^T \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_e \mathbf{q}_e - \delta \mathbf{q}_e^T \int_{\partial \Omega_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^s da - \delta \mathbf{q}_e^T \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^v d\Omega_e$$

Si on postule l'*additivité de l'énergie potentielle totale*, on peut alors écrire l'énergie potentielle totale de la structure sous la forme :

$$\Pi = \sum_e \Pi_e \quad \text{telle que} \quad \delta \Pi = \sum_e \delta \Pi_e = 0$$

On peut donc écrire l'énergie potentielle totale sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \sum_e \delta \Pi_e = \sum_e \left(\delta \mathbf{q}_s^T \mathbf{S}_e^T \mathbf{T}_e^T \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_e \right) \mathbf{T}_e^T \mathbf{S}_e \mathbf{q}_s - \delta \mathbf{q}_s^T \mathbf{S}_e^T \mathbf{T}_e^T \int_{\partial \Omega_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^s da - \delta \mathbf{q}_s^T \mathbf{S}_e^T \mathbf{T}_e^T \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^v d\Omega_e \right) \\ \Rightarrow \quad &\underbrace{\sum_e \left(\mathbf{S}_e^T \mathbf{T}_e^T \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_e \right) \mathbf{T}_e^T \mathbf{S}_e \right)}_{\mathbf{K}_s} \mathbf{q}_s = \underbrace{\sum_e \mathbf{S}_e^T \mathbf{T}_e^T \int_{\partial \Omega_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^s da}_{\mathbf{f}_s^S} + \underbrace{\sum_e \mathbf{S}_e^T \mathbf{T}_e^T \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^v d\Omega_e}_{\mathbf{f}_s^V} \end{aligned}$$

Ce calcul nous permet donc d'écrire une relation matricielle simple sous la forme :

Equation fondamentale 4-1

Au final l'équilibre structural s'écrit : $\mathbf{K}_s \mathbf{q}_s = \mathbf{f}_s$

On montre facilement au final que l'énergie potentielle totale de la structure s'écrit :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s$$

4.8. Résolution pour les cas linéaires

Comme précédemment (section 3.6), il s'agit ensuite d'assurer les conditions aux limites pour résoudre le système $\mathbf{K}_s \mathbf{q}_s = \mathbf{f}_s$. Sous forme matricielle, on a :

$$\begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(i)} \\ \vdots \\ u^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ \vdots \\ f^{(i)} \\ \vdots \\ f^{(n)} \end{pmatrix}$$

On est alors régulièrement confrontés aux deux conditions suivantes :

- 1) Le déplacement est nul ou imposé aux points i tels que $\underline{u}^{(i)} = \underline{0}$ ou $\underline{u}^{(i)} = \underline{u}_0$
- 2) L'effort est nul ou imposé aux points i tels que $\underline{f}^{(i)} = \underline{0}$ ou $\underline{f}^{(i)} = \underline{f}_0$.

Enfin, on se trouve devant le système $\mathbf{f}_s = \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s$ à résoudre pour lequel il est possible d'écrire $\mathbf{q}_s = \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{f}_s$ comme précédemment (section 3.7).

Lorsque ce système est résolu on obtient alors le vecteur $\mathbf{q}_s$ contenant les degrés de libertés du système. On peut alors :

- 1) Calcul des déplacements dans le repère local de l'élément : $\mathbf{q}_e^{local} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{S}_e \mathbf{q}_s$
- 2) En déduire les déformations nodales : $\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e$
- 3) En déduire les contraintes nodales : $\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{A} \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e$

Un schéma général de résolution, synthétisant toute la démarche précédente, est donné ci-dessous :

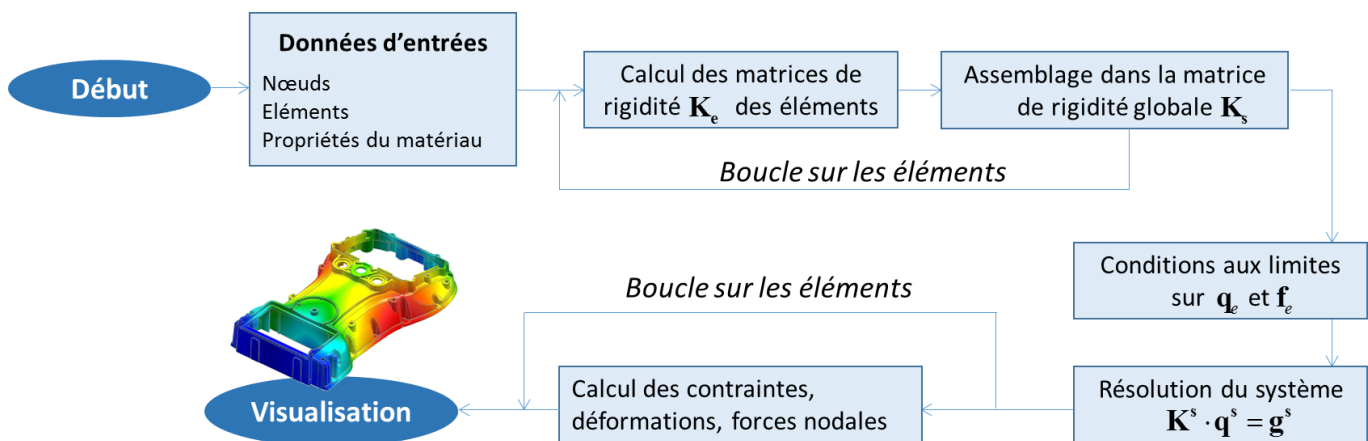


Figure 10 : Schéma de principe d'un calcul par éléments finis.

4.9. Éléments isoparamétriques

Dans ce qui a été écrit précédemment concernant les fonctions de formes (section 4.4), on a considéré des éléments de géométrie simples et parfaites (par exemple, un élément quadrangulaire de côtés $2a \times 2b$ dans le Tableau 3). Or, lorsqu'on va effectuer le maillage d'une forme complexe, les éléments seront couramment assez « distordus » par rapport à leurs homologues de formes parfaites (Figure 11).

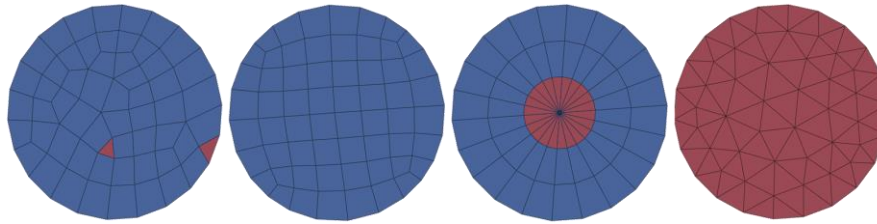


Figure 11: Exemples de maillage pour un cercle.
En bleu : éléments quadrangulaires. En rouge : éléments triangulaires.

A cet effet, on distingue dans la suite deux types d'élément : l'élément *réel* (distordu), et l'élément *parent* (parfait), dans lequel on va introduire des coordonnées intrinsèques à l'élément (Figure 12).

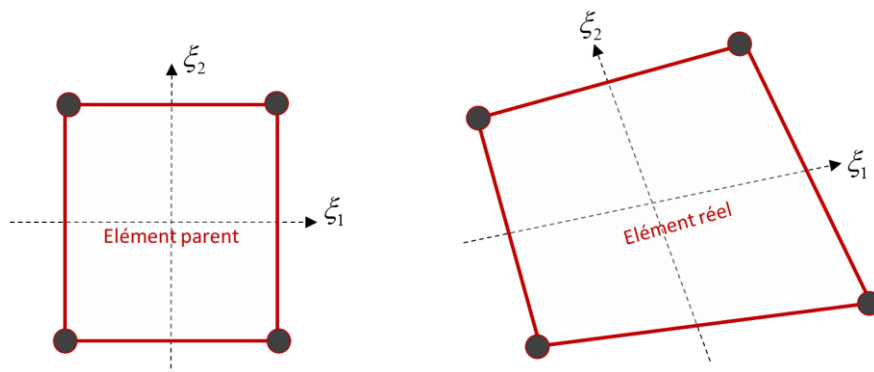


Figure 12: Transformation entre l'élément parent (parfait) et l'élément réel (distordu) dans le cas de l'élément quadrangulaire à 4 nœuds.

4.9.1.1 Transformation entre élément parent et élément réel

On cherche tout d'abord à décrire la transformation, c'est-à-dire à écrire le lien entre le système de coordonnées $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ et le système réel $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. On a alors affaire à une transformation telle que :

$$\underline{x}(\underline{\xi}) = \underline{\phi}(\underline{\xi})$$

On fait vite le lien entre cette écriture et la transformation rappelée

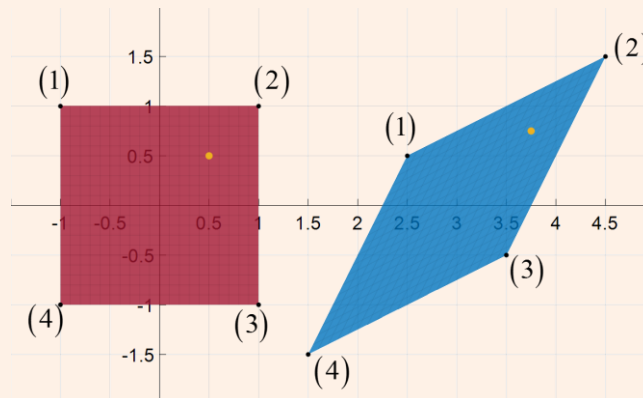
en section 2.2.1 telle que : $\underline{x}(\underline{X}) = \underline{\phi}(\underline{X})$ et $\underline{F} = \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\phi}(\underline{X})$

Or, sur l'élément parent, on peut facilement écrire que la transformation s'écrit en fonction de sa valeur aux différents nœuds de l'élément. Pour un élément **isoparamétrique**, on reprend les mêmes fonctions de forme que précédemment, de telle sorte que :

$$\underline{\phi}(\underline{\xi}) = \sum_{i=1}^n N_i(\underline{\xi}) \underline{\phi}^{(i)} \quad \text{d'où} \quad \underline{x}(\underline{\xi}) = \sum_{i=1}^n N_i(\underline{\xi}) \underline{x}^{(i)}$$

Exemple 4-2

On considère la transformation plane ci-dessous entre l'élément quadrangulaire à quatre nœud « *parent* » et l'élément « *réel* ».



Pour cet élément parent, on peut reprendre l'équation précédente :

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi_1, \xi_2) \underline{x}^{(i)} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi_2)(1 - \xi_1) / 4 \\ N_2 &= (1 - \xi_2)(1 + \xi_1) / 4 \\ N_3 &= (1 + \xi_2)(1 + \xi_1) / 4 \\ N_4 &= (1 + \xi_2)(1 - \xi_1) / 4 \end{aligned}$$

On considère le point qui dans les coordonnées intrinsèques à l'élément parent se trouve à la position $(\xi_1, \xi_2) = (0.5, 0.5)$. Calculons sa position réelle :

$$\begin{aligned} \underline{x} &= N_1(0.5, 0.5) \underline{x}^{(1)} + N_2(0.5, 0.5) \underline{x}^{(2)} + N_3(0.5, 0.5) \underline{x}^{(3)} + N_4(0.5, 0.5) \underline{x}^{(4)} \\ [\underline{x}] &= 0.0625 \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + 0.1875 \begin{pmatrix} 4.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} + 0.5625 \begin{pmatrix} 3.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} + 0.1875 \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 0.75 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce point est représenté en jaune sur la figure ci-dessus dans les deux configurations.

4.9.1.2 Matrice jacobienne

On a écrit précédemment (section 4.5.3) la matrice de rigidité d'un élément :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t \quad \text{avec } \Omega_t \text{ le volume de l'élément réel}$$

Dans cette expression, on rappelle que $\mathbf{B}_e = \mathbf{D} \mathbf{N}_e$: cette matrice contient la dérivée des fonctions de forme par rapport aux coordonnées réelles.

Dans le plan par exemple on a :

$$\mathbf{B}_e = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & - \\ - & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & - \\ - & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial x_1} & - \\ - & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial x_1} & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Or, les fonctions de formes sont désormais définies sur l'élément parent en fonction de coordonnées intrinsèques. Il y a une bijection entre les deux configurations, de telle sorte que $\underline{x}(\underline{\xi}) = \underline{\phi}(\underline{\xi})$ et $\underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{\phi}^{-1}(\underline{x})$. Ainsi on peut noter :

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_j}$$

Soit (**dans le plan** pour alléger l'écriture) sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} x_1^{(i)} & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} x_2^{(i)} \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} x_1^{(i)} & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} x_2^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Sous forme abrégée on peut écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{N}_e}{\partial \underline{\xi}} = \mathbf{J}_e \frac{\partial \mathbf{N}_e}{\partial \underline{x}} \quad \text{où } \mathbf{J}_e \text{ est la matrice jacobienne de la transformation.}$$

Pour une transformation **plane**, cette matrice jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{J}_e = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} x_1^{(i)} & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} x_2^{(i)} \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} x_1^{(i)} & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} x_2^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} \end{pmatrix}$$

La première matrice contient donc les dérivées des fonctions de forme dans le système de coordonnées intrinsèque (**le même pour tous les éléments !**), tandis que la seconde contient les degrés de liberté de l'élément.

Si la relation inverse existe aussi on peut écrire : $\frac{\partial \mathbf{N}_e}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}_e^{-1} \frac{\partial \mathbf{N}_e}{\partial \xi}$

Or, comme rappelé en section 2.2.1, le calcul du déterminant de la matrice jacobienne d'une transformation permet de connaître la variation de volume durant la transformation de telle sorte que :

$$J = \det \mathbf{J}_e$$

$$d\Omega_t = J d\Omega_0 \quad \text{avec : } \Omega_t \text{ le volume de l'élément réel}$$

$$\Omega_0 \text{ le volume de l'élément parent}$$

Dans le calcul de la matrice de rigidité on peut donc effectuer le changement :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T(\underline{x}) \mathbf{A} \mathbf{B}_e(\underline{x}) d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_e^T(\underline{\xi}) \mathbf{A} \mathbf{B}_e(\underline{\xi}) J d\Omega_0$$

Grâce à ce changement, l'opération d'intégration est désormais la même pour tous les éléments et seul le jacobien $J = \det \mathbf{J}_e$ change .

NB : l'erreur « jacobien négatif » signifie que ce calcul est impossible !

4.10. Méthode d'intégration de Gauss et modes indésirables

Reprenons l'expressions ci-dessus pour la matrice de rigidité de l'élément :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_e^T(\underline{\xi}) \mathbf{A} \mathbf{B}_e(\underline{\xi}) J d\Omega_0$$

L'intégration formelle des fonctions de formes est trop coûteuse, et on va donc y préférer une **intégration numérique approchée**. Avec la méthode de Gauss, on décide de remplacer l'intégrale sur l'élément par une somme de valeurs pondérées, de telle sorte que :

$$\int_{\Omega_0} f(\underline{\xi}) d\Omega_0 = \sum_{i=1}^{n_{G_1}} \sum_{j=1}^{n_{G_2}} \sum_{k=1}^{n_{G_3}} w_i w_j w_k f(\xi_i, \xi_j, \xi_k)$$

avec : n_{G_i} le nombre de **points d'intégration de Gauss** dans la direction i

w_i les pondérations de chacun de ces points

On peut calculer (mais pas dans ce cours...) la position dans le repère intrinsèque de l'élément, le nombre et les pondérations à donner à chacun des points pour que cette intégration soit exacte. Cependant, on peut également décider de *réduire le nombre de points d'intégration* (on parle alors d'**intégration réduite**), ce qui mène à une

approximation sur le calcul de l'intégrale qui est souvent suffisante **si la variation de champs dans l'élément n'est pas trop importante**.

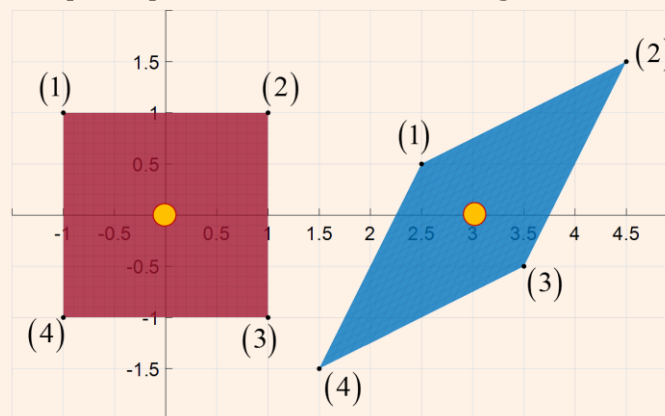
	Intégration complète	Intégration réduite
Elément linéaire (4 nœuds)		
Elément quadratique (8 nœuds)		

Tableau 4: Points de Gauss dans l'élément quadrangulaire pour une intégration réduite ou complète. La taille des points de Gauss (en jaune) correspond à leur pondération.

Dans le cas d'un nombre de points d'intégration trop faible, il est possible que des modes de déformation soient totalement « invisibles » au niveau de ces points d'intégration.

Exemple 4-3

Reprenons la transformation plane précédente, avec une intégration réduite (1 point de Gauss) :



La transformation est affine (linéaire) et on peut donc noter :

$$\begin{cases} u_1 = a + b\xi_1 + c\xi_2 + d\xi_1\xi_2 \\ u_2 = e + f\xi_1 + g\xi_2 + h\xi_1\xi_2 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{D} \mathbf{u}_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

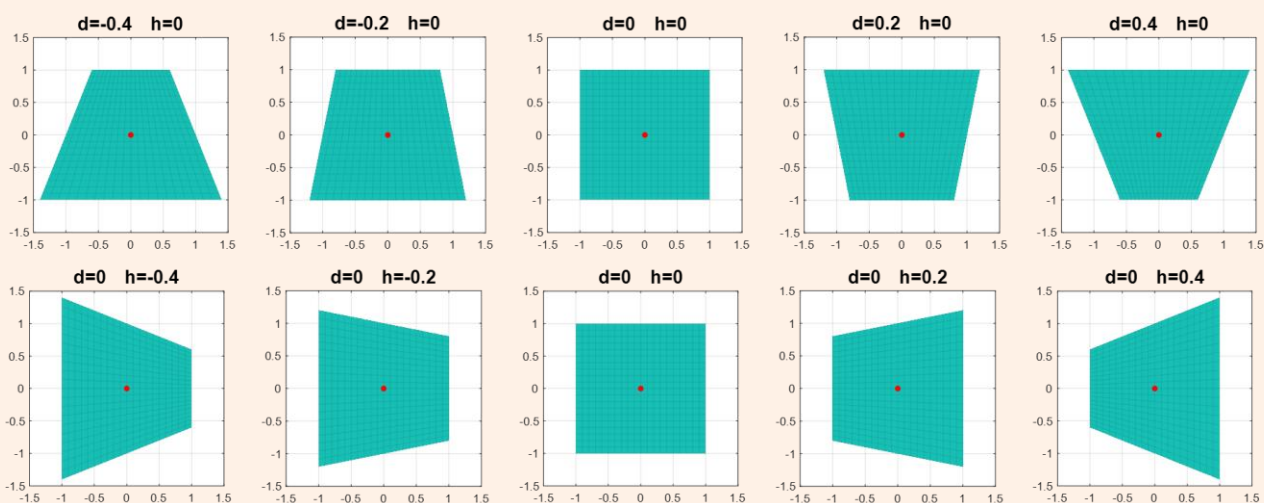
On en déduit donc la déformation : $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + d\xi_2 \\ g + h\xi_1 \\ (c + f) + d\xi_1 + h\xi_2 \end{pmatrix}$

On compte ainsi 5 modes indépendants de déformation (suivant les valeurs des constantes $b, d, g, h, (c + f)$). Plaçons-nous maintenant au point de Gauss (noté G) tel que $\xi_1 = \xi_2 = 0$. La déformation « visible » est alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^G = \begin{pmatrix} b \\ g \\ (c + f) \end{pmatrix} \rightarrow \text{les effets des constantes } d \text{ et } h \text{ sont invisibles !}$$

En conclusion, si un mode de déformation affecte les constantes d ou h , le schéma d'intégration numérique ne permettra pas d'en rendre compte !

On a représenté ci-dessous la même transformation pour différentes valeurs des constantes d et h , toutes les autres constantes étant nulles: on parle souvent de « mode à zéro énergie » étant donné que ces déformations peuvent avoir lieu sans que l'énergie potentielle totale ne soit affectée.



On parle notamment souvent de modes « hourglass » (*sablier*) pour caractériser l'un de ces modes indésirables, en raison du profil suivant :

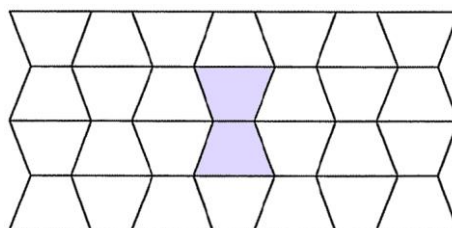


Figure 13: Représentation d'un maillage quadrangulaire en mode de déformation « hourglass », qui n'est associé à aucune énergie.

4.11. Analyse vibratoire

L'ensemble de la démarche qui a été faite précédemment concerne les cas où les matériaux sont élastiques, et où on s'intéresse à la réponse de la structure à un **chargement statique**. Or, la MEF permet également de résoudre des problèmes de dynamique des structures, notamment en donnant accès aux modes propres d'une structure. Dans ce cas, l'énergie totale du système ne se limite pas à l'**énergie potentielle totale** mais doit également faire intervenir une **énergie cinétique** de telle sorte que (on néglige ici l'amortissement) :

$$\Pi(\underline{u}) = [\mathcal{W}_{\text{int}}(\underline{u}) - \mathcal{W}_{\text{ext}}(\underline{u})] + \mathcal{K}(\underline{u}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}(\underline{u}) = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2} \rho \dot{\underline{u}}_e^T \dot{\underline{u}}_e d\Omega_t$$

Comme précédemment, on peut écrire que **cette énergie totale doit être stationnaire** pour une perturbation $\delta \underline{u}$ de telle sorte que :

$$\delta \Pi_e = \int_{\Omega_t} \left(\delta \underline{\varepsilon}^T \mathbf{A} \underline{\varepsilon} - \delta \underline{u}_e^T \mathbf{f}_e^V + \rho \ddot{\underline{u}}_e^T \delta \underline{u}_e \right) d\Omega_t - \int_{\partial\Omega_t} \delta \underline{u}_e^T \mathbf{f}_e^S da = 0$$

Ainsi, on peut faire intervenir les fonctions de formes à l'échelle de l'élément de telle sorte que les déplacements et leurs dérivées s'écrivent :

$$\underline{u}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e \quad \ddot{\underline{u}}_e = \mathbf{N}_e \ddot{\mathbf{q}}_e$$

La stationnarité de l'énergie potentielle peut s'écrire :

$$\delta \Pi_e = \delta \mathbf{q}_e^T \int_{\Omega_t} \left(\mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e - \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^V + \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e \ddot{\mathbf{q}}_e \right) d\Omega_t - \delta \mathbf{q}_e^T \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^S da = 0$$

On peut alors ré-écrire cette équation sous la forme :

$$\underbrace{\int_{\Omega_t} (\mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e) d\Omega_t}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{q}_e + \underbrace{\int_{\Omega_t} (\rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e) d\Omega_t}_{\mathbf{M}_e} \ddot{\mathbf{q}}_e = \underbrace{\int_{\Omega_t} (\mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^V) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^S da}_{\mathbf{f}_e}$$

$$\Rightarrow \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e + \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{f}_e$$

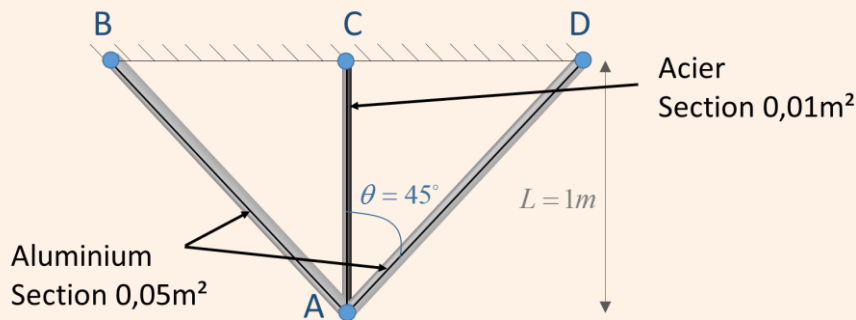
Cette dernière équation régit donc l'équilibre dynamique de l'élément. Elle fait intervenir la **matrice des masses** $\mathbf{M}_e$.

D'après ce qui précède, on peut transposer la dernière équation à l'échelle de la structure de telle sorte que :

$$\mathbf{K}_s \mathbf{q}_s + \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{f}_s$$

Exemple du treillis plan hyperstatique

Reprenons le cas précédent, concernant le treillis de trois barres ne travaillant qu'en **traction-compression**. On a déjà identifié précédemment les fonctions de forme ainsi que les matrices de rigidité élémentaires de chacun des éléments. On veut calculer les **modes propres** de vibration libre de cette structure, en considérant que l'amortissement est nul.



A l'échelle d'un **élément**, comme on néglige l'amortissement et que les oscillations sont libres, l'équation à résoudre est :

$$\mathbf{K}_e \mathbf{q}_e + \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{f}_e \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_e = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ en traction-compression}$$

Calculons tout d'abord la matrice de masse élémentaire dans le repère de l'élément :

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} (\rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e) d\Omega_e \quad \text{avec} \quad \mathbf{N}_e = \begin{pmatrix} N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} & N_2(x) = \frac{x}{L} \end{pmatrix}$$

Pour écrire cette matrice des masses à l'échelle de la structure il s'agit de considérer ces fonctions de formes à l'échelle globale de la structure. Si on considère ainsi comme précédemment deux degrés de liberté à chaque nœud on a :

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1(x) & 0 & N_2(x) & 0 \\ 0 & N_1(x) & 0 & N_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

On peut alors effectuer le calcul :

$$\mathbf{M}_e = \rho S \int_0^L \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{pmatrix} dx$$

$$\mathbf{M}_e = \rho S \int_0^L \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 & 0 & \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 & 0 & \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & 0 & \frac{x^2}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & 0 & \frac{x^2}{L^2} \end{pmatrix} dx = \frac{\rho S L^2}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si on considère deux degrés de liberté par nœud, on peut donc écrire le système :

$$\begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{\rho S L^2}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddots \\ u_1^{(1)} \\ \ddots \\ u_2^{(1)} \\ \ddots \\ u_1^{(2)} \\ \ddots \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

Comme précédemment, on doit exprimer les matrices de rigidité **dans le repère global** (tandis que les matrices de masses sont déjà écrites à l'échelle de la structure) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_e^{AB})^{global} &= \frac{E^{AB} S^{AB}}{L/c} \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix} & (\mathbf{M}_e^{AB})^{global} &= \frac{\rho^{AB} S^{AB} (L/c)^2}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{K}_e^{AC})^{global} &= \frac{E^{AC} S^{AC}}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (\mathbf{M}_e^{AC})^{global} &= \frac{\rho^{AC} S^{AC} L}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{K}_e^{AD})^{global} &= \frac{E^{AD} S^{AD}}{L/c} \begin{pmatrix} c^2 & -cs & -c^2 & cs \\ -cs & s^2 & cs & -s^2 \\ -c^2 & cs & c^2 & -cs \\ cs & -s^2 & -cs & s^2 \end{pmatrix} & (\mathbf{M}_e^{AD})^{global} &= \frac{\rho^{AD} S^{AD} (L/c)^2}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut alors réaliser le même assemblage que précédemment pour $\mathbf{K}_s$ et $\mathbf{M}_s$.

Si on s'intéresse uniquement au point A, où les efforts nodaux sont nuls, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} E^{AB} S^{AB} c^3 + E^{AC} S^{AC} + E^{AD} S^{AD} c^3 & E^{AB} S^{AB} c^2 s - E^{AD} S^{AD} c^2 s \\ E^{AB} S^{AB} c^2 s - E^{AD} S^{AD} c^2 s & E^{AB} S^{AB} c s^2 + E^{AD} S^{AD} c s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix} + \frac{L^2}{3} \begin{pmatrix} (\rho^{AB} S^{AB} + \rho^{AD} S^{AD})/c^2 + \rho^{AC} S^{AC} & (\rho^{AD} S^{AD} - \rho^{AB} S^{AB})/c^2 \\ (\rho^{AD} S^{AD} - \rho^{AB} S^{AB})/c^2 & (\rho^{AB} S^{AB} + \rho^{AD} S^{AD})/c^2 + \rho^{AC} S^{AC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1^A \\ \ddot{u}_2^A \end{pmatrix}$$

On vient alors d'écrire un système sous la forme : $\mathbf{K}_s \mathbf{q}_s + \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{0}$

On se propose d'identifier une solution sous la forme $\mathbf{q}_s(t) = \mathbf{Q}e^{i\omega t}$ avec ω la pulsation propre, reliée à la fréquence propre par $f = \omega / 2\pi$. Le système précédent s'écrit donc :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}_s(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s(t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_s(t) = \mathbf{Q}e^{i\omega t} \end{cases} \Rightarrow (i\omega)^2 \mathbf{M}_s \mathbf{q}_s(t) = -\mathbf{K}_s \mathbf{q}_s(t) \Rightarrow \boxed{\det(\mathbf{K}_s - \omega^2 \mathbf{M}_s) = 0}$$

En résolvant ce système on trouve les deux fréquences propres : $\begin{cases} f_1 = 425.35 \text{ Hz} \\ f_2 = 850.72 \text{ Hz} \end{cases}$

Evidemment, on aurait trouvé des fréquences **bien plus basses en permettant aux éléments du treillis de travailler en flexion**, car leur rigidité aurait été alors bien plus faible : la rigidité qui a été prise en compte et **la rigidité de traction-compression uniquement !**

5. Utilisation dans un code de calcul : introduction à Abaqus

Dans toute cette section, on va tenter de modéliser par la MEF le treillis plan étudié précédemment **en utilisant le logiciel Abaqus**, ce qui nous permettra d'introduire les grandes étapes de la modélisation dans ce code de calcul.

5.1. Généralités

Un logiciel utilisant la MEF est généralement composé :

- ✓ d'une partie **pré-traitement**, où on entre le jeu de données pour la simulation. Ceci inclut la géométrie du solide, le type de simulation (dynamique, statique, thermique...) que l'on veut effectuer, les propriétés du ou des matériaux constitutifs du solide, la définition des nœuds du maillage et des éléments, la définition des chargements et conditions aux limites, et la liste des champs mécaniques (déplacement, contraintes, déformations, température, ...) que l'on veut calculer ;
- ✓ d'une partie « **calcul** », le cœur du logiciel, qui permet de résoudre les équations de la mécanique en utilisant la méthode des éléments finis ;
- ✓ d'une partie **post-traitement**, qui permet de visualiser et d'exploiter les différents champs mécaniques calculés.

Le logiciel Abaqus, via sa partie Abaqus/CAE, inclut ces trois parties dans une même interface. Il est le logiciel EF utilisé à l'ENSEM d'une part parce qu'il est l'un des logiciels de référence dans le milieu industriel, de l'autre parce que son interface utilisateur ergonomique le rend facile à utiliser (contrairement à d'autres codes exclusivement en lignes de commandes...). Une liste de quelques codes EF couramment utilisés est donnée ci-dessous :

Logiciels propriétaires	Abaqus, Ansys, Nastran, Adina, Samcef, Marc, LS-dyna, FlexPDE, COMSOL multiphysics
Logiciels libres	Aster, Elmer, FEBio, FreeFEM++, OOFEM, Z88Aurora

Les différentes étapes de la modélisation sont clairement exposées dans Abaqus, ce qui en fait un des logiciels les plus faciles d'utilisation. Ces étapes vont être suivies dans l'ordre du menu déroulant « module » ci-dessous.

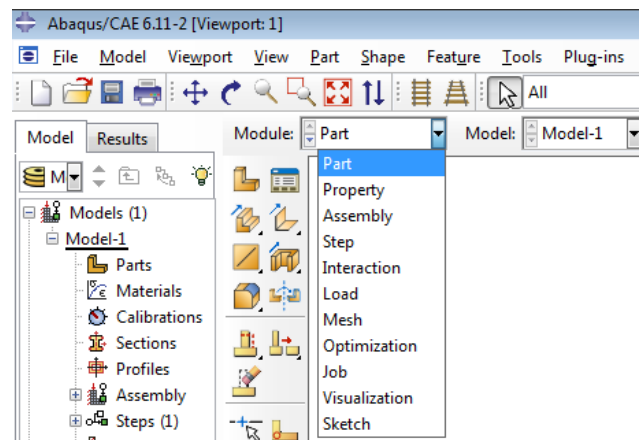


Figure 14: "modules" Abaqus correspondant aux différentes étapes de modélisation.

5.2. Géométrie

La première étape de la démarche consiste à définir la géométrie du solide  dont nous voulons simuler le comportement, dans le cas où la géométrie est suffisamment simple. Dans le cas contraire, on aura recours à des logiciels de CAO dédiés, comme Catia V5, puis on importera la pièce dans Abaqus.

On s'intéresse ici à modéliser en 2D le problème du treillis plan traité précédemment en section 3, avec les données numériques rappelées en Figure 15.

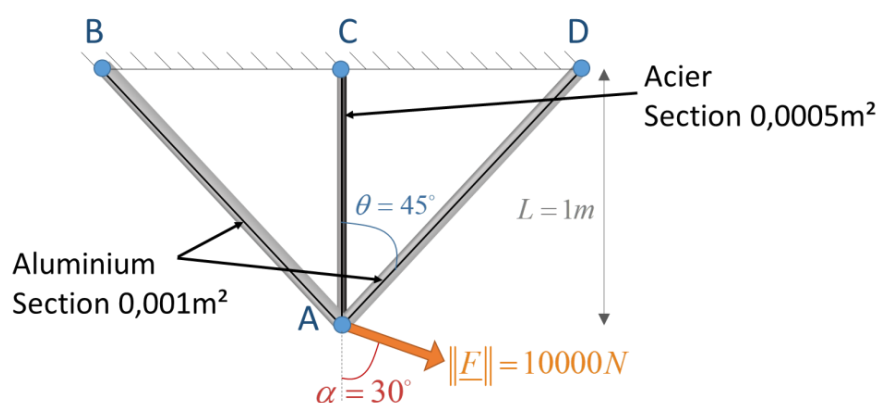


Figure 15: Problème physique à modéliser sous Abaqus.

Il s'agit de modéliser la structure comme une structure **plane** (« 2D planar ») et déformable, que l'on va dessiner à partir de sa ligne moyenne qui sera un « wire ». On va considérer que les sections sont **circulaires et pleines**.

Les différents outils de dessin  permettent de tracer l'esquisse, tandis que les outils de cotations  permettent d'en spécifier les dimensions et les outils de contraintes d'esquisses  aident à leur construction.

A retenir 5-1

Il n'y a pas de **système d'unités** spécifiques au code de calcul : c'est à l'utilisateur d'utiliser un système d'unités **cohérent** (mètres et pascals ou millimètres et mégapascals par exemple).

A l'issue de ce travail, l'esquisse suivante est prête à être utilisée pour spécifier les matériaux et sections des trois barres qui constituent le treillis.

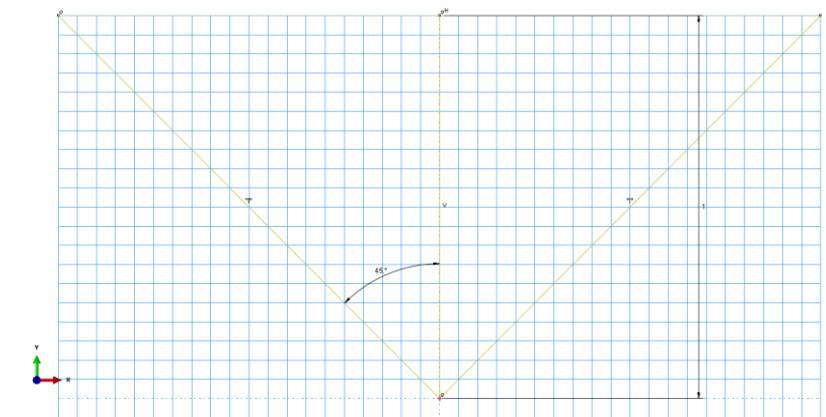


Figure 16: Esquisse utilisée pour la modélisation du treillis plan.

5.3. Matériaux

Dans cet exemple, il conviendra de créer deux **matériaux** (aluminium et acier) définis comme élastiques, linéaires et isotropes (onglet « *property* » ). On rentre alors les lois de comportements des matériaux, définis ici simplement par un module d'Young (acier : 210GPa et aluminium : 70GPa) et un coefficient de Poisson (égal à 0.3 pour les deux matériaux).

On créera ensuite deux **sections** différentes  de type « poutres » (*beam*) composés d'acier et d'aluminium respectivement. Il sera alors nécessaire de **créer les sections transverses**  circulaires de sections 0.0005m^2 et 0.001m^2 .

Ensuite, il est nécessaire « **d'assigner ces sections** »  aux différents éléments de l'esquisse.

Enfin, pour le calcul, Abaqus exige un repère local associé à chaque élément que l'on peut définir à travers l'option « *assign section orientation* »  (où le repère par défaut conviendra parfaitement).

5.4. Assemblage et interactions

Il est nécessaire ensuite de définir un assemblage , même si dans notre cas il n'est constitué que d'une seule pièce. Sélectionner un type « independant » (le lecteur curieux est encouragé à consulter la documentation en ligne pour plus d'information à ce sujet...). On pourrait également définir ensuite le type d'interactions (contact, frottement, ...) qu'il existe entre les différentes pièces de l'assemblage : dans ce premier cas illustratif cette étape est inutile, mais elle peut s'avérer laborieuse pour un cas plus complexe. Davantage de détails au sujet du traitement du contact seront livrés au chapitre suivant.

5.5. Types de calculs

On définit ensuite dans l'onglet « *step* » les différentes étapes de calcul que l'on veut modéliser : dans notre cas, le seul type de calcul à créer  est un calcul de statique (les options par défaut étant pour l'instant satisfaisantes).

On pourra également choisir le type de champs mécaniques  que l'on désire calculer : ici nous serons intéressés notamment par les efforts aux nœuds, ainsi que par les contraintes, les déplacements et les déformations dans chaque barre.

5.6. Chargements et conditions aux limites

L'onglet « *load* » permet ensuite de définir les chargements  et les conditions aux limites  de la structure. Dans notre cas on va restreindre les déplacements dans les trois directions au niveau des points B, C et D, et imposer un effort nodal (« *concentrated force* ») au point A. Dans le repère global utilisé dans la modélisation, cet effort s'écrit :

$$\underline{F} = F \sin \alpha \underline{e}_x - F \cos \alpha \underline{e}_y = 5000 \underline{e}_x - 8660 \underline{e}_y$$

5.7. Maillage

Dans un dernier temps de la définition du jeu de données, il convient de décider des nœuds du maillage , de l'algorithme de maillage  et du type d'éléments  avant de mailler définitivement la structure . Dans notre cas, on peut choisir par exemple de placer 10 nœuds par barre, et de choisir des éléments de type « poutre » (« *beam* ») avec une interpolation quadratique. A la fin de cet étape, le calcul est prêt à être lancé.

5.8. Calcul statique et exploitation des résultats

Dans l'onglet « *job* », on définit les détails numériques du calcul qu'on s'apprête à effectuer. Dans notre cas simple, les propriétés par défaut sont suffisantes à mener le calcul. Une fois le « *job* » créé, on le soumet au calcul (« *submit* ») puis, une fois le calcul effectué (« *job completed successfully* ») on visualise les résultats dans l'onglet « *results* ».

Abaqus possède ensuite une partie post-traitement qui permet de visualiser les résultats de la simulation et d'en tirer des conclusions quantitatives. Par exemple, on pourra visualiser l'état déformé  et représenter les différents champs mécaniques au sein des éléments : celui qui nous intéresse ici et le champ de déplacements U , dont on peut visualiser l'amplitude totale (« *magnitude* », Figure 17) ou les composantes U_1 et U_2 . L'outil de « sondage » (« *probe* »)  permet notamment de s'intéresser aux valeurs nodales de ces champs : on s'intéresse ici surtout aux déplacements u_1^A et u_2^A .

Les valeurs trouvées alors sont :

$$\begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix}_{(e_X, e_Y)}^{numerique} = \begin{pmatrix} 0.000101025m = 101.025\mu m \\ -5.60873 \times 10^{-5}m = -56.0873\mu m \end{pmatrix}$$

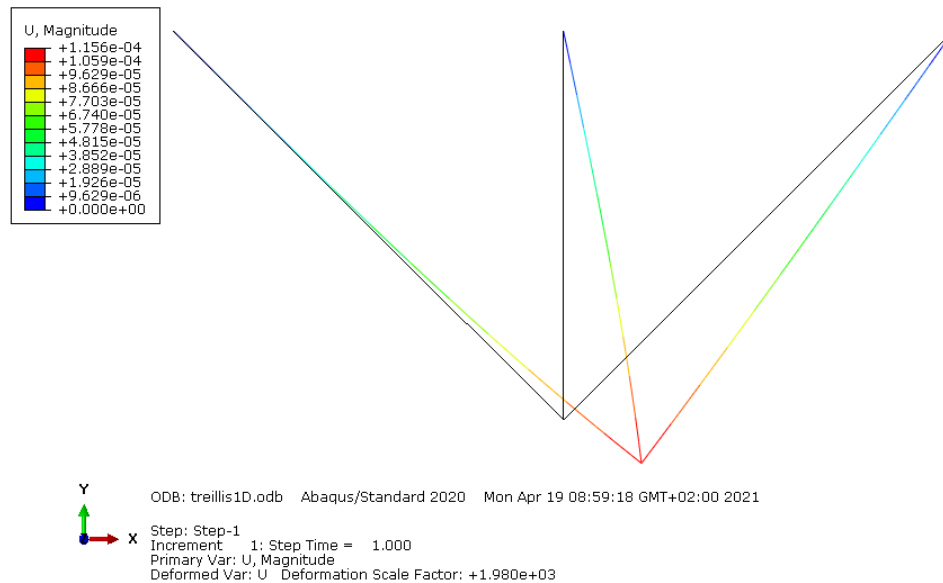


Figure 17: Résultat du calcul Abaqus pour le treillis plan. La figure montre la superposition des géométries finale et initiale, le code couleur représentant l'amplitude des déplacements.

Il est alors intéressant de comparer les valeurs numériques trouvées ici aux valeurs analytiques calculées en section 3.7. Il convient alors d'utiliser le même repère : le repère utilisé par Abaqus est tel que $\underline{e}_x = \underline{e}_2$ et $\underline{e}_y = -\underline{e}_1$ et on a donc les valeurs :

$$\begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)}^{\text{numerique}} = \begin{pmatrix} 56.0873 \mu m \\ 101.025 \mu m \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)}^{\text{theorique}} = \begin{pmatrix} 56.054 \mu m \\ 101.015 \mu m \end{pmatrix}$$

On en déduit une différence de 0.06% sur u_1^A et 0.001% sur u_2^A , ce qui constitue une approximation très acceptable !

5.9. Calcul de fréquences propres

On peut également chercher à retrouver en utilisant Abaqus les fréquences d'oscillations libres identifiées précédemment en section 4.11. Les modifications à apporter sont alors :

- ✓ *Properties* : il convient d'ajouter les masses volumiques respectives de l'aluminum (2700 kg.m^{-3}) et l'acier (7800 kg.m^{-3})
- ✓ *Step* : le type de calcul à effectuer est désormais un calcul fréquentiel (*linear perturbation* $\rightarrow$ *frequency*). On ne décidera ici de calculer que les deux premières fréquences (*eigenvalues requested* =2).
- ✓ *Load* : si l'on étudie les oscillations libres de la structure, elle n'est soumise à aucun effort extérieur

- ✓ *Mesh* : pour être cohérent avec la modélisation précédente, on sélectionne un seul élément linéaire par poutre.

Après avoir lancé un nouveau calcul, on arrive alors à visualiser les deux modes de déformations représentés ci-dessous (Figure 18).

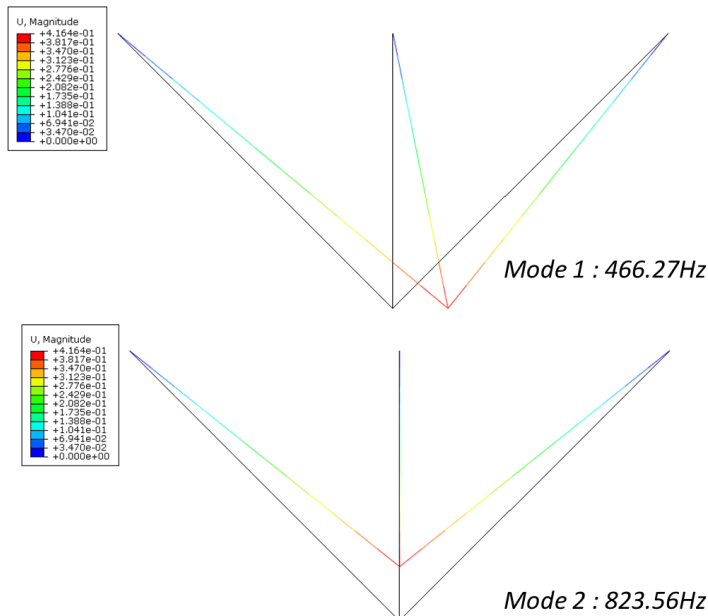


Figure 18: Deux premières déformées modales du treillis plan lorsque les barres travaillent en traction-compression uniquement (déplacements normalisés)

On effectue alors des erreurs de 8% et 3% pour ces premiers modes en comparaison au calcul analytique précédent (section 4.11).

Si l'on autorise la structure à travailler également en flexion (en effectuant un maillage plus fin), on trouve alors naturellement des modes et des fréquences bien différentes... (Figure 19).

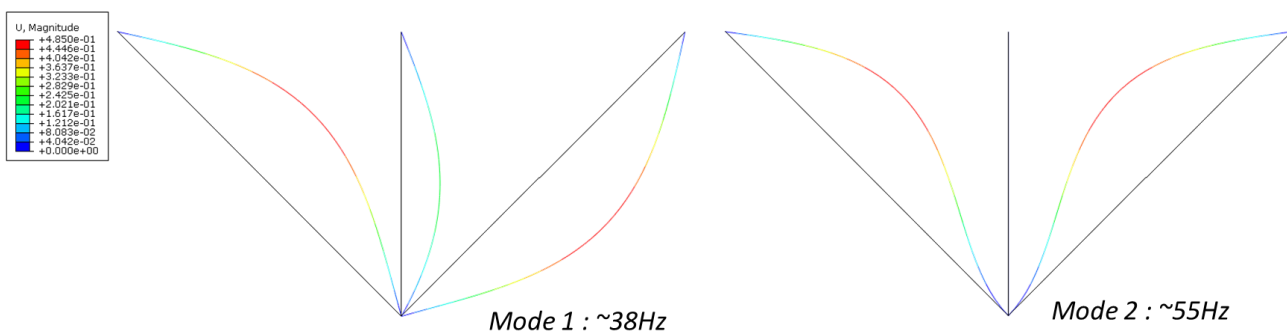


Figure 19: Deux premières déformées modales du treillis plan (déplacements normalisés)

6. Quelques mots sur les non-linéarités

Dans ce qui précède, nous avons fait l'hypothèse que le comportement du matériau était élastique quel que soit le niveau de déformation, et que les déformations restaient infinitésimales. Nous avons également fait l'hypothèse que le système étudié était isolé de son environnement extérieur. Dans ce chapitre, nous allons brièvement présenter les grandes lignes de la prise en compte de trois sources de non-linéarité dans la MEF :

- les non-linéarités **géométriques** dues aux grandes déformations de la structure
- les non-linéarités **matérielles** dues au comportement non-linéaire du matériau
- les non-linéarités dues au traitement du **contact** avec d'autres systèmes.

6.1. Non-linéarités géométriques

6.1.1. Matrice de rigidité tangente

Dans le cas où la structure est soumise à de grandes déformations, plusieurs phénomènes viennent perturber les calculs menés dans les chapitres précédents. Notamment, comme on vient de le voir, l'écriture des déformations fait apparaître un nouveau terme non-linéaire. De plus, la rigidité apparente de l'élément change en cours de déformation ; enfin, les efforts extérieurs peuvent évoluer en cours de déformation (Figure 20).

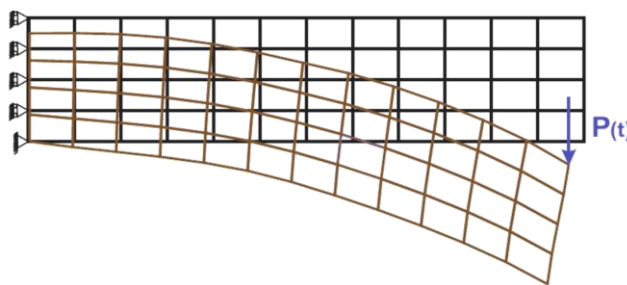


Figure 20: Exemple de structure en grandes déformations.

La philosophie générale de la méthode qui suit consiste à **discrétiser** la déformation totale en une **succession de déformations élémentaires**, tout en assurant que chaque incrément de déformation réalisé satisfait l'équilibre de la structure. Comme précédemment, l'équilibre de la structure sera assuré si :

$$\forall \delta \underline{u} \quad , \quad \delta \Pi(\delta \underline{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \mathcal{W}_{\text{int}}(\delta \underline{u}) = \delta \mathcal{W}_{\text{ext}}(\delta \underline{u})$$

On montre (mais pas dans ce cours introductif) qu'on peut introduire une **matrice de rigidité tangente**:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_S$$

qui permet d'écrire la variation du travail des efforts intérieurs comme précédemment :

$$d\delta\mathcal{W}_{\text{int}} = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{K}_T d\mathbf{q}$$

- $\mathbf{K}$: matrice de rigidité **linéaire**
- $\mathbf{K}_{NL}$ est la matrice de rigidité « des déplacements initiaux » : elle est fonction des déplacements et prend en compte le terme non-linéaire du tenseur des déformations (voir cours de MMC, tenseur des déformations de Green-Lagrange)
- $\mathbf{K}_S$ est la matrice de rigidité « des contraintes initiales » et correspond à l'état de rigidification de la structure en raison de son état de contraintes
- $\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_S$ est la **matrice de rigidité tangente**

Comme précédemment, on peut alors écrire l'équilibre du système **entre ces deux incréments** sous la forme:

$$\mathbf{K}_T d\mathbf{q} = d\mathbf{f}$$

- $\mathbf{K}_T$ est la **matrice de rigidité tangente**
- $d\mathbf{q}$ est le vecteur des variations des degrés de libertés **entre ces deux incréments**
- $d\mathbf{f}$ est le vecteur des variations des efforts extérieurs **entre ces deux incréments**

Exemple 6-1

Considérons le cas de traction simple d'une barre de section transverse initiale A .

Dans ce cas simple, le comportement du matériau $\mathbf{A}$ se réduit au seul module d'Young E .

La matrice de rigidité obtenue précédemment s'écrit simplement :

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} d\Omega_0 = A \int_0^L \begin{pmatrix} -1/L \\ 1/L \end{pmatrix} E \begin{pmatrix} -1/L & 1/L \end{pmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle ne constitue néanmoins qu'une partie de la matrice de rigidité tangente, dont on montre (mais

pas ici !) qu'elle peut s'écrire :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_S = \frac{EA}{L} \left(1 + 2 \frac{\Delta L}{L} + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 + \frac{F}{EA} \right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, l'équilibre du système global s'écrit sous la forme : $\mathbf{K}_T d\mathbf{q} = d\mathbf{f}$

On fait l'hypothèse comme précédemment que la poutre est encastree en $x=0$, et donc l'inconnue et le déplacement $u^{(2)} = \Delta l$. A l'inverse, on connaît l'effort $f^{(2)} = F$ et on ne connaît pas $f^{(1)}$ (mais on s'en doute que l'équilibre va imposer $f^{(1)} = -F$!). On a en conclusion la relation force-déplacement :

$$F = \frac{EA}{L} \left(1 + 2 \frac{\Delta L}{L} + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 + \frac{F}{EA} \right) \Delta L = \mathbf{K}_T \Delta L$$

On s'aperçoit donc que la valeur de $\mathbf{K}_T$ **dépend du chargement**.

Par exemple, pour une poutre en acier d'une longueur d'1m et de section 0.001m^2 on obtient initialement : $F=0, \Delta L=0 \Rightarrow K_T = 200.00 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1}$

Supposons qu'on veuille soumettre cette poutre à un effort de 10000kN. On peut alors procéder par **incréments de chargements**, en itérant sur les efforts, en commençant par exemple par $F = 100\text{kN}$:

$$K_T = \frac{EA}{L} \left(1 + 2 \frac{0}{L} + \left(\frac{0}{L} \right)^2 + \frac{1 \times 10^3}{EA} \right) = 217.94 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1} \Rightarrow \Delta L = \frac{F}{K_T} = 4.58 \times 10^{-6} \text{ m}$$

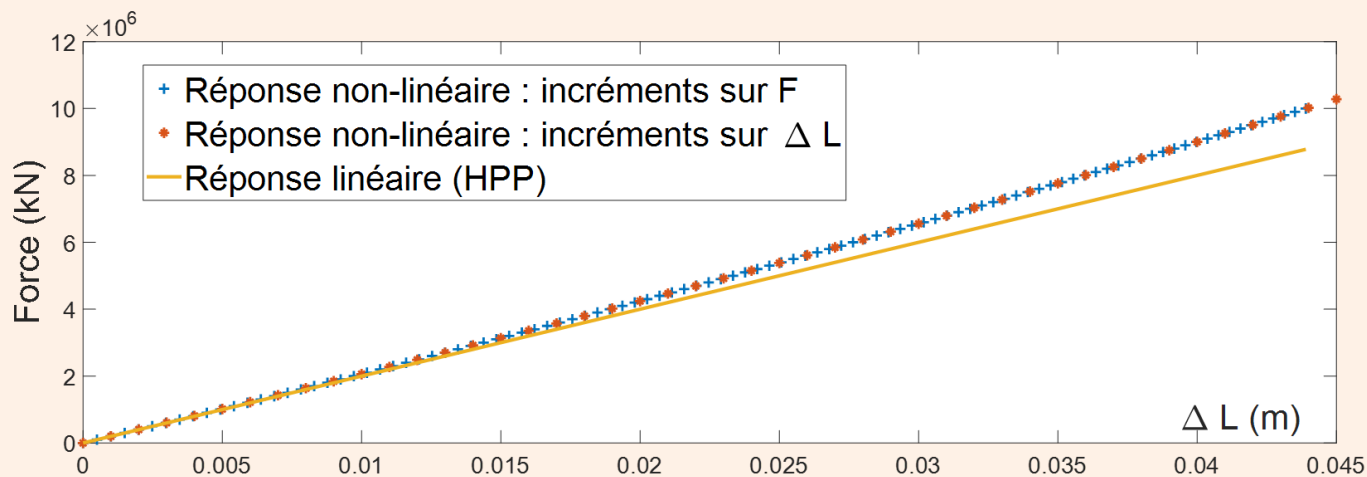
On incrémente alors la valeur de l'effort, et on peut trouver une nouvelle rigidité tangente à partir du déplacement ΔL calculé. En imposant davantage d'incrments $\Delta F = 100\text{kN}$, on obtient la courbe ci-dessous que l'on peut comparer au cas purement linéaire $F = EA\Delta L / L$.

Une incrémentation sur les déplacements est également possible : on repart alors de la valeur initiale : $F=0, \Delta L=0 \Rightarrow K_T = 200.00 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1}$. On peut alors imposer un incrément de déplacement $\Delta L = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$ de telle sorte qu'on ait la rigidité tangente :

$$K_T = \frac{EA}{L} \left(1 + 2 \frac{1 \times 10^3}{L} + \left(\frac{1 \times 10^3}{L} \right)^2 + \frac{0}{EA} \right) = 200.40 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1} \Rightarrow F = K_T \Delta L = 200.40 \times 10^3 \text{ N}$$

On incrémente alors la valeur du déplacement, et on peut trouver une nouvelle rigidité tangente à

partir de l'effort F calculé. Le calcul est arrêté quand la valeur de l'effort vaut la valeur désirée de 10000kN. La courbe correspondante est représentée ci-dessous, en on observe que les deux démarches (incrémentation en efforts ou en déplacements) sont très proches dans ce cas simple.



A retenir 6-1

Dans le cas non-linéaire, les conditions aux limites sont imposées de manière **incrémentale**, ce qui peut être vu comme une discrétisation « temporelle » : il s'agit donc de préciser **la taille de ces incréments** de « temps », et la manière dont elle peut évoluer en cours de calcul.

6.1.2. Méthode de Newton-Raphson

En pratique, pour réaliser la démarche précédente, on doit donc appliquer un incrément $d\mathbf{f}$ ou $d\mathbf{q}$ de façon progressive et actualiser la matrice de rigidité tangente $\mathbf{K}_T$ pour chacune de ces nouvelles itérations. La question peut alors se poser de l'incrément qu'il convient d'appliquer pour arriver au bon résultat ! Dans la plupart des codes de calcul, c'est la **méthode de Newton-Raphson** qui est utilisée pour réaliser cette procédure.

Imaginons qu'on effectue des itérations sur les chargements. A chaque nouvelle itération $i+1$, on a donc la matrice tangente calculée à l'itération précédente $\mathbf{K}_{T_i}$ et on peut calculer $\mathbf{q}_{i+1}$ comme dans l'exemple précédent (Figure 21). Ce déplacement entraîne des déformations puis des contraintes dans la structure, qui peuvent permettre d'écrire les efforts intérieurs $\mathbf{F}_{\text{int}}$ correspondants. Deux cas vont alors se poser :

- les efforts intérieurs $\mathbf{F}_{\text{int}}$ sont à l'équilibre avec l'effort imposé $\mathbf{f}_{i+1}$: on peut passer à l'incrément de charge suivant, on dit que le calcul a **convergé**.

- les efforts intérieurs $\mathbf{F}_{\text{int}}$ ne sont pas à l'équilibre avec l'effort imposé $\mathbf{f}_{i+1}$, c'est-à-dire que l'estimation du déplacement $\mathbf{q}_{i+1}$ supposé à partir de la rigidité $\mathbf{K}_T$ ne permet pas d'équilibrer la structure. Il faut alors réaliser un incrément plus petit.

Dans la réalité, la quantité $\mathbf{f}_{i+1} - \mathbf{F}_{\text{int}}$ n'est jamais exactement égale à zéro : on considère que le système est à l'équilibre lorsque cette quantité est inférieure à un seuil (appelé en général « résidu ») défini par l'utilisateur.

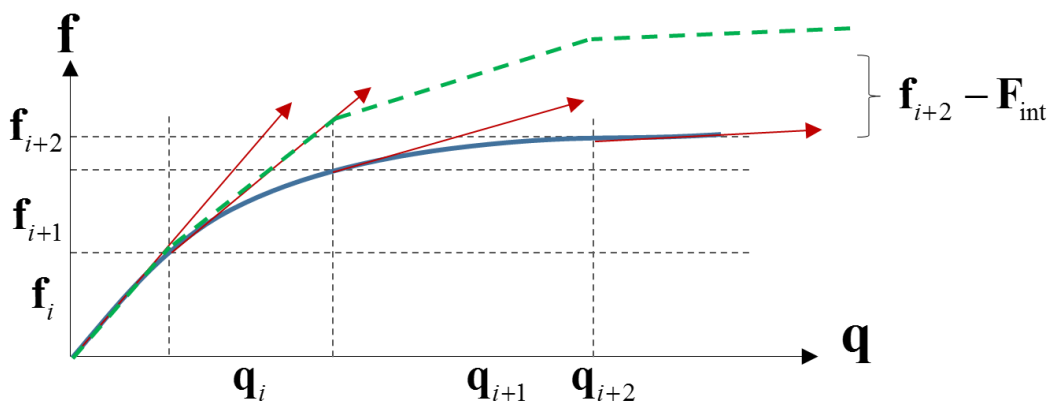


Figure 21: Illustration de l'algorithme de Newton-Raphson.

6.1.3. Les non-linéarités géométriques dans Abaqus

Dans le logiciel Abaqus, la prise en charge des non-linéarités géométriques se gère à partir de l'onglet « step » où on définit le type de calcul à effectuer. On va y préciser notamment **les paramètres de la procédure incrémentale** précédente.

A retenir 6-2

Dans le cas général, la prise en charge des non-linéarités géométriques dans Abaqus pour une étape de calcul (« step ») se fait uniquement si l'option **NLgeom** est activée .

Par défaut, une incrémentation automatique est effectuée par Abaqus et permet aux calculs simples de converger. Pour des cas plus complexes entraînant de grandes déformations, il s'agira alors de définir ces paramètres dans l'onglet « incrémentation » de l'étape de calcul. On peut alors choisir deux options :

- une incrémentation automatique : on guide le logiciel les paramètres de la méthode de Newton-Raphson ci-dessus.

- une incrémentation manuelle : on impose la valeur des incréments pour toute l'étape de calcul. Cette option est à éviter !

Lors du lancement d'un calcul, le volet « *monitor* » permet de suivre l'évolution de la convergence du calcul (Figure 22).

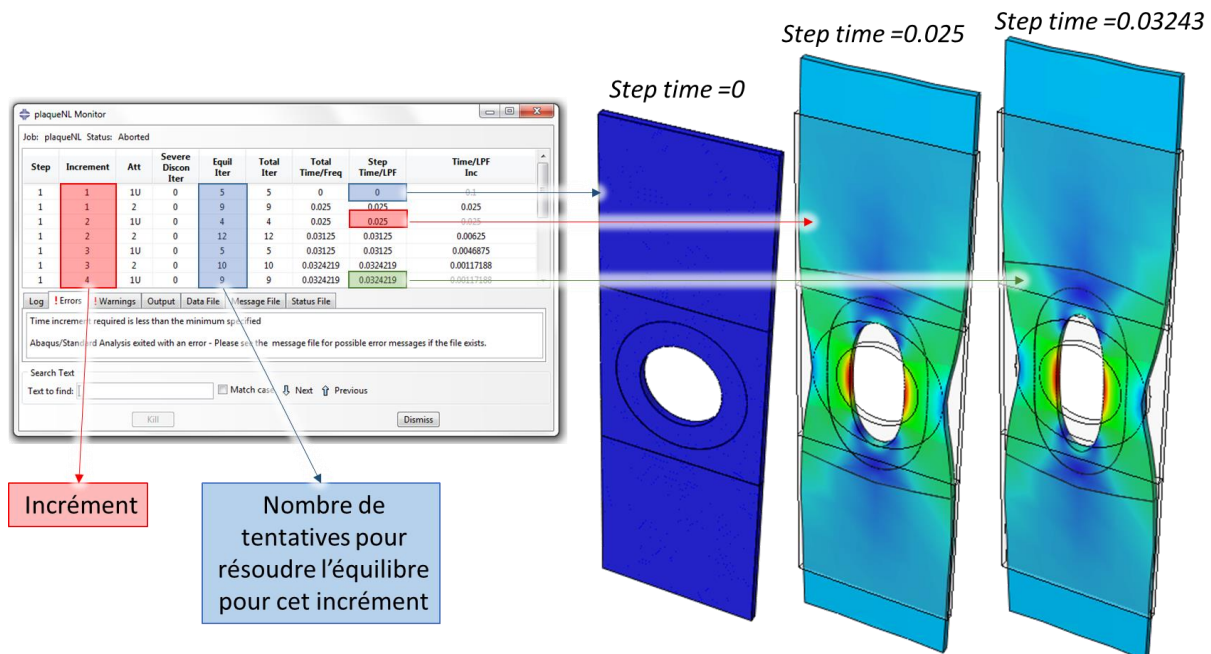


Figure 22: Exemple de convergence du calcul pour un essai de traction sur une plaque percée.

6.2. Non-linéarités matérielles

Une seconde source de non-linéarités dans un calcul par éléments finis provient du fait que les **lois de comportement elles-mêmes deviennent généralement non-linéaires lorsque l'on se situe dans un cadre de grandes déformations.**

Dit autrement, dans le cas d'un matériau non-linéaire, si on multiplie les chargements par deux, il n'y aura pas deux fois plus de déformation !

Lorsque le comportement est non-linéaire, on comprend bien que la rigidité de la structure dépend de l'état de déformation, et donc qu'il est nécessaire de procéder par incréments de chargements (ou de déplacements) comme expliqué en section précédente. Si le matériau est non-linéaire, la méthode de Newton-Raphson sera donc automatiquement utilisée.

A retenir 6-3

Dans ce cours introductif, on s'arrête aux **matériaux élastiques linéaires** uniquement !

La figure ci-dessous (Figure 23) permet néanmoins d'illustrer quatre types de comportement non-linéaires qu'il est possible d'observer, et de modéliser par exemple dans le logiciel Abaqus :

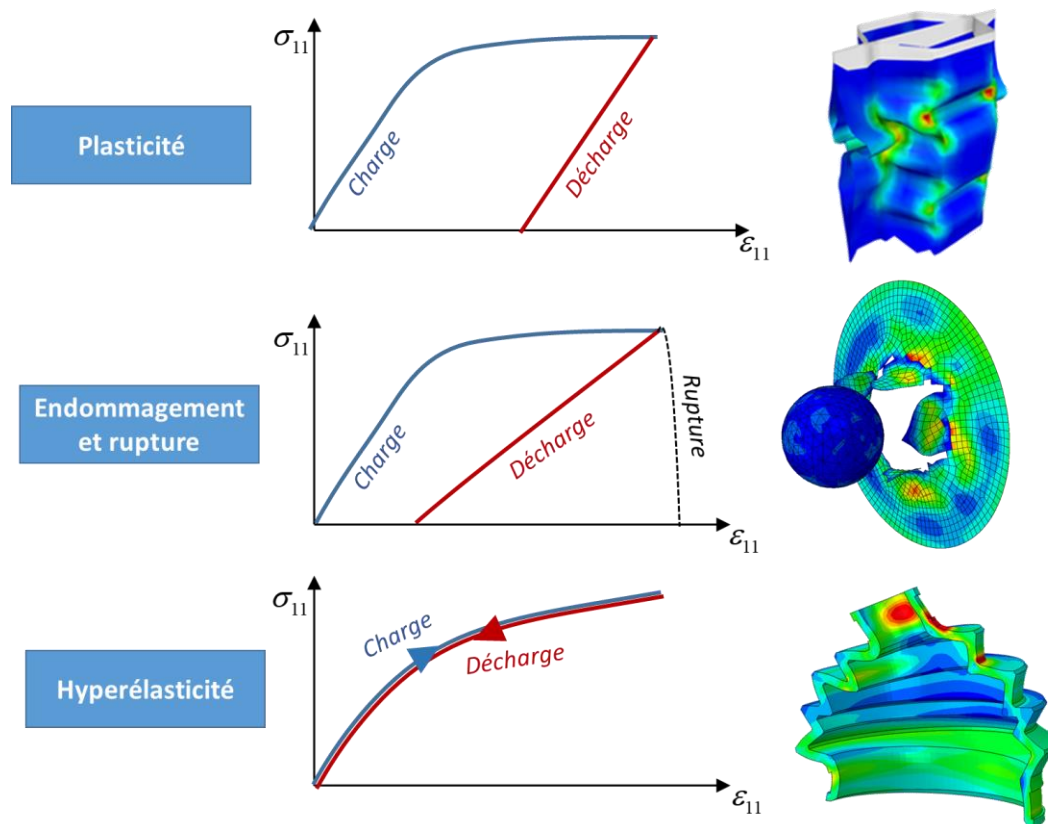


Figure 23: Illustration des courbes contrainte / déformation correspondant à la plasticité, l'endommagement et l'hyperélasticité lors de l'application d'un cycle de charge / décharge appliqué sur une éprouvette de traction,

6.3. Le traitement du contact dans la MEF

Une dernière non-linéarité très fréquente lors d'une analyse par éléments finis réside dans le fait que les conditions aux limites peuvent varier en cours de déformation suite au contact avec un autre système, ou au contact du système avec lui-même (on parle alors d'*auto-contact*). De la même façon que précédemment, il s'agira alors d'effectuer un calcul incrémental (par exemple par la méthode de Newton-Raphson décrite en section 6.1.2) afin de prendre en compte progressivement l'évolution de ces conditions aux limites.

6.3.1. Rappel : loi de Coulomb

Si une pièce exerce un effort $\underline{F}$ sur une autre, et qu'on appelle $\underline{T}$ et $\underline{N}$ respectivement les composantes tangentes et normales de cet effort, alors on peut introduire le coefficient de *frottement statique* f tel que :

- lorsque $\|\underline{T}\| < f \|\underline{N}\|$: le glissement ne se produit pas, on dit qu'on a adhérence
- à la limite $\|\underline{T}\| = f \|\underline{N}\|$: le glissement apparaît.

Il y a adhérence lorsque la résultante $\underline{F}$ se situe dans un cône de demi-angle au sommet φ , appelé *cône de frottement*, de telle sorte qu'on a la relation $f = \tan \varphi$.

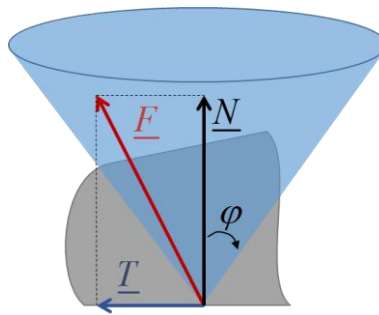


Figure 24 : définition du cône de frottement

6.3.2. Détection du contact (ou « appariement »)

Pour prendre en compte le contact entre deux corps, la première étape consiste évidemment à le détecter. Intuitivement, on comprend qu'il s'agit alors de mesurer une **distance signée** entre deux surfaces :

- si la distance est positive, les deux surfaces ne sont pas en contact
- si la distance est nulle, les deux surfaces se touchent
- si la distance est négative, les deux surfaces s'interpénètrent.

C'est en général à l'utilisateur de définir les **potentielles** surfaces de contact, pour limiter l'étendue de la zone de recherche. Cette sélection peut être rendue difficile car on ne connaît pas a priori la configuration déformée ! On doit définir une liste de surfaces de contact, donc certaines sont appelées « maîtres » et d'autres « esclaves » (Figure 25). Faire respecter le contact consiste à **empêcher les nœuds esclaves de pénétrer à l'intérieur des surfaces maîtres** (en revanche l'inverse est possible).

Le calcul de la distance signée (appelée en général g_N , « gap normal ») entre les potentielles surfaces de contact s'effectue sur la base de la surface maître, de normale

sortante $\underline{n}$, de telle sorte que :

$$g_N = \min(\underline{x}^{esclave} - \underline{x}^{maître}) \cdot \underline{n}$$

Règle 1 : si l'une des deux surfaces est **beaucoup plus rigide** que l'autre (ou si c'est un corps rigide), elle doit être surface **maître**

Règle 2 : si l'une des deux surfaces est **maillée beaucoup plus grossièrement** que l'autre elle doit être surface **maître**

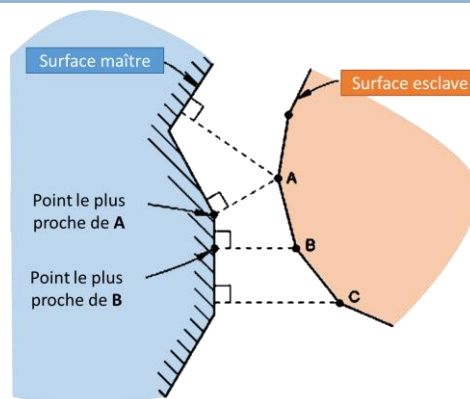


Figure 25: Surface maître et surface esclave

On peut également se trouver dans un cas où la surface d'un objet peut entrer en contact avec une autre surface d'un même objet : on parle alors **d'autocontact**. Dans ce cas on ne parle plus de surface maître ou esclave.

6.3.3. Efforts de contact-frottement

Sous l'effet du contact, une **densité d'efforts de contacts** va apparaître entre les deux surfaces, et sera d'autant plus grande que l'interpénétration entre les deux surfaces est grande. Si l'on appelle $\underline{t}_N$ la densité d'efforts de contact normaux qui résulte de l'interpénétration $g_N < 0$, on peut alors introduire un **coefficient de pénalité normal** k_N de telle sorte qu'on ait la relation **linéaire** :

$$\begin{aligned} \|\underline{t}_N\| &= -k_N g_N \text{ si } g_N < 0 \\ \|\underline{t}_N\| &= 0 \text{ si } g_N \geq 0 \end{aligned}$$

Cette prise en compte du contact, appelée **méthode des pénalités**, permet de traduire l'interpénétration entre deux surfaces par l'apparition **d'efforts de contacts** qui ont pour but de « repousser » les surfaces en contact.

Pour ce qui concerne la modélisation du frottement, si l'on reprend la loi de Coulomb rappelée ci-dessus, on peut introduire alors une mesure du **glissement** (appelée en général $\underline{g}_T$, « gap tangentiel ») défini dans le plan tangent à la surface maître de telle sorte que :

- si $\|\underline{t}_T\| < \mu \|\underline{t}_N\|$ alors $\underline{g}_T = 0$
- si $\|\underline{t}_T\| \geq \mu \|\underline{t}_N\|$ alors $\underline{g}_T$ est inconnu

On introduit en général une **régularisation** en faisant intervenir un second **coefficient de pénalité tangent** de telle sorte qu'on ait :

$$\underline{t}_T = k_T \underline{g}_T \quad \text{pour } \|\underline{t}_T\| < \mu \|\underline{t}_N\|$$

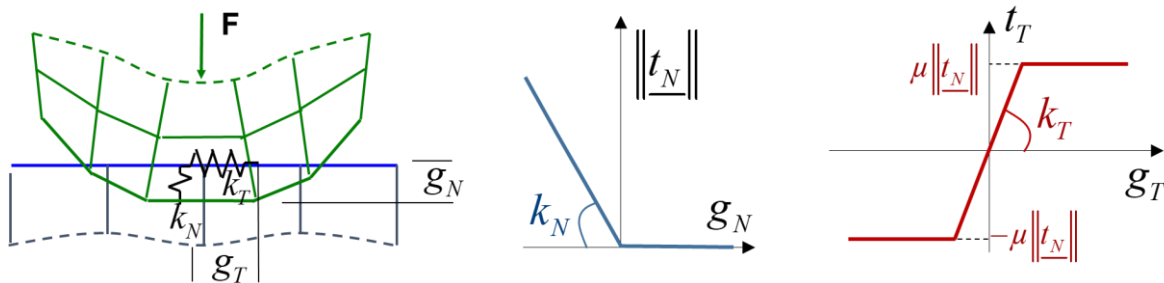


Figure 26: Définition des pénalités normales et tangentielles pour un contact frottant.

Dans le cas d'un contact **collant** (« sticking contact »), on considère que le glissement est nul quel que soit l'effort normal.

Dans le cas contraire, le glissement doit être recalculé à **chaque itération** sur la base du glissement calculé à l'itération précédente.

Evidemment, d'autres modèles beaucoup plus complexes que le modèle de frottement de Coulomb peuvent être pris en compte (et sont d'ailleurs intégrés dans *Abaqus*).

6.3.4. Prise en charge dans le calcul de l'équilibre

L'équilibre des travaux des efforts extérieurs et intérieurs écrit précédemment (4.1) peut être étendu si l'on isole les efforts de contact-frottement de telle sorte que

Si l'on note Γ_{cf} la zone de contact (appartenant à la surface maître), on peut alors formuler l'équilibre (en reprenant les notations de la section 4.1) :

$$\mathcal{W}_{\text{int}}(\underline{u}) + \mathcal{W}_{cf}(\underline{u}) = \mathcal{W}_{\text{ext}}(\underline{u}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{W}_{cf}(\underline{u}) = \int_{\Gamma_{cf}} \left(\underline{x}^{\text{esclave}} - \underline{x}^{\text{maître}} \right) \cdot \underline{t}_{cf} \, d\Gamma_{cf}$$

L'effort de contact $\underline{t}_{cf}$ contient dans ce cas les efforts normaux et tangentiels :

$$\underline{t}_{cf} = \|\underline{t}_N\| \underline{n} + \|\underline{t}_{T_1}\| \underline{\tau}_1 + \|\underline{t}_{T_2}\| \underline{\tau}_2 \quad \text{où } (\underline{\tau}_1, \underline{\tau}_2) \text{ sont deux vecteurs du plan tangent à } \Gamma_{cf}$$

Comme précédemment, la solution calculée à **chaque incrément** doit respecter cet équilibre. Le **coût de calcul** nécessaire à la recherche du contact et à la prise en compte d'efforts de contact peut alors être conséquent si les surfaces de contact sont grandes.

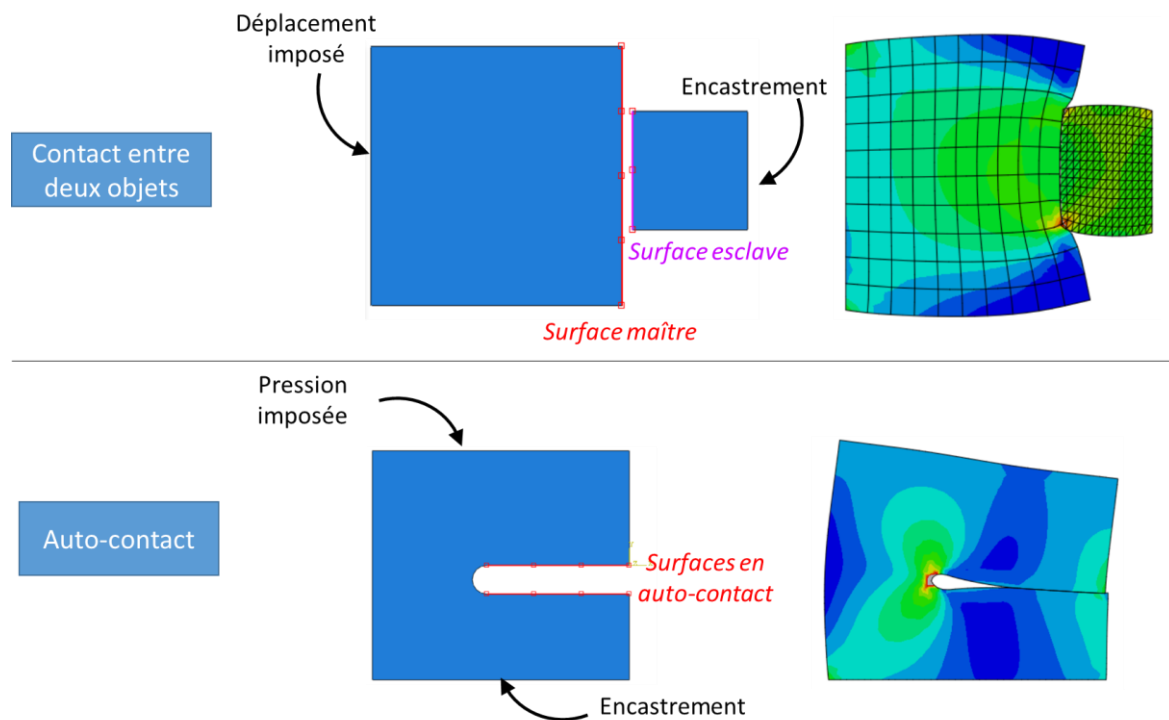


Figure 27: Exemples de traitement du contact dans *Abaqus*.

6.3.5. Intégration du contact dans *Abaqus*

Dans le logiciel *Abaqus*, la prise en compte du contact se décide dans le module « *interactions* » en suivant les étapes suivantes :

- On doit d'une part définir l'interaction de contact (« *create interaction* » ) : on choisit alors la ou les étapes de calcul (« *step* ») sur lesquelles le contact sera détecté et pris en compte, le type de contact (la démarche décrite précédemment correspond à un contact « *surface-to-surface* »), et les surfaces de contact maître et esclave (Figure 27). On peut aussi traiter le cas de l'autocontact : il n'y alors pas de surfaces maître et esclave, et on sélectionne l'ensemble des surfaces susceptibles d'entrer en contact (Figure 27).

- On doit également définir des propriétés d'interactions (« *contact interaction properties* » ) , dans lesquelles on définit notamment le type de comportement tangentiel et normal du contact. Le logiciel possède alors des algorithmes qui **calculent automatiquement les coefficients de pénalité** assurant la bonne gestion du contact, qui sont dans la plupart des cas suffisants au bon déroulement du calcul. On doit uniquement dans ce cas préciser le **coefficient de frottement** pour définir le comportement **tangentiel**, et choisir un contact dur (« *hard contact* ») pour définir le comportement **normal**.

7. Eléments de conclusions : la note de calcul

Dans les sections précédentes, les étapes essentielles d'une **Analyse par Eléments Finis d'une Machine ou d'une Structure** ont été présentées tout d'abord sur un cas simple (chapitre 3) puis ont été étendues dans le cas plus général (chapitre 4). Un exemple d'utilisation du code *Abaqus* pour effectuer une telle simulation a été détaillé (chapitre 5), et une introduction à la modélisation de quelques cas non-linéaires a été présentée (chapitre 6).

Les résultats d'une simulation utilisant la MEF seront en général présentées sous la forme d'une note de calcul, qui doit permettre au lecteur **d'effectuer à son tour le même calcul et d'arriver aux mêmes résultats**. Toutes les informations nécessaires doivent donc y apparaître, et il conviendra par conséquent de présenter de façon exhaustive les points-clefs suivants de la mise en place du jeu de données :

A retenir 7-1 : description du jeu de données dans une note de calcul

- **Géométrie** : dimensionnalité (1D – 2D – 3D), dimensions, approximations et simplifications
- **Matériaux** (loi de comportement) et type de modélisation (poutre, coques, solides, ...)
- **Type de calcul** (statique, dynamique, thermique, ...) et paramètres du calcul
- **Interactions** entre les différentes parties (contact-frottement)
- **Maillage** : nombre d'éléments, types d'éléments, méthode d'intégration
- **Conditions aux limites** et hypothèses de modélisation

En plus de ce jeu de données, la note de calcul devra présenter une **exploitation quantifiée et rigoureuse** des résultats, qui dépend du problème posé. Cette exploitation pourra notamment contenir :

- des graphiques représentant l'évolution des contraintes dans certaines régions ;
- des graphiques représentant l'évolution des déformations dans certaines régions ;
- un calcul d'un **facteur de sécurité** vis-à-vis de l'usage de la structure modélisée ;
- éventuellement, une comparaison avec des données expérimentales, une vérification analytiques des ordres de grandeurs, etc...

Dans tous les cas :

A retenir 7-2 :

Une figure constitue une illustration du traitement des résultats, mais n'est jamais un résultat en elle-même !!!! Le travail de l'ingénieur·e doit aller au-delà d'une simple représentation des champs.