Interrogation 1 - Durée : 30 min

Les matériels électroniques et les documents ne sont pas autorisés pendant la composition. Le soin apporté à la précision des justifications et à la rédaction sera un critère important d'évaluation.

Exercice 1 Un clavier comportant les chiffres de 1 à 9 permet de composer le code d'entrée d'un immeuble. Un code est composé d'une succesion de quatre chiffres.

1. Combien de codes différents peut-on former ? 9^4
2. Combien y a t-il de codes sans le chiffre 1 ? 8^4
3. Combien y a t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ? $9^4 - 8^4$ (c'est le complémentaire de la question précédente)
4. Combien y a t-il de codes comportant exactement deux fois le chiffre 1 ? $\binom{4}{2} \times 8^2$ (on choisit les deux positions parmi les 4 où on met un 1, et pour les deux positions restantes, on doit choisir parmi les 8 chiffres restants)
5. Combien y a t-il de codes comportant des chiffres tous disctincts ? $9 \times 8 \times 7 \times 6$
6. Combien y a t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ? $9^4 - 9 \times 8 \times 7 \times 6$ (c'est le complémentaire de la question précédente)

Exercice 2 On lance trois dés (non truqués, et chacun portant les numéros de 1 à 6). Quelle est la probabilité que la somme des trois dés soit égale à 6 ?

Pour cette expérience, on peut faire l'hypothèse d'équiprobabilité sur l'univers $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^3$. Les possibilités pour avoir une somme égale à 6 sont :

- $6 = 2 + 2 + 2$, ce qui correspond à un unique triplet de Ω : le triplet $(2, 2, 2)$,
- $6 = 1 + 2 + 3$, ce qui correspond à $3! = 6$ triplets de Ω, en permutant $(1, 2, 3)$ de toutes les manières possibles,
- $6 = 1 + 1 + 4$, ce qui correspond à 3 triplets de Ω.

Conclusion : il y a en tout 10 triplets qui donnent une somme égale à 6, donc la probabilité demandée vaut $10/6^3$.

Exercice 3 Dans une librairie franco-anglaise, il y a 55% de livres de poche dont 14% en anglais, 30% de bandes dessinée dont 20% en anglais, et le reste est constitué de guides de voyage, dont 42% en anglais. Un client se présente et choisit un livre au hasard. On considère les évènements A : “le livre choisi est en anglais” et B : “le livre choisi est une bande dessinée”. Ces deux évènements sont-ils indépendants ?

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|\text{“poche”})\mathbb{P}(\text{“poche”}) + \mathbb{P}(A|\text{“BD”})\mathbb{P}(\text{“BD”}) + \mathbb{P}(A|\text{“voyage”})\mathbb{P}(\text{“voyage”}) \\
&= 0.14 \times 0.55 + 0.20 \times 0.30 + 0.42 \times 0.15 \\
&= 0.20.
\end{aligned}$$

Or, $\mathbb{P}(B) = 0.30$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = 0.20 \times 0.30$, donc on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Par conséquent, les événements A et B sont indépendants.