Devoir à rendre pour le 12 avril 2020

Selon votre groupe de TD, nous vous demandons d'envoyer votre travail à :

— *TD1 : Irène Marcovici,* `irene.marcovici@univ-lorraine.fr`

— *TD2 : Pierre-Adrien Tahay,* `pierre-adrien.tahay@univ-lorraine.fr`

Merci d'indiquer comme objet de votre message : "Devoir L2 Probabilités".

Exercice 1

Alice est étudiante à l'université. Chaque matin, elle se lève en retard avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle se lève en retard, elle est obligée de prendre le bus pour se rendre à l'université. Par contre, lorsque elle est à l'heure, elle choisit avec deux chances sur cinq d'y aller à pied, et avec trois chances sur cinq de prendre le bus.

On considère un matin donné, et on définit les deux événements suivants :

- R : « Alice se lève en retard »,
- B : « Alice prend le bus ».

1. Montrer que $P(B) = \frac{11}{15}$.
2. On remarque qu'un matin donné, Alice prend le bus. Quelle est la probabilité qu'elle se soit levée à l'heure ?
3. On étudie maintenant les trajets pendant les 180 jours de cours d'une année scolaire. On suppose que chaque jour, les choix d'Alice sont indépendants des choix des jours précédents.

   On nomme X la variable aléatoire égale au nombre de fois où Alice prend le bus.

   (a) Reconnaître la loi de X. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et pour chaque entier k, une expression de $P(X = k)$ en fonction de k.

   (b) Donner $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2

Un immeuble est constitué de 3 étages. Dans le hall de l'immeuble on peut accéder à un ascenseur qui distribue chaque étage. Cinq personnes montent ensemble dans l'ascenseur. On suppose que chacune d'elle souhaite monter à l'un des trois étages de manière équiprobable et indépendamment des quatre autres. On suppose également que l'ascenseur dessert les étages demandés dans l'ordre et qu'il ne revient pas en arrière.

On note X_1 1a variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 1, X_2 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 2 et X_3 celle égale au nombre de personnes s'arrêtant a l'étage numéro 3.

1. (a) Reconnaître la loi de X_1. Décrire l'ensemble $X_1(\Omega)$ des valeurs prises par X_1. Donner $\mathbb{P}(X_1 = k)$ pour chaque k appartenant à $X_1(\Omega)$.

   (b) Donner $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_1)$.

   (c) Expliquer pourquoi X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1.

2. (a) Justifier que $X_1 + X_2 + X_3 = 5$.

(b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}\big((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)\big)$.

(c) Montrer que la probabilité que l'ascenseur ne s'arrête qu'une fois est $\frac{1}{81}$.

3. On considère la variable aléatoire Z égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur.
On a vu à la question précédente que $\mathbb{P}(\mathrm{Z} = 1) = \frac{1}{81}$. Déterminer l'ensemble $\mathrm{Z}(\Omega)$ des valeurs prises par Z.

4. Soit Y_1 la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si l'ascenseur s'arrête au premier étage et à 0 sinon. On définit de même les variables aléatoires Y_2 et Y_3 pour les étages 2 et 3.

(a) Justifier que $\mathbb{P}(Y_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0)$.

(b) En déduire $\mathbb{P}(Y_1 = 1)$ puis $\mathbb{E}(Y_1)$.

(c) Exprimer Z en fonction de Y_1, Y_2 et Y_3.

(d) On admet que Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1 et qu'elles ont donc la même espérance.
Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$ et vérifier que $\mathbb{E}(Z) = \frac{211}{81}$.