Devoir à rendre pour le 12 avril 2020

Selon votre groupe de TD, nous vous demandons d'envoyer votre travail à :

— *TD1 : Irène Marcovici,* `irene.marcovici@univ-lorraine.fr`

— *TD2 : Pierre-Adrien Tahay,* `pierre-adrien.tahay@univ-lorraine.fr`

Merci d'indiquer comme objet de votre message : "Devoir L2 Probabilités".

Exercice 1

Alice est étudiante à l'université. Chaque matin, elle se lève en retard avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle se lève en retard, elle est obligée de prendre le bus pour se rendre à l'université. Par contre, lorsque elle est à l'heure, elle choisit avec deux chances sur cinq d'y aller à pied, et avec trois chances sur cinq de prendre le bus.

On considère un matin donné, et on définit les deux événements suivants :

- R : « Alice se lève en retard »,
- B : « Alice prend le bus ».

1. Montrer que $\mathbb{P}(B) = \frac{11}{15}$.
   On applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B|R)\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(B|\overline{R})\mathbb{P}(\overline{R}) \\ &= 1 \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \\ &= \frac{11}{15}.\end{aligned}$$

⚠ Ne pas oublier d'écrire les termes $\mathbb{P}(R)$ et $\mathbb{P}(\overline{R})$

2. On remarque qu'un matin donné, Alice prend le bus. Quelle est la probabilité qu'elle se soit levée à l'heure ?
   Il s'agit ici de calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{R}|B) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{R} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B|\overline{R}) \times \mathbb{P}(\overline{R})}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}}{\frac{11}{15}} \\ &= \frac{6}{11}.\end{aligned}$$

3. On étudie maintenant les trajets pendant les 180 jours de cours d'une année scolaire. On suppose que chaque jour, les choix d'Alice sont indépendants des choix des jours précédents.

   On nomme X la variable aléatoire égale au nombre de fois où Alice prend le bus.

(a) Reconnaître la loi de X. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et pour chaque entier k, une expression de $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de k.
On peut considérer qu'Alice répète 180 fois de manière indépendante une expérience où elle a une probabilité $\mathbb{P}(B) = \frac{11}{15}$ de prendre le bus. Le nombre X de fois où Alice prend le bus suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 180$ et $p = \frac{11}{15}$.
Ainsi, l'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, 180\}$, et pour chaque entier $k \in X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{180}{k} \left(\frac{11}{15}\right)^k \left(\frac{4}{15}\right)^{180-k}.$$

⚠ Ne pas oublier de préciser les valeurs des deux paramètres n et p de la loi binomiale.

(b) Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
On sait que pour une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p, on a $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$. Ici, on obtient donc :

$$\mathbb{E}(X) = 180 \times \frac{11}{15} = 132$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = 180 \times \frac{11}{15} \times \frac{4}{15} = \frac{176}{5} = 35,2.$$

Exercice 2

Un immeuble est constitué de 3 étages. Dans le hall de l'immeuble on peut accéder à un ascenseur qui distribue chaque étage. Cinq personnes montent ensemble dans l'ascenseur. On suppose que chacune d'elle souhaite monter à l'un des trois étages de manière équiprobable et indépendamment des quatre autres. On suppose également que l'ascenseur dessert les étages demandés dans l'ordre et qu'il ne revient pas en arrière.
On note X_1 1a variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 1, X_2 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 2 et X_3 celle égale au nombre de personnes s'arrêtant a l'étage numéro 3.

1. (a) Reconnaître la loi de X_1. Décrire l'ensemble $X_1(\Omega)$ des valeurs prises par X_1. Donner $\mathbb{P}(X_1 = k)$ pour chaque k appartenant à $X_1(\Omega)$.
On peut considérer qu'on répète 5 fois de manière indépendante une expérience où une personne choisit un étage, avec une probabilité 1/3 de choisir l'étage numéro 1. Le nombre X_1, qui représente le nombre de fois où l'étage numéro 1 a été choisi, suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 1/3$.
L'ensemble des valeurs prises par X_1 est $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, et pour chaque entier $k \in X_1(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}.$$

(b) Donner $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_1)$.
On a
$$\mathbb{E}(X_1) = np = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$
et
$$\mathrm{Var}(X_1) = np(1-p) = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}.$$

(c) Expliquer pourquoi X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1.
De même, pour X_2 (resp. X_3), on peut considérer qu'on répète 5 fois de manière indépendante une expérience où une personne a une probabilité 1/3 de choisir l'étage numéro 2 (resp. 3). Les variables X_2 et X_3 suivent donc aussi la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 1/3$.

2. (a) Justifier que $X_1 + X_2 + X_3 = 5$.
Il y a cinq personnes en tout, donc si on additionne le nombre de personnes qui choisissent l'étage 1, le nombre de personnes qui choisissent l'étage 2, et le nombre de personnes qui choisissent l'étage 3, le total vaut 5.

(b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}\big((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)\big)$.
L'événement $(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)$ coïncide avec l'événement $X_3 = 5$. Donc :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)\big) &= \mathbb{P}(X_3 = 5)\\ &= \binom{5}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^{5-5}\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^5\\ &= \frac{1}{243}.\end{aligned}$$

(c) Montrer que la probabilité que l'ascenseur ne s'arrête qu'une fois est $\frac{1}{81}$.
L'ascenseur ne s'arrête qu'une fois si : $X_1 = 5$ ou $X_2 = 5$ ou $X_3 = 5$, ces événements étant deux à deux incompatibles. La probabilité demandée vaut donc :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((X_1 = 5) \cup (X_2 = 5) \cup (X_3 = 5)\big) &= \mathbb{P}(X_1 = 5) + \mathbb{P}(X_2 = 5) + \mathbb{P}(X_3 = 5)\\ &= \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^5}\\ &= \frac{3}{3^5} = \frac{1}{3^4}\\ &= \frac{1}{81}.\end{aligned}$$

⚠ Il était important de préciser que les événements étaient deux à deux incompatibles pour pouvoir transformer la probabilité de l'union en somme des probabilités.

3. On considère la variable aléatoire Z égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur.
On a vu à la question précédente que $\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{81}$.
Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par Z.
On a $Z(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

4. Soit Y_1 la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si l'ascenseur s'arrête au premier étage et à 0 sinon. On définit de même les variables aléatoires Y_2 et Y_3 pour les étages 2 et 3.

(a) Justifier que $\mathbb{P}(Y_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0)$.
Les événements $Y_1 = 0$ (l'ascenseur ne s'arrête pas au premier étage) et $X_1 = 0$ (aucune des cinq personnes ne choisit le premier étage) sont identiques, donc ils ont la même probabilité.

(b) En déduire $\mathbb{P}(Y_1 = 1)$ puis $\mathbb{E}(Y_1)$.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_1 = 1) &= 1 - \mathbb{P}(Y_1 = 0) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) \\
&= 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{5-0} \\
&= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 \\
&= \frac{211}{243}.
\end{aligned}$$

La variable aléatoire Y_1 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5$, et :

$$\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{211}{243}.$$

(c) Exprimer Z en fonction de Y_1, Y_2 et Y_3.
On a $Z = Y_1 + Y_2 + Y_3$.

(d) On admet que Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1 et qu'elles ont donc la même espérance. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et vérifier que $\mathbb{E}(Z) = \frac{211}{81}$.
Comme $Z = Y_1 + Y_2 + Y_3$, par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(Y_2) + \mathbb{E}(Y_3)$.
Or, Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1, donc : $\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(Y_2) = \mathbb{E}(Y_3) = \frac{211}{243}$.
D'où :

$$\mathbb{E}(Z) = 3 \times \frac{211}{243} = \frac{211}{81}.$$

⚠ Les variables Y_1, Y_2, Y_3 ne sont absolument pas indépendantes (car on a par exemple $\mathbb{P}(Y_1 = 0 \cap Y_2 = 0 \cap Y_3 = 0) = 0$ alors que $\mathbb{P}(Y_1 = 0)\mathbb{P}(Y_2 = 0)\mathbb{P}(Y_3 = 0) > 0$), mais il n'y avait pas besoin d'utiliser de propriété d'indépendance pour cette question, seulement la linéarité de l'espérance.