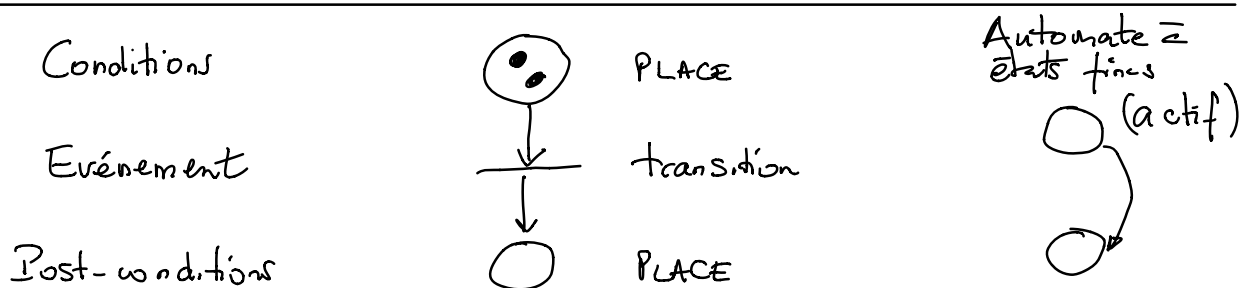


RdP $\rightarrow$ S.E.D. (cf cours 1A)
(Etat / Transition)

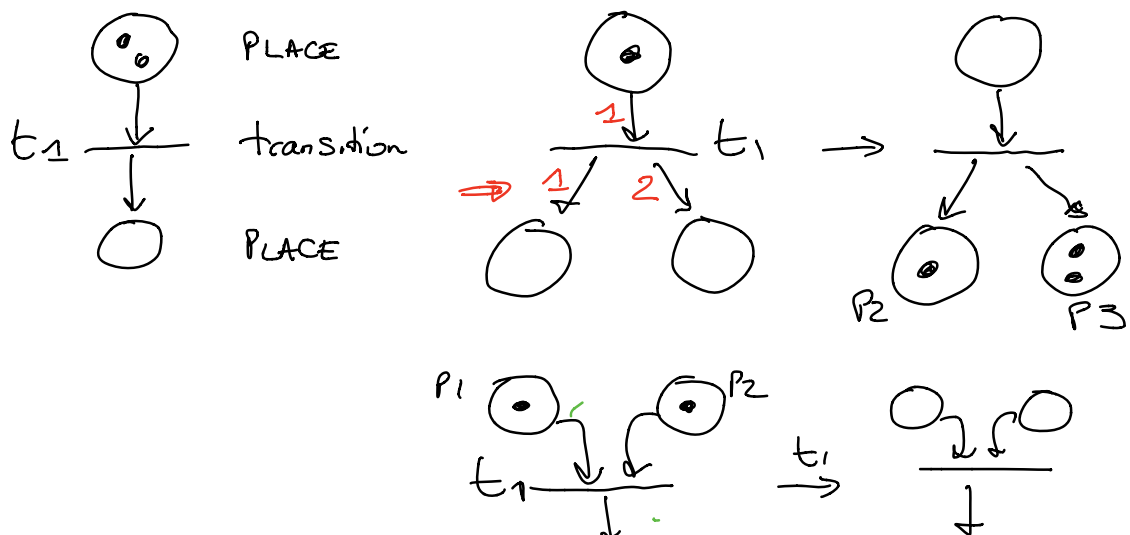
$\swarrow$ // , partage de ressources
modélisation de flux (trafic routier
ferroviaire
contrôle aérien)

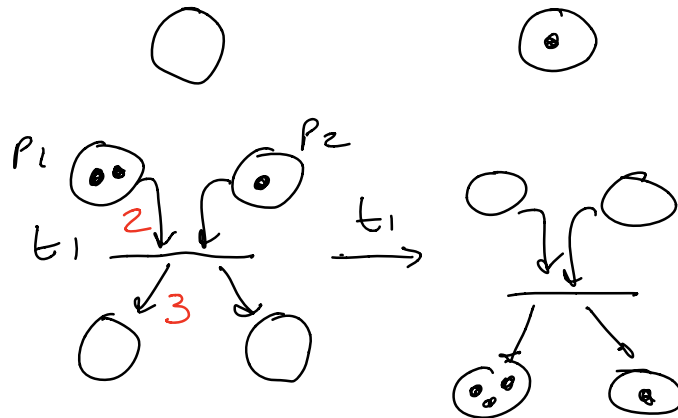
$\Rightarrow$ EVALUATION $\left\{ \begin{array}{l} \text{PROPRIETES} \\ \text{PERFORMANCES (SLF)} \end{array} \right.$



JETON

Places $\rightarrow$ peuvent contenir n jetons indifférenciés





RdP Ordinaires $\rightarrow$ arc poids de 1
 RdP Généralisés $\rightarrow$ arc poids entiers

Reseaux de Petri

EXEMPLE : ATELIER DE COUPE DE BOIS

CONDITIONS

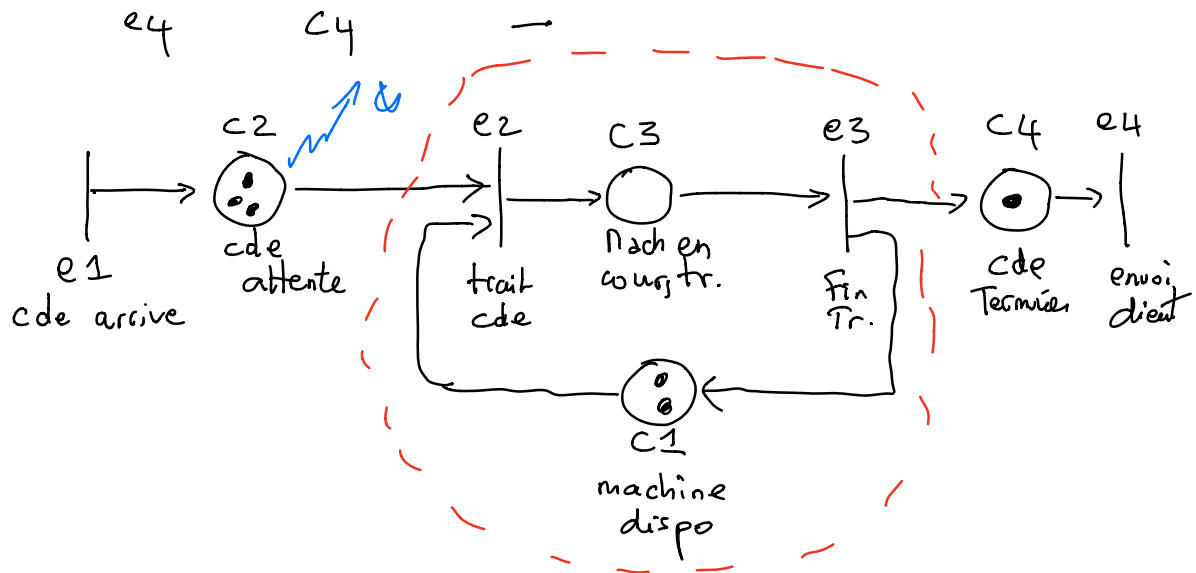
- La machine de coupe est au repos ($c1$)
- Une commande est en attente ($c2$)
- La commande est en cours de traitement ($c3$)
- La commande est terminée ($c4$)

ÉVÉNEMENTS

- Une commande arrive ($e1$)
- La machine débute la commande ($e2$)
- La machine termine la commande ($e3$)
- La commande est envoyée pour la livraison ($e4$)

Événement
$e1$
$e2$
$e3$
$e4$

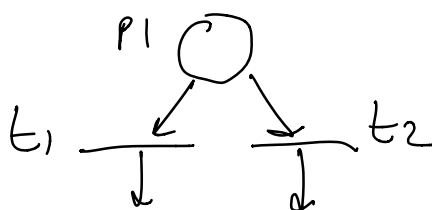
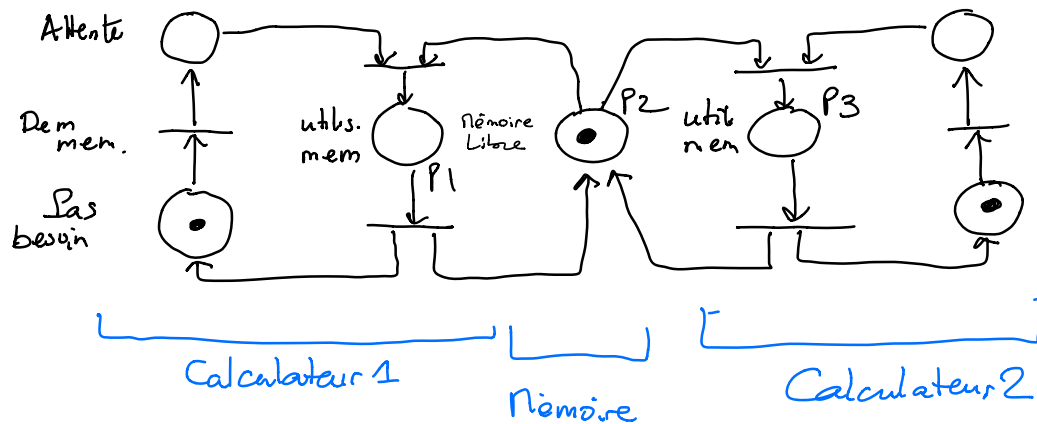
	Cond	Post-condition
$e1$	—	$c2$
$e2$	$c2, c1$	$c3$
$e3$	$c3$	$c4, c1$



$m(c_1) + m(c_3) = 2$ tout le temps vrai
INVARIANT de marquage

Calculateur 1 $\longleftrightarrow$ Mémoire $\longleftrightarrow$ Calculateur 2

Calculateur 1: Pas besoin de mem., Demande / attente mem., Utilisation mémoire
Calculateur 2: Idem



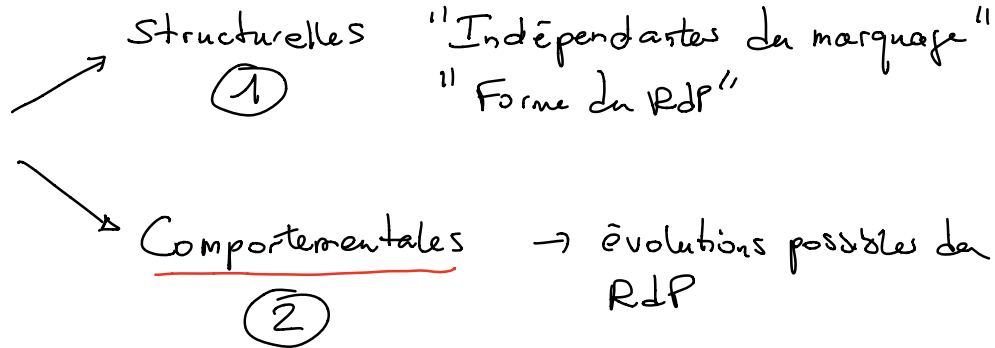
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



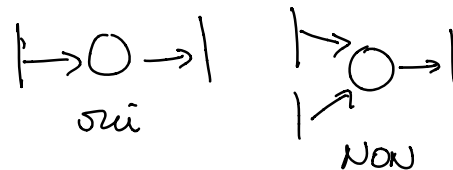
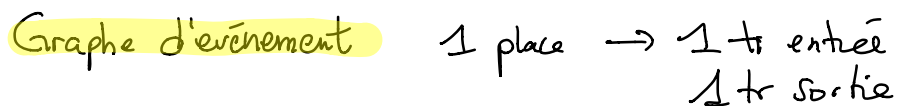
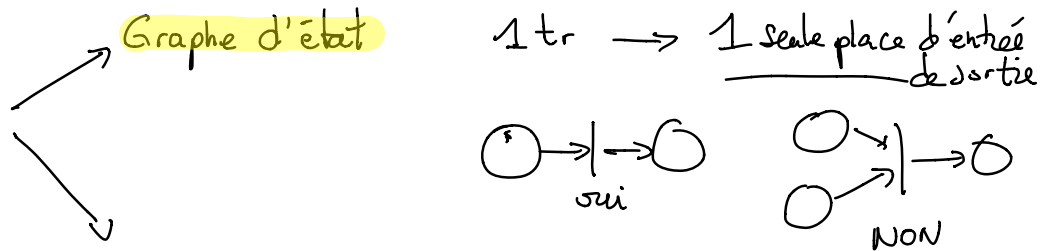
(1)

$$m(P1) + m(P2) + m(P3) = 1$$

Propriétés

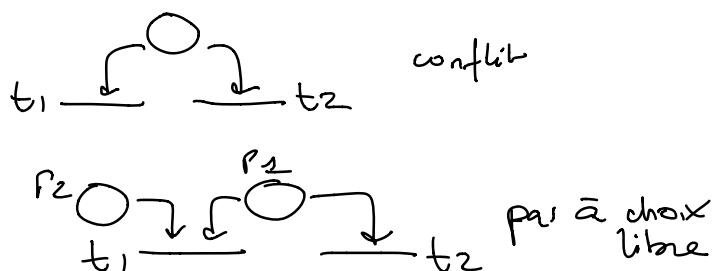


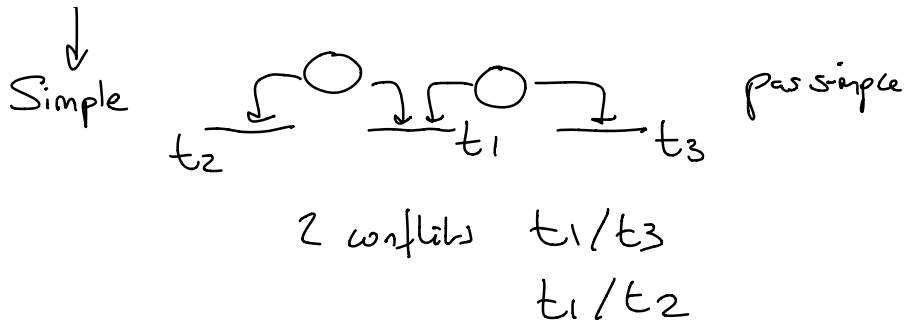
(1)



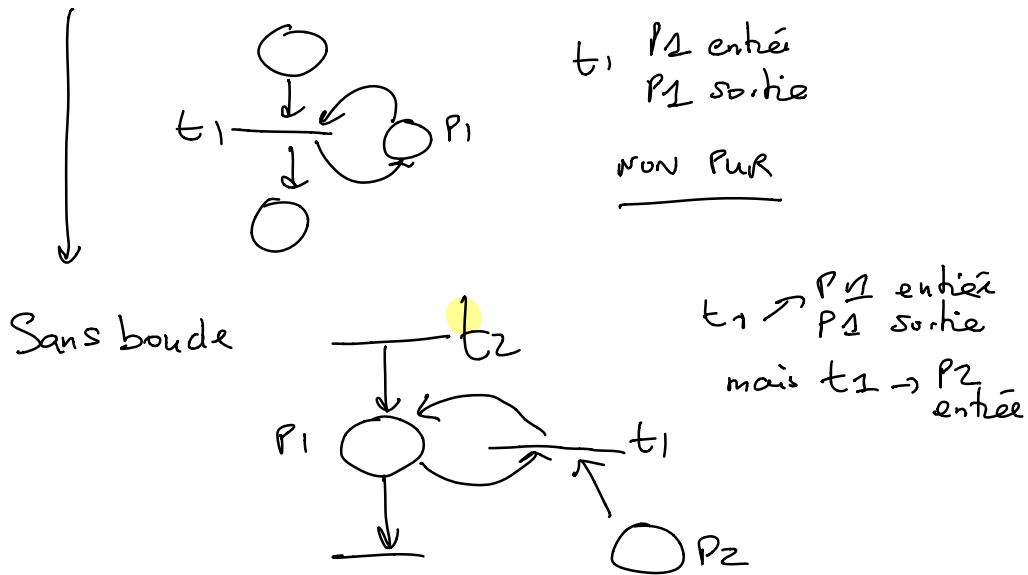
Conflict

Choix libre



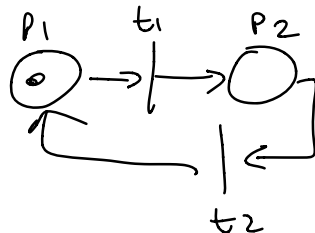


- **PUR** tr avec $\hat{n}$ place entrée et de sortie



② Comportement états

- **Borné** nbre max de jeton par place



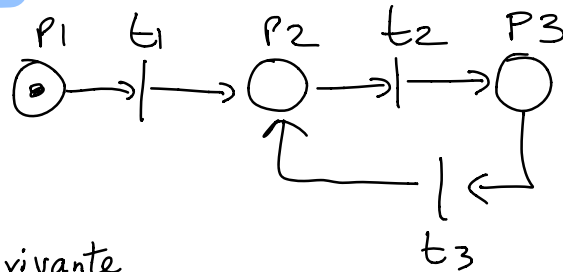
$$\begin{aligned} \text{nbre max } P_1 &= 1 \\ \text{nbre max } P_2 &= 1 \\ \Rightarrow \text{nbre max} &= 1 \end{aligned}$$

si $\exists$ nbre max $\Rightarrow$ borné
si nbre max = 1 $\Rightarrow$ SAUF

$$\begin{array}{l} \text{nbre max de } P_1 = 1 \\ \text{nbre } P_2 = 3 \\ \text{nbre } P_3 = 2 \end{array}$$

↳ Rdp borné à 3

- VIVACITÉ**



t_2 vivante
 t_3 vivante

t_1 non vivante

mais quasi-vivante = franchissable 1 fois depuis le marquage initial.

- Reinitialisabilité**

retour possible au marquage initial & l'état atteint

- Blocage**

marquage où ne peut plus rien franchir



- Invariant de marquage**

$$\alpha m(P_1) + \beta m(P_2) + \dots + \gamma m(P_i) = \text{cste}$$

Techniques pour évaluer les propriétés

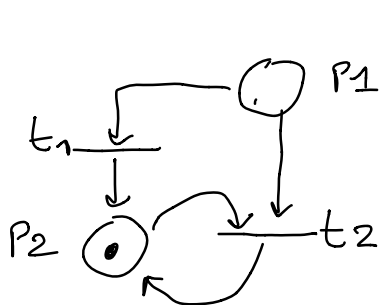
↗ Graphe de marquage

→ Algèbre

Graphe de marquage

marquage vecteur dim n n = nombre de places $\begin{pmatrix} \text{nbre jeton } P_1 \\ \hline P_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ i \end{pmatrix} \quad a, b, \dots, i \text{ entiers positifs ou nuls} \quad \left| \quad \frac{!}{!} \quad p_n \right|$$



$$p_0 \quad p_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3$

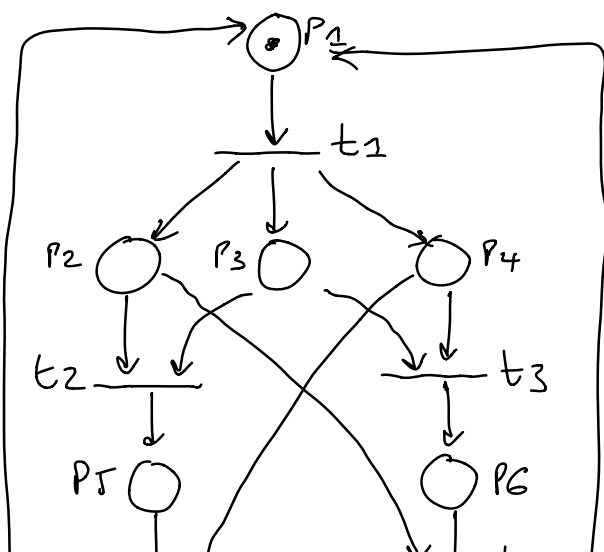
Borné à 2
 t_1 non vivantes
 t_2

au moins 1 fois t_1 depuis p_0
 t_2

$\Rightarrow$ Rdp quasi-vivant

non reinit.

Blocage sur p_2, p_3



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_5} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3$



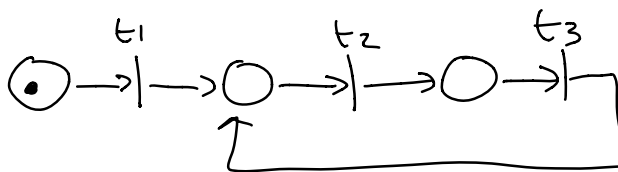
Borné à 1 $\Rightarrow$ SAUF

RdP vivant

Pas de blocage

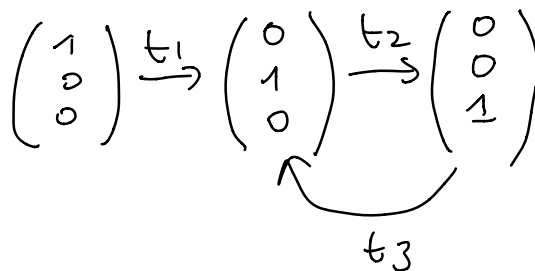
Reinitialisable

$$\begin{array}{l} \text{Inv} \\ \text{marquage} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} m(P1) + m(P2) + m(P5) = 1 \\ m(P1) + m(P4) + m(P6) = 1 \end{array} \right.$$

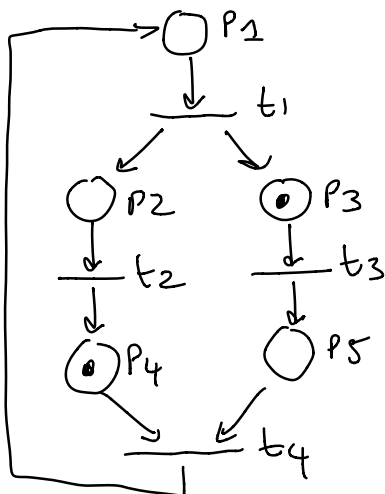


Pas de blocage

Non vivant ($t1$)



ALGÈBRE LINÉAIRE



Matrice PRE

$$\begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{array} \begin{array}{c} t1 \quad t2 \quad t3 \quad t4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice POST

$$\begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{array} \begin{array}{c} t1 \quad t2 \quad t3 \quad t4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'incidence POST - PRE

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vecteur séquence

$$\sigma = t_1 t_2 t_1 t_3 t_4$$

$$\begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = t_1 t_1 t_1 t_2 t_4$$

$$S_\sigma = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_k = \pi_i + W \cdot S_{i \rightarrow k}$$

$$\pi_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Marquage atteint après $\sigma = t_3 t_4 t_1 t_3$

$$\pi_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Invariant de marquage

$$a m(P1) + b m(P2) + \dots + i m(P_i) = \text{cste}$$

$$\text{semi-flot } F \begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}$$

$$F^T = (a \ b \ \dots \ i)$$

$$F^T \cdot W = \phi$$

$$\text{cste} = F^T \cdot \pi_i$$

Inv. connu
(propriété à vérifier)

Cherche
 $F^T (a \ b \ \dots \ i)$

Verifier $FT.W = \emptyset$

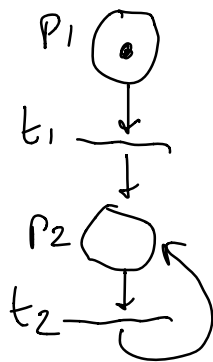
$(a \ b \ \dots \ i) \ W = 0$

$$\begin{matrix} \text{recherche} \\ \uparrow \text{Sol} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \dots \dots \dots = 0 \\ - \dots - = 0 \\ - \dots - = 0 \end{array} \right.$$

Marquage minimal pour franchir une séquence donnée

$$\pi_k = \pi_i + W \cdot S_{i \rightarrow k}$$

vraie uniquement si la séquence est franchissable



$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma = t_2 t_1$$

$$S_\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

OK pour $\sigma = t_1 t_2$

n Inéquations n nbx de tr dans la séquence

Marquage mini pour franchir $t_2 t_1$?

• $\pi_{\min}$ pour t_2 ?

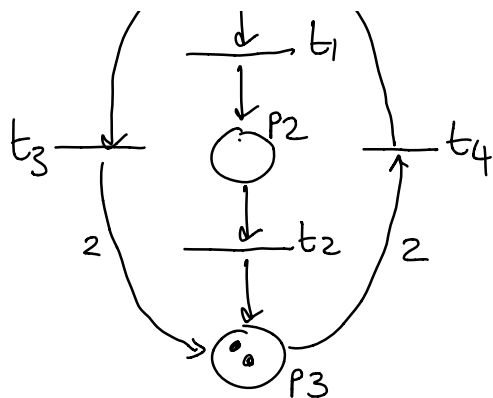
$$\pi_{\min} \geq \text{PRE}(-, t_2)$$

• $\pi_{\min} + W \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \text{PRE}(-, t_1)$

$$W(-, t_2)$$



1) π stricte incidence W ?



2) No $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ marquage atteint
après $\sigma = t_3 t_4 t_1 t_2 t_1$?

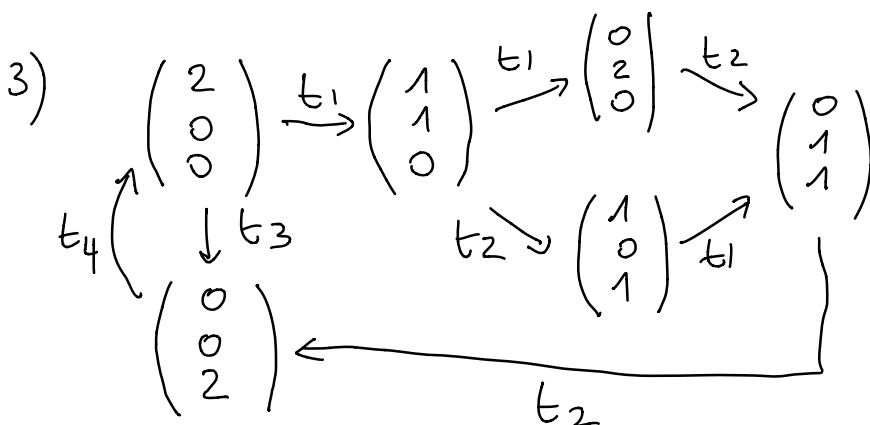
3) Graphe marquage & propriétés ?

4) Inv. marquage ?

5) Marquage min pour franchir
 $\sigma = t_3 t_2 t_3$?

$$1) \quad W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & +2 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \sigma = \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + W \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} //$$



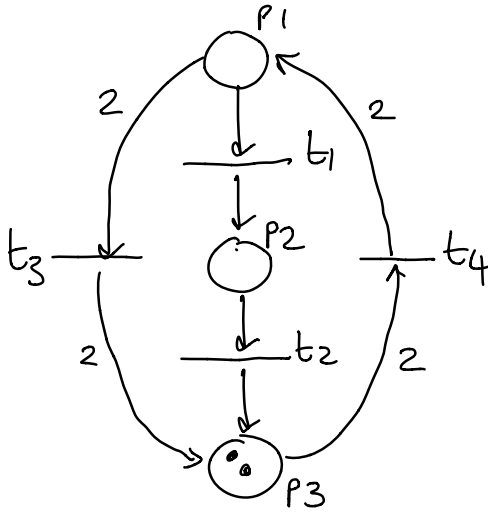
Borné ≈ 2

Vivant

Reinit

Non bloquant

4) Inv marquage ?



$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & +2 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$F^T, W = \emptyset$$

$$a m(P1) + b m(P2) + c m(P3) = \text{cste}$$

$$F^T = (a \ b \ c) \text{ Semi-flot}$$

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & +2 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +2 & -2 \end{pmatrix} = \emptyset$$

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ -b + c = 0 \\ -2a + 2c = 0 \\ 2a - 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{a=b=c}}$$

$$F^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est solution}$$

$$m(P1) + m(P2) + m(P3) = \text{cste} = F^T \cdot \pi_i$$

$$= (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

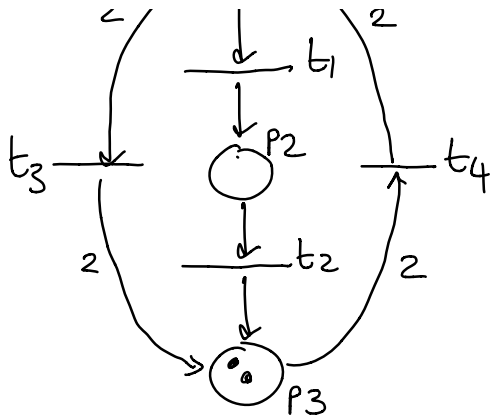
$$= 2$$

$$\boxed{m(P1) + m(P2) + m(P3) = 2} \quad \underline{\text{Inv marquage}}$$

s)



$$\sigma = t_3 t_2 t_3 ?$$



$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & +2 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$PRE = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\pi_{min} ?$

$t_3?$ • $\pi_{min} \geq PRE(-, t_3)$ $\pi_{min} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Je suis en π_{min} , est-ce que je peux franchir t_3 ?

$t_3 t_2?$ • $\pi_{min} + \left\{ W \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{vecteur signature } \sigma = t_3 \right. \geq PRE(-, t_2)$
ou $\left. + W(-, t_3) \right\}$

$$\pi_{min} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ +2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{min} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

J'étais en π_{min} , j'ai franchi t_3 maintenant est-ce que je peux franchir t_2 ?

$t_3 t_2 t_3?$ • $\pi_{min} + W \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq PRE(-, t_3)$
 $\approx W(-, t_3 t_2)$

$$\pi_{min} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ +3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{min} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

lea FRANCO
NAYER

$$\Rightarrow \pi_{min} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ansel

$$\left(\frac{1}{0} \right)$$