

NOM :

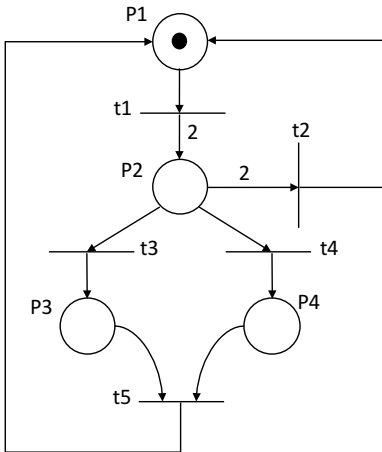
PRENOM :

Examen « Systèmes à Événements Discrets »

Vendredi 24 janvier 2020, Durée : 2 heures – Supports de cours autorisés

Exercice 1

Considérons le réseau de Petri généralisé ci-dessous (*attention deux arcs sont valués à 2*).



- 1) Donnez la matrice d'incidence W de ce réseau de Petri.
- 2) Soit le marquage initial $M_0 = (1, 0, 0, 0)$. Donnez le marquage atteint par franchissement de la séquence $\sigma_1 = t_1 t_3 t_4 t_5 t_1$ à partir de M_0 en utilisant l'équation algébrique caractéristique des RdP.
- 3) a. Donnez le graphe de marquage pour M_0 .
b. En déduire les propriétés de ce réseau pour M_0 (vivacité, borné, sauf, réinitialisabilité, blocage, ...).
- 4) Soit le P-semi flot $F^T(a, b, c, d)$:
a. Donnez les équations caractérisant les paramètres a, b, c, d de F^T .
b. En déduire un P-semi flot admissible.
c. En déduire un invariant de marquage pour M_0 .
- 5) Quel est le marquage minimum $M_{\min}$ pour que la séquence $\sigma_2 = t_1 t_3 t_2$ soit franchissable ?

Réponses (vous préciserez les principales étapes de calcul lorsque cela se justifie)

1) Matrice d'incidence

2) Marquage obtenu

3) Graphe de marquage

b. Propriétés

4) Invariant de marquage

a. Equations caractéristiques d'un P-semi flot $F^T = (a, b, c, d)$

b. Solutions admissible

$$F^T =$$

c. Invariant de marquage

5) Marquage minimum $M_{\min} = (x, y, z, t)$

Matrice PRE

▷ Inéquations $\sigma = t_1$

▷ Inéquations $\sigma = t_1 t_3$

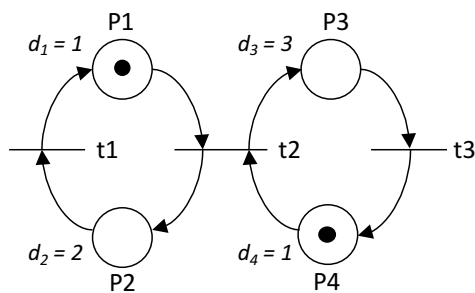
▷ Inéquations $\sigma = t_1 t_3 t_2$

D'où $M_{\min} =$

NOM :

PRENOM :

Exercice 2



On considère le réseau de Petri P-temporisé ci-contre en associant respectivement aux places P1, P2, P3 et P4 les durées suivantes $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$ et $d_4 = 1$.

- 1) Construisez le graphe de marquage « à vitesse maximale » pour un marquage initial $M_0 = (1, 0, 0, 1)$.
- 2) En déduire les fréquences de franchissement des transitions t_1 , t_2 et t_3 .

1) Graphe de marquage à vitesse maximale pour $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$ et $d_4 = 1$

2) Fréquences de franchissement pour t_1 , t_2 et t_3

Exercice 3 : Modélisation

On considère une usine de traitement des déchets. Les produits contenant du carton peuvent être traités au choix par la machine 1 ou 2 avec une durée de traitement de d_1 unité de temps. Les produits contenant du papier sont nécessairement traités par la machine 2 avec une durée de traitement de d_2 unités de temps. Chaque machine ne peut recycler qu'un seul produit à la fois. A la sortie des machines 1 et 2, les résidus de produits sont placés dans un stock. Lorsque ce stock atteint 10 résidus de produits, ceux-ci sont transportés par un chariot transporteur jusqu'à la sortie de l'usine. Le trajet aller/retour du chariot prend d_3 unités de temps et 3 chariots sont disponibles pour réaliser ces trajets.

1) Modélisation à l'aide de Réseau de Petri Généralisé

- a) Modélisez le comportement de l'usine de traitement de déchets à l'aide d'un RdP généralisé (sans tenir compte des caractéristiques temporelles); vous préciserez la signification des places et transitions utilisées.
- b) Déterminez un ou plusieurs invariants de marquage de votre réseau et son interprétation vis à vis du fonctionnement désiré.

2) Modélisation en réseau de Petri Temporisé

- a) Complétez le modèle RdP de la question 1 en introduisant les caractéristiques temporelles à l'aide des réseaux de Petri P ou T temporisés selon votre choix. On suppose que $d_1=d_2=1$ et $d_3=3$.

3) *Modélisation en réseau de Petri Coloré*

- a) Proposez un pliage de votre RdP de la question 1 à l'aide des RdP colorés ; vous préciserez les couleurs proposées (et leur signification) ainsi que les fonctions pre et post associées aux arcs de votre réseau.
- b) Déterminez la matrice d'incidence de ce nouveau RdP coloré et vérifiez que les invariants de la question 1b restent préservés.

1a) RdP Généralisé

1b) Invariants de marquage

2) Modélisation en RdP temporisé

Modèle retenu (précisez si c'est un RdP P ou T temporisé) :

Complétez le modèle de la question 2 avec les informations supplémentaires correspondant à la prise en compte des durées.

3a) Modélisation en RdP coloré

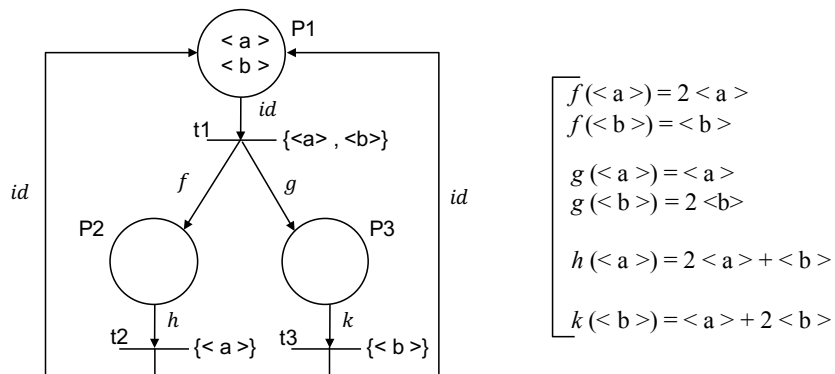
NOM :

PRENOM :

3b) Invariants de marquage

Exercice 4 : Réseau de Petri Coloré

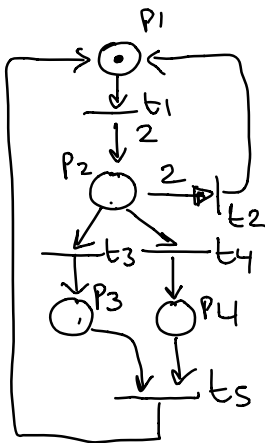
Soit le réseau de Petri coloré (couleurs $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$) suivant. Construisez son graphe de marquage à partir du marquage initial $M_0 (\langle a \rangle + \langle b \rangle, 0, 0)$.



Graphe de marquage

Eléments de correction SED 2A 2020.

Exo 1



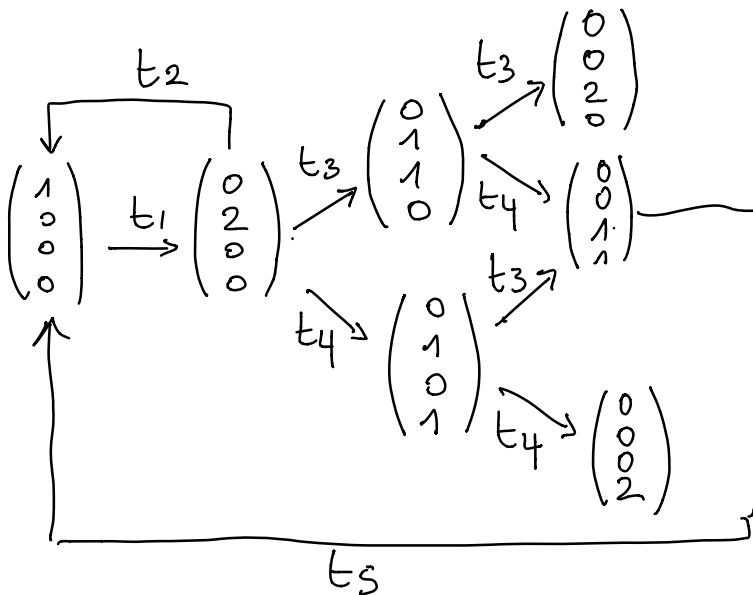
①

$$W = \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & +1 \\ +2 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = t_1 t_3 t_4 t_5 t_1 \quad S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

②



Blocage
 Pas vivant
 Pas réinit
 Borné à 2

③

$$F^T = (a, b, c, d)$$

$$\begin{aligned} -a + 2b &= 0 \\ a - 2b &= 0 \\ -b + c &= 0 \\ -b + d &= 0 \\ a - c - d &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 2b = c + d \\ b &= c = d \end{aligned}$$

$$F^T(2, 1, 1, 1)$$

$\Rightarrow$ inv marquage

$$2m(P_1) + m(P_2) + m(P_3) + m(P_4) = 2$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

④ $t_1 t_3 t_2$

$$\text{PRE} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \pi_{\min} \geq \text{PRE}(-, t_1) \quad \pi_{\min} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textcircled{a}$$

$$\bullet \pi_{\min} + W(-, t_1) \geq \text{PRE}(-, t_3)$$

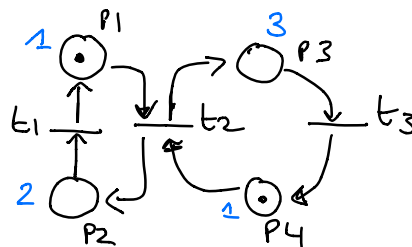
$$\pi_{\min} + \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \pi_{\min} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textcircled{b}$$

$$\bullet \pi_{\min} + W(-, t_1 t_3) \geq \text{PRE}(-, t_2)$$

$$\pi_{\min} + \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \pi_{\min} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textcircled{c}$$

$$\textcircled{a}, \textcircled{b}, \textcircled{c} \Rightarrow \boxed{\pi_{\min} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

RdP Temporisé



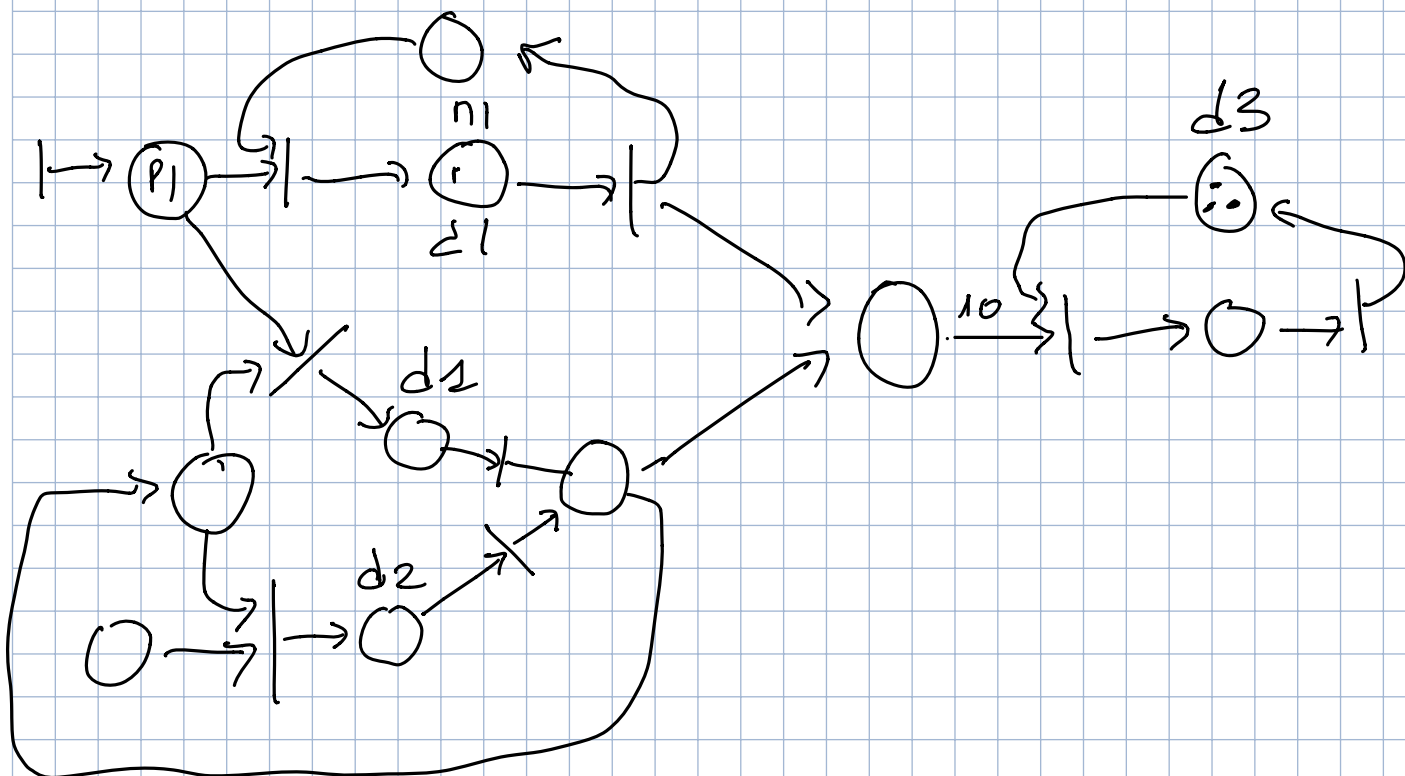
$d(P4) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1(2) \\ 1(3) \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_1/2} \begin{pmatrix} 1(2) \\ 0 \\ 1(1) \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_3/1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1(1) \end{pmatrix}$$

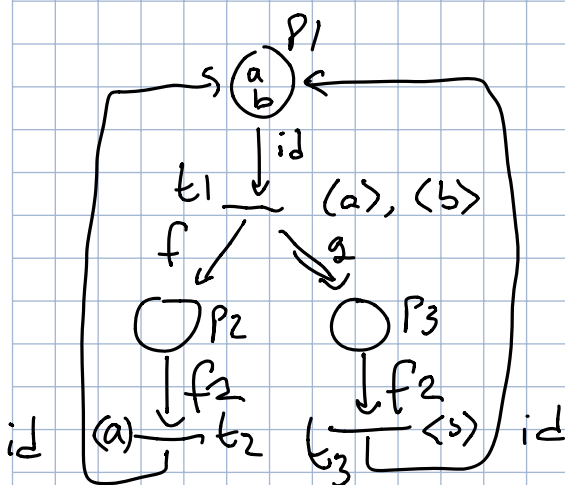
Fréquence $\left\{ \begin{array}{l} t_1 \leq 1/4 \\ t_2 \leq 1/4 \\ t_3 \leq 1/4 \end{array} \right.$

$t_2/1$

Modelisation



Exo R&P Laboré



$$\begin{aligned} f(a) &= 2a \\ f(b) &= b \\ g(a) &= a \\ g(b) &= 2b \end{aligned}$$

$$f_1(a) = 2a + b$$

$$f_2(b) = a + 2b$$

$$\Gamma = \begin{matrix} t_1/a & t_1/b & t_2/a & t_3/b & t_1/a \\ - & & & & \end{matrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} -id & id & id \\ +f & -f_1 & 0 \\ +g & 0 & -f_2 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 2a+b \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Pi' = \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -id & id & id \\ +f & -f_1 & 0 \\ +g & 0 & -f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a+b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2a-b+a+b \\ f(2a+b)-f_1(a) \\ g(2a+b)-f_2(b) \end{pmatrix}$$

$$\Pi' = \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ 4a+b-2a-b \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 2a + 2b & -a & -2b \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2a \\ a \end{pmatrix}$$

