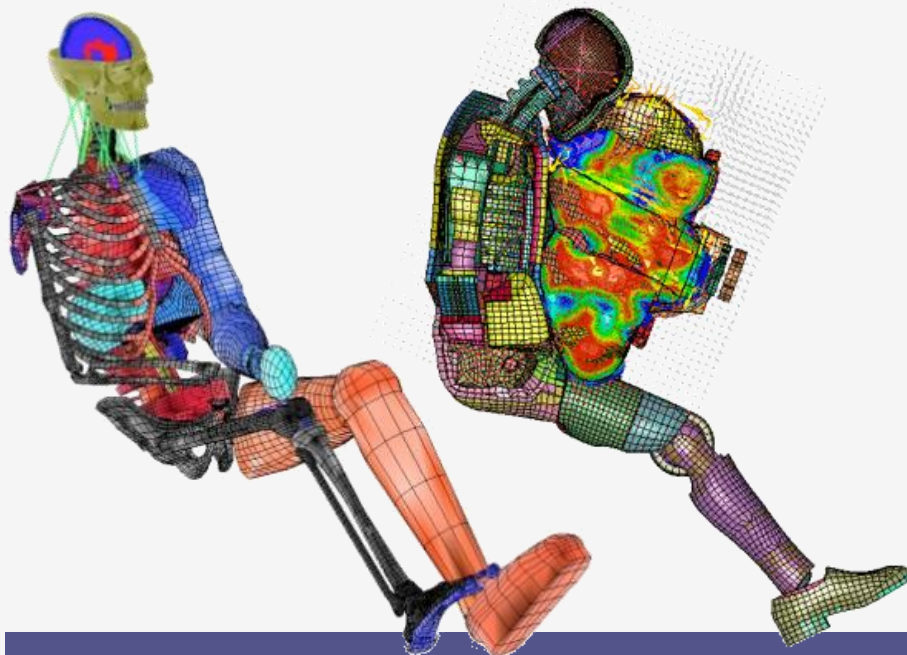


Analyse par Éléments Finis des Machines et des Structures (BC8-12)

Responsable de cours : Cédric LAURENT cedric.laurent@univ-lorraine.fr

TP : Amirouche GOUMGHAR amirouche.goumghar@univ-lorraine.fr



LORRAINE
INP Ensem



Contenu	
CM1 : Rappels et contexte	20 janvier 2025
CM2 : Cœur de la méthode MEF	22 janvier 2025
CM3 : Extension au non-linéaire et applications	24 janvier 2025
TP1 : étude d'un treillis plan	27 au 31 janvier 2025
TP2 : étude du barrage hydroélectrique	5 au 10 février 2025
TP3 : étude du volant d'inertie	12 au 24 février 2025
TP4 : étude du contact pneu-route	26 février au 3 mars 2025
TP5 (évalué)	5 au 12 mars 2025

1: Introduction à la Méthode des Éléments Finis

Présentation générale de la méthode

2: Rappels de mécanique des milieux continus en HPP

Contraintes – déformations – loi de comportement

3: Exemple de résolution directe pour un treillis (TD)

Exercice « à la main » pour comprendre les étapes de la méthode

4: Extension au cas général (en HPP)

Étapes d'une modélisation par éléments finis

5: Utilisation du code de calcul Abaqus

Grandes étapes de fonctionnement du code Abaqus (suite en TP !)

6: Quelques mots sur les non-linéarités

Non-linéarités géométriques, matérielles, et traitement du contact

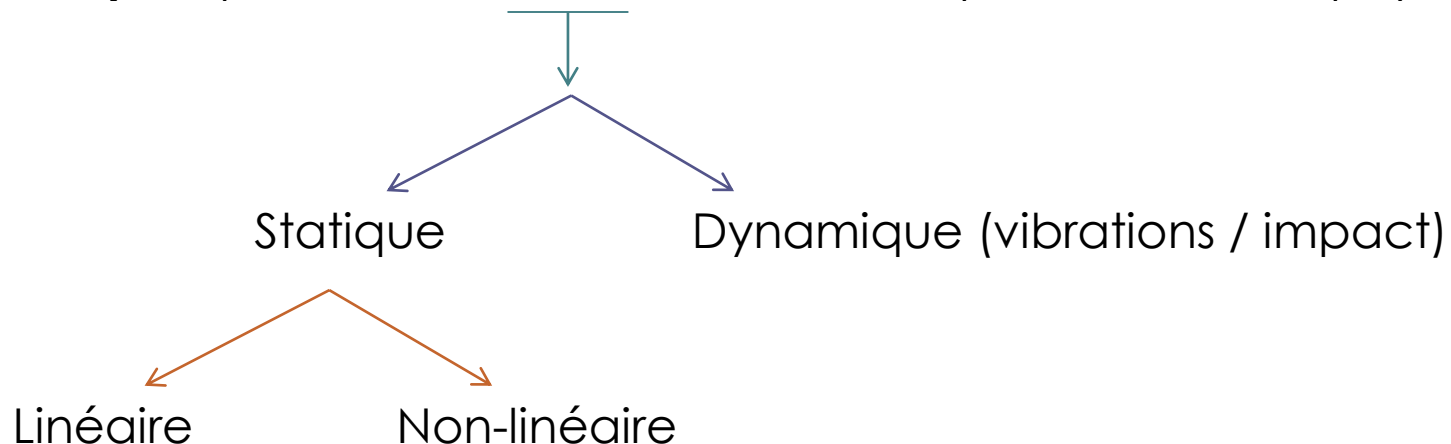
7: Conclusions : la note de calcul

1 : Introduction à la Méthode des Éléments Finis (MEF)

- Intérêt et histoire de la méthode
- Domaines d'application

Domaine general de la mécanique

- ✓ **Théorique** : principalement applications de la MMC
→ solutions exactes, mais non applicables pour des problèmes réels
- ✓ **Experimentale** : mesures de forces/déformations, construction de maquettes, etc...
→ nécessite un objet physique = très cher et laborieux !
- ✓ **Numérique** : pour des solides, fluides, ou des problèmes multiphysiques



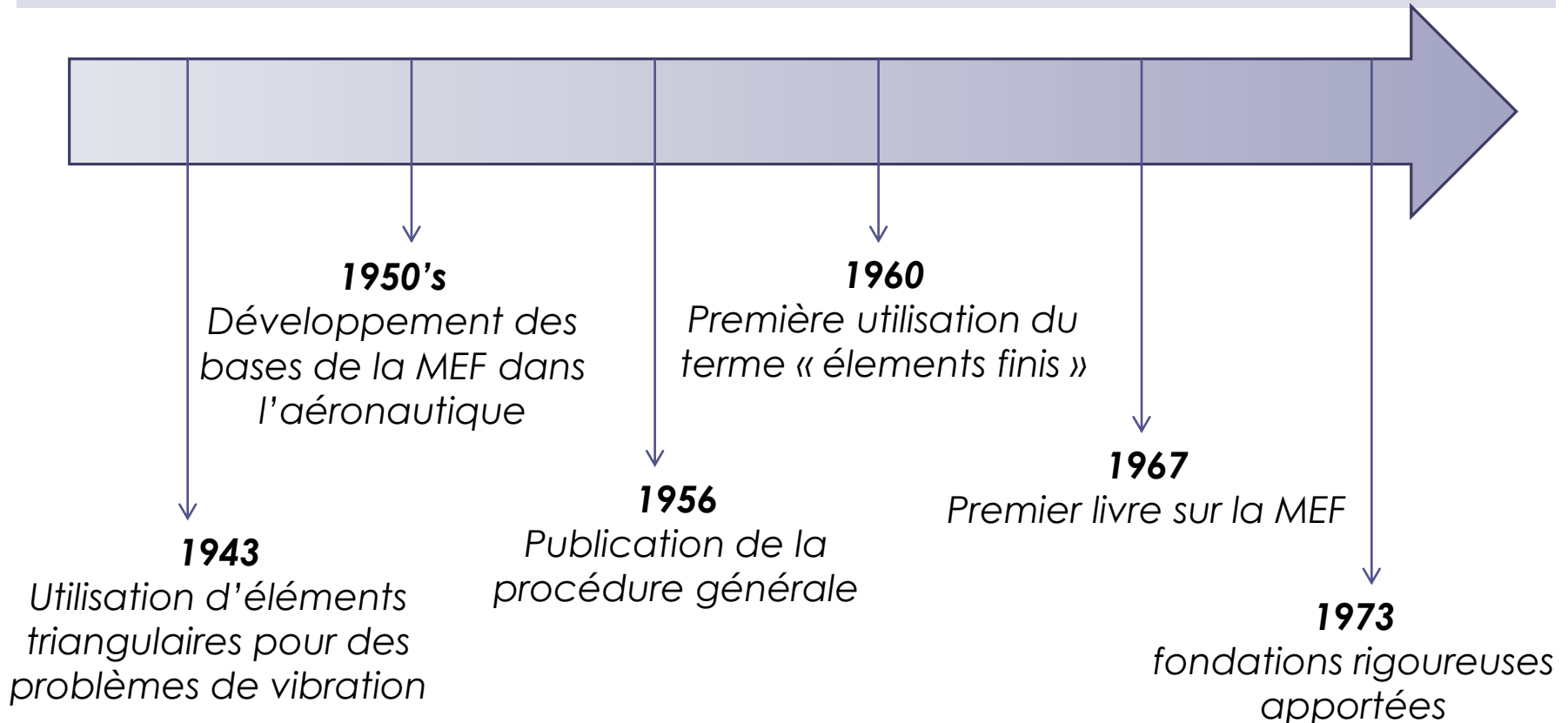
Philosophie de la méthode

- ✓ Réalité: géométries, matériaux, conditions aux limites **complexes**
- ✓ Idée : transformer des **EDP** en équations matricielles



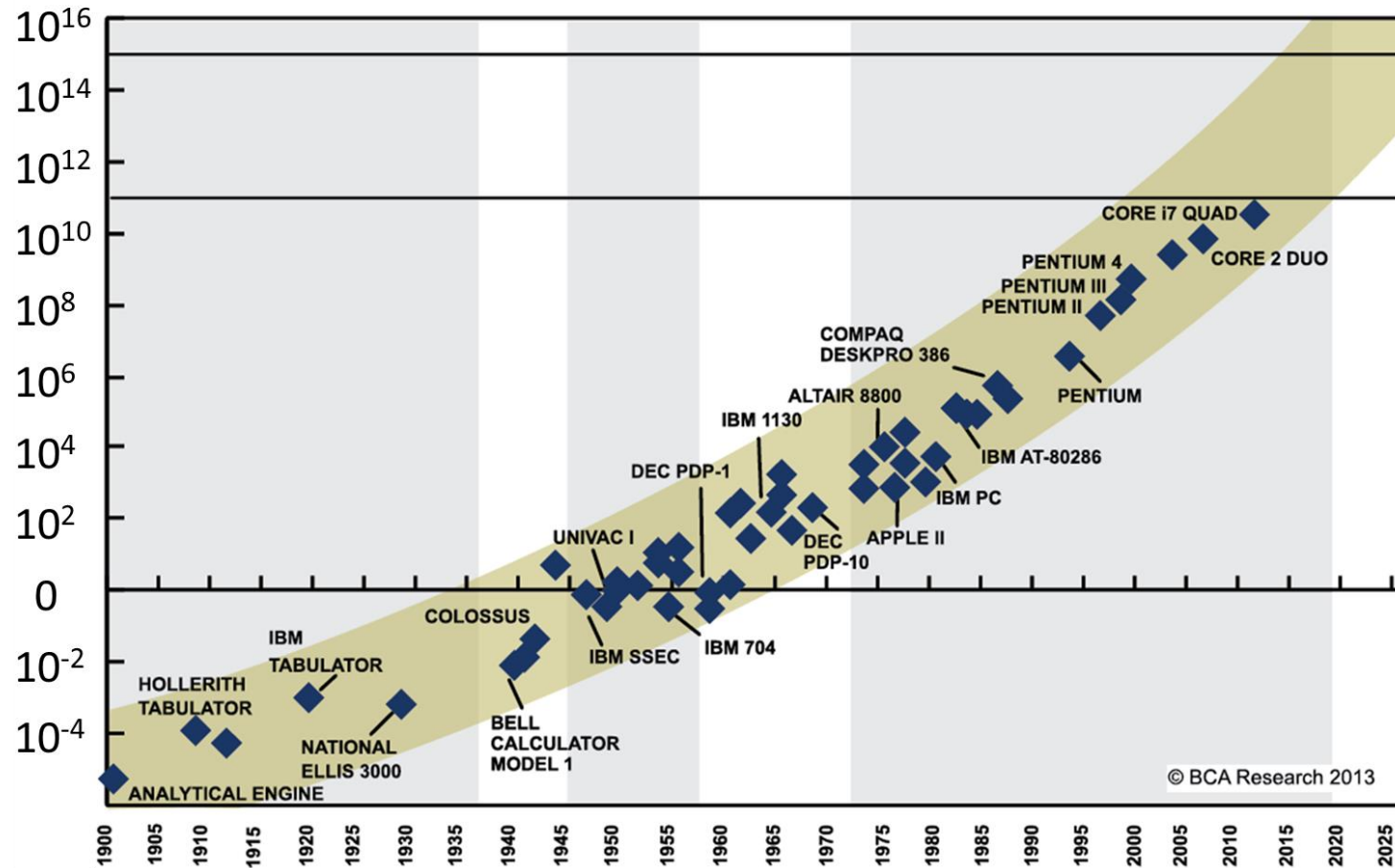
- ✓ De nombreuses méthodes:
 - ❑ **Méthode des *Eléments Finis* (MEF)**
 - ❑ *Méthode des différences finies*
 - ❑ *Méthode des éléments frontières*
 - ❑ *Méthode des volumes finis*
 - ❑ *Méthode spectrale*
 - ❑ *Méthode sans maillage*
 - ❑ *eXtended Finite Element Method (X-FEM)*

Histoire de la MEF



- ✓ Au début : juste une astuce d'ingénieurs
- ✓ Aujourd'hui : même utilisée comme validation d'autres methods!

Histoire de la MEF



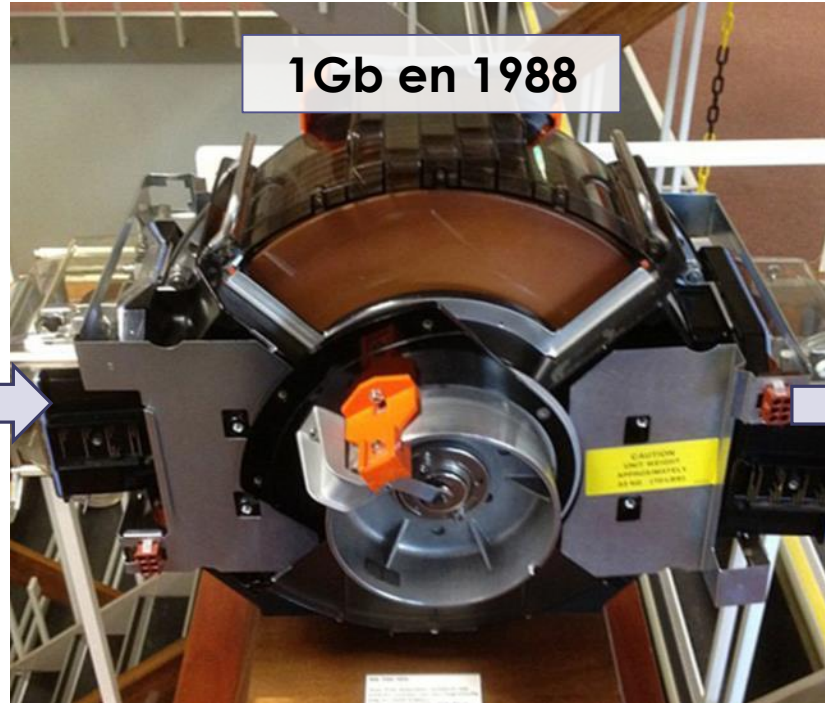
Evolution (échelle logarithmique!) des capacités de calcul
(nombre d'opérations par seconde et pour 1000\$)

Histoire de la MEF

5 Mb en 1956

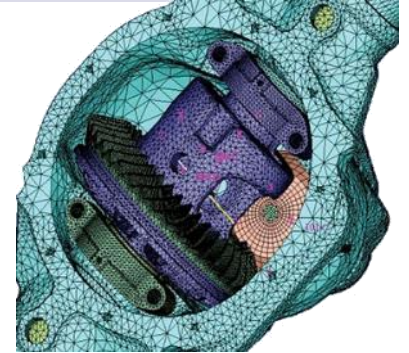


1Gb en 1988



Avantages de la MEF

- ✓ Pas de limitation sur les **géométries**
- ✓ Pas de limitation sur les **lois de comportements**
- ✓ Pas de limitation sur les **conditions aux limites**
- ✓ S'adapte à de nombreuses disciplines
(solides, fluides, dynamique, électromagnétisme, thermique, ...)



Méthode générale et puissante
De nombreux logiciels commerciaux validés



Utilisée tous les jours par des milliers d'ingénieur · e · s !

Inconvénients de la MEF

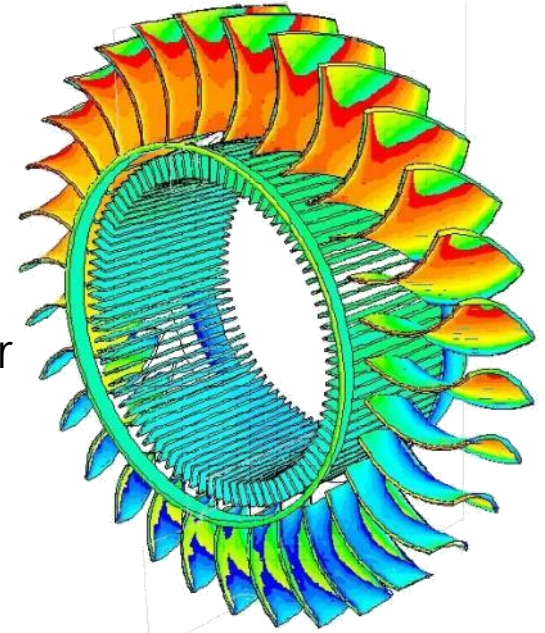
Solution approchée → à quel point ?

➖ Sensible aux **hypothèses de modélisation** (maillage, chargement,...)

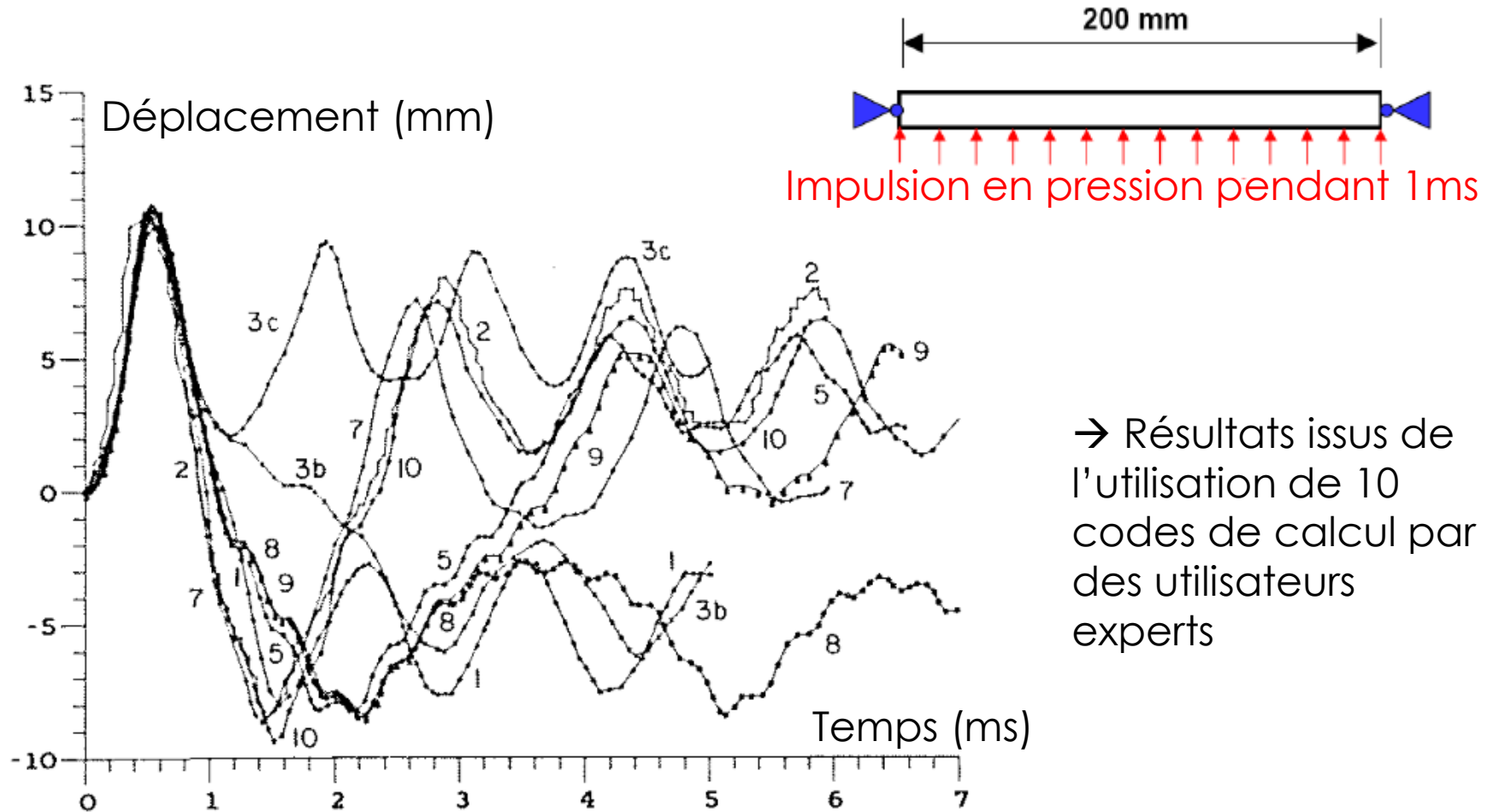
Confiance excessive!!

Attention : une figure et de belles couleurs ne constitue en aucun cas un résultat

- ✓ Nécessite des **points de validation expérimentaux**
- ✓ Si impossible : isoler des problèmes simples à valider
- ✓ Garder en tête les hypothèses de modélisation!
- ✓ Nécessaire : études de sensibilité aux paramètres



➡ **Conclusion : un jugement d'ingénieur · e est essentiel !**



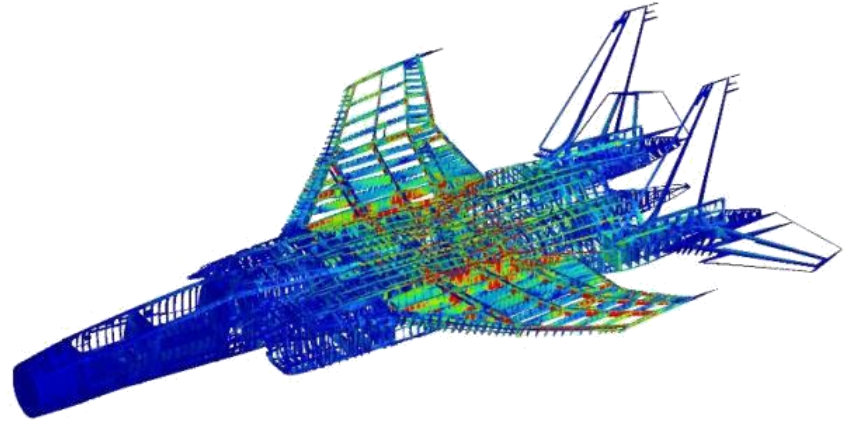
→ Résultats issus de l'utilisation de 10 codes de calcul par des utilisateurs experts

Symonds PS et Yu TX, Counterintuitive Behavior in a Problem of Elastic-Plastic Beam Dynamics, Journal of applied mechanics, 52(3), **1985**

1 : Introduction à la Méthode des Éléments Finis (MEF)

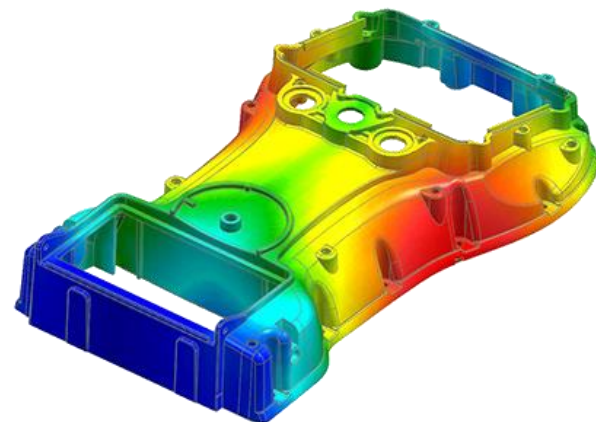
- Intérêt et histoire de la méthode
- **Domaines d'application**

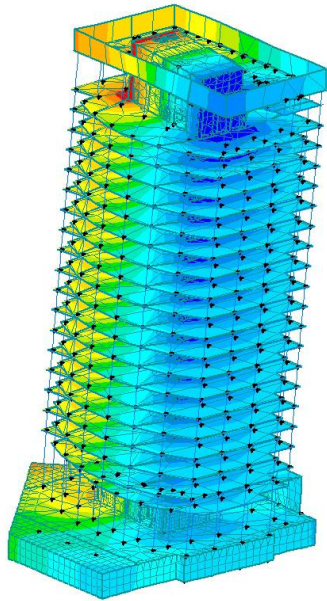
Conception et
allégement des structures
en automobile et
aéronautique



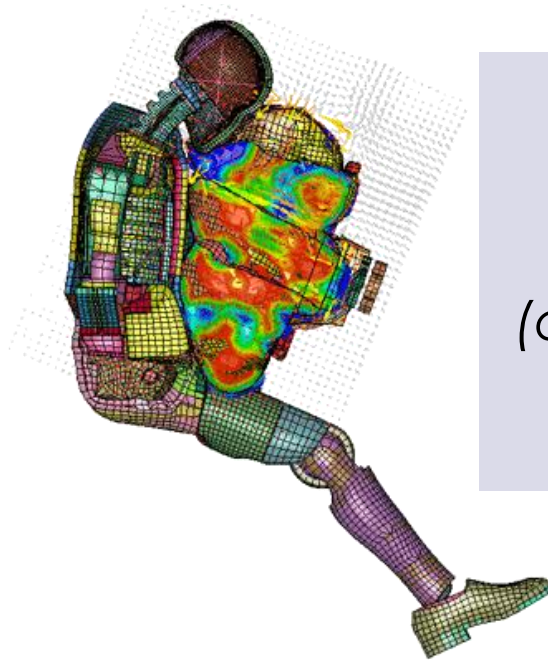
Transferts de chaleur
(moteurs, bâtiment, centrales, etc...)

Optimisation de
procédés de mise en
forme

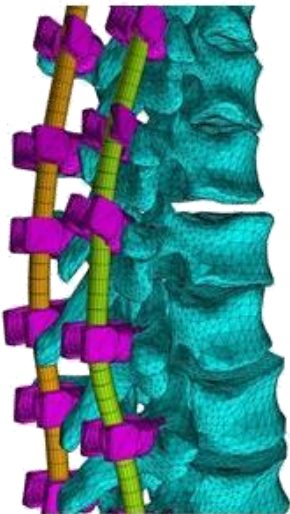




Analyse du comportement vibratoire
(génie civil, transports, ...)



Résistance aux chocs
(accidentologie, balistique, ...)



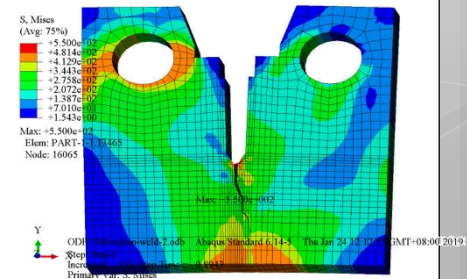
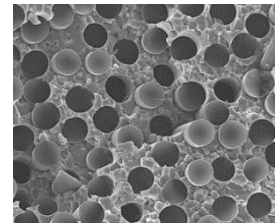
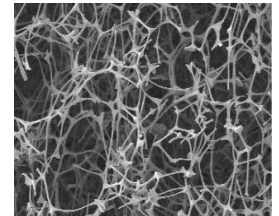
Conception et évaluation de dispositifs
orthopédiques

2 : Rappels de mécanique des milieux continus en HPP

- **Hypothèses**
- Les déformations
- Les contraintes
- Loi de comportement
- Les équations fondamentales

Notion de milieu continu

- ✓ Notion de Volume Élémentaire Représentatif (**VER**)
 - = on considère la matière comme **continue** dans un VER
 - = la **taille** du VER dépend du matériau !
- ✓ La matière est continue :
 - = pas d'apparitions de discontinuités (fissures)
 - = pour cela : X-FEM → **très** compliqué !!!



Dans tout ce cours : **Hypothèse des petites perturbations (HPP)**

- ✓ Positions *actuelles* **proches** des positions *initiales*
- ✓ Matière **peu déformée** (quelques dixièmes de pourcent)

2 : Rappels de mécanique des milieux continus en HPP

- Hypothèses
- **Les déformations**
- Les contraintes
- Loi de comportement
- Les équations fondamentales

Configurations actuelles et initiales

- ✓ Champ de **déplacements** : $\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X}$
- ✓ Lien entre les deux configurations = **gradient de la transformation**

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{\underline{Grad}}(\underline{u}(\underline{X}, t)) + \underline{\underline{I}}$$

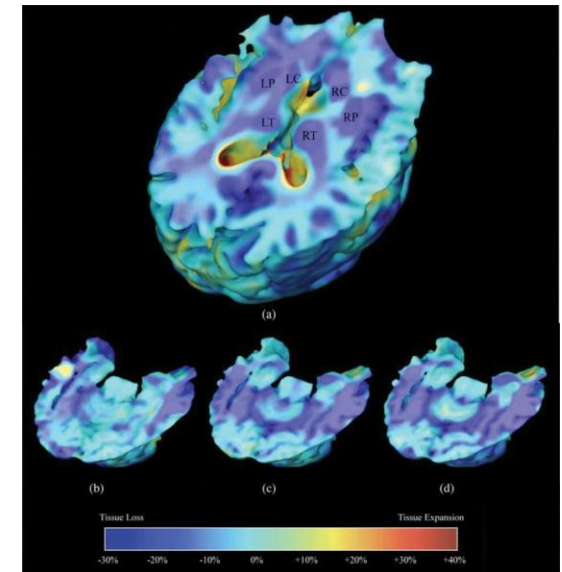
= contient toute l'information sur la transformation

- ✓ Variation de volume

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det \underline{\underline{F}} = J$$

$$0 < \det \underline{\underline{F}} = J < +\infty$$

Jacobien = **variation locale de volume**



Tenseur des déformations linéarisé

✓ Tenseur des **déformations** : rotation éliminée par rapport à $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$

→ En HPP :
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t))^T \right)$$

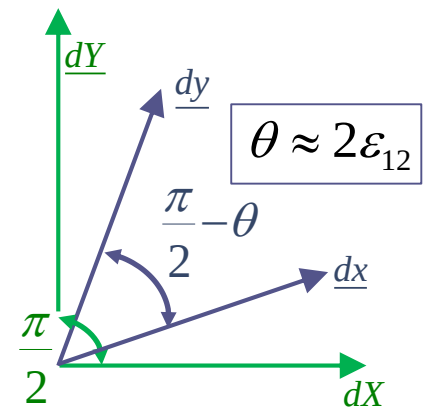
Les composantes des tenseurs de déformation sont sans dimension

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

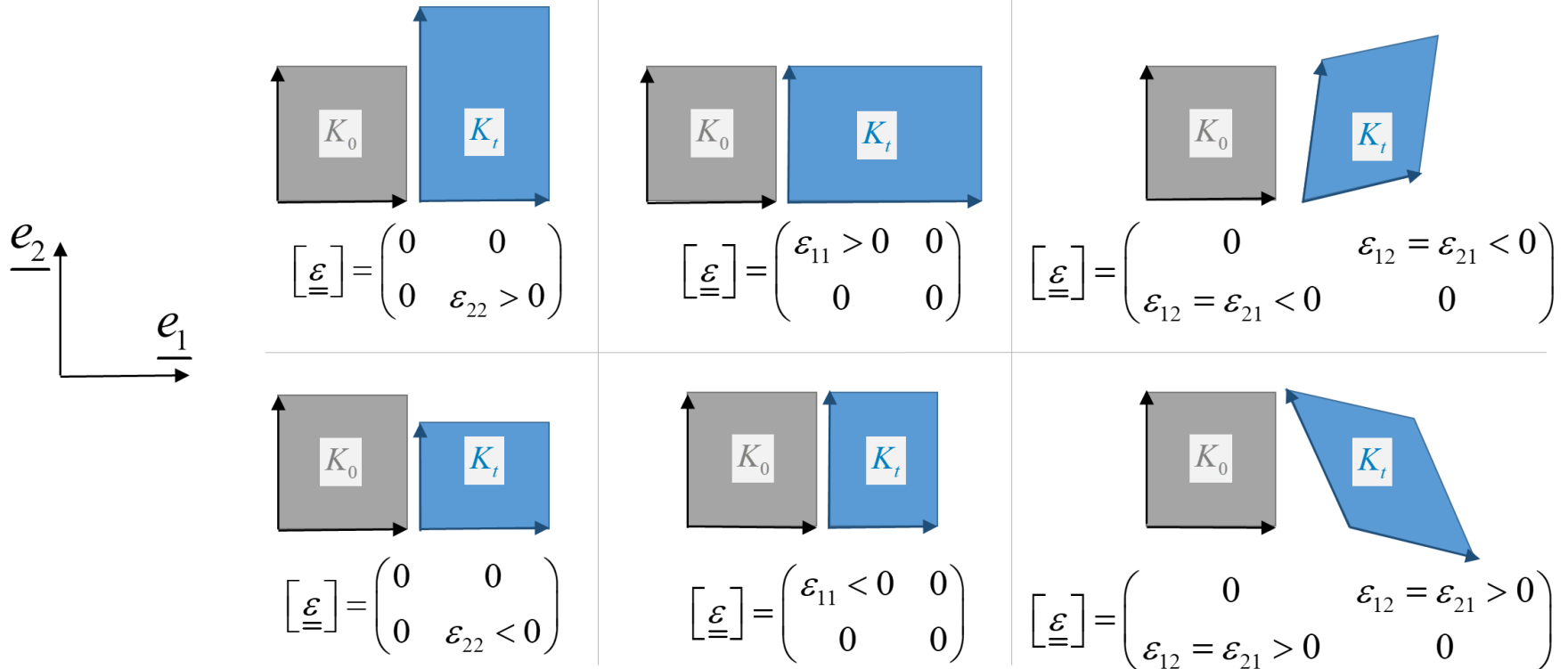
sym

→ ε_{ii} est l'allongement (si >0) ou rétrécissement (si <0) relatif selon $\underline{e}_i$

→ ε_{12} représente la moitié de la variation d'angle entre $\underline{dx}$ et $\underline{dy}$



Tenseur des deformations linéarisé



2 : Rappels de mécanique des milieux continus en HPP

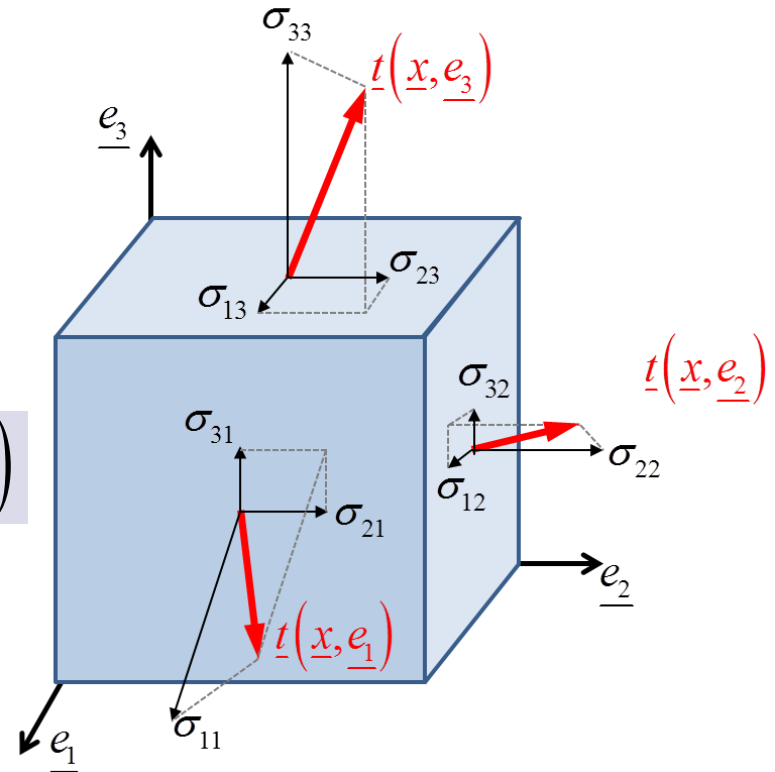
- Hypothèses
- Les déformations
- **Les contraintes**
- Loi de comportement
- Les équations fondamentales

Tenseur des contraintes de Cauchy

$\sigma_{ii} \rightarrow$ traction/compression selon $\underline{e}_i$

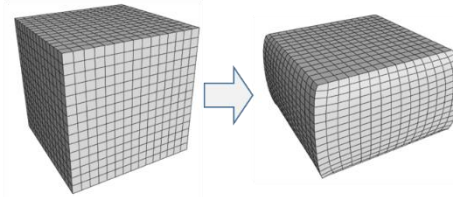
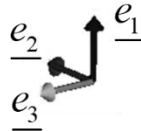
$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$\sigma_{i \neq j} \rightarrow$ Cisaillement dans le plan $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$

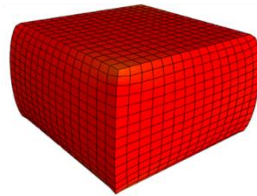


Tenseur des contraintes de Cauchy

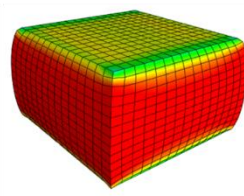
1. Compression selon $\underline{e}_1$



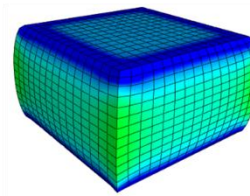
Contrainte (MPa)



$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

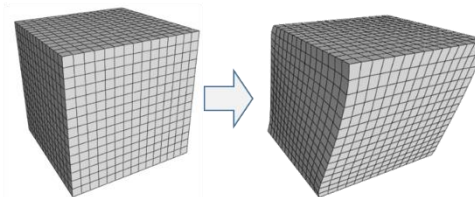
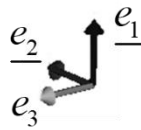


$$\sigma_{22} = \sigma_{33} \approx 0$$

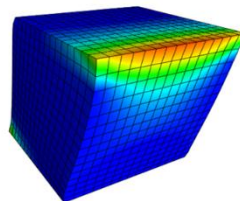


$$\sigma_{11} < 0$$

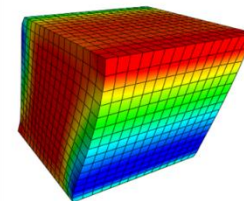
2. Cisaillement dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$



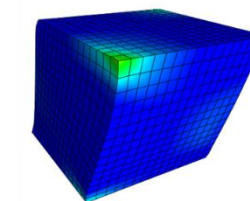
Contrainte (MPa)



$$\sigma_{33} \approx 0$$



$$\sigma_{12} > 0$$



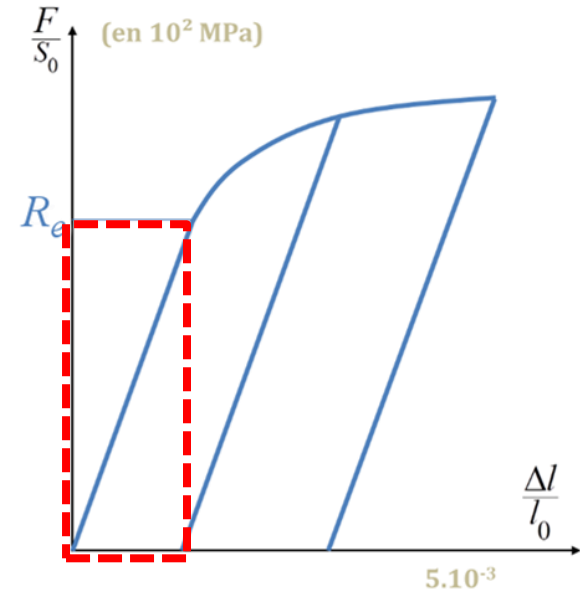
$$\sigma_{13} \approx \sigma_{23} \approx 0$$

2 : Rappels de mécanique des milieux continus en HPP

- Hypothèses
- Les déformations
- Les contraintes
- **Loi de comportement**
- Les équations fondamentales

Loi de comportement élastique linéaire = loi de Hooke

- ✓ En **élasticité** : loi contrainte-déformation **linéaire**
- ✓ Peu sensible à la **température**
- ✓ Peu sensible à la **vitesse de déformation**
- ✓ **Déformations** réversibles



→ On considère que les **quantités mécaniques** en jeu sont des fonctions univoques de la **déformation**

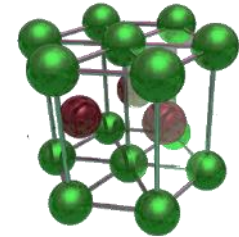
→ On montre qu'on a la relation :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

- *Sans contraintes initiales*
- *Sans variation de température*

Loi de comportement élastique linéaire

- Déformations élastiques = modification **réversible** de l'espace interatomique



$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$\underline{\underline{\sigma}}$: tenseur des contraintes de Cauchy

$\underline{\underline{\varepsilon}}$: tenseur des déformations HPP

$\underline{\underline{A}}$: tenseur des modules d'élasticité

→ **81** composantes en général ! **Symétries** : **21** coefficients indépendants

- Notation de Voigt : représentation des **composantes** des tenseurs

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & A_{1123} & A_{1113} & A_{1112} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & A_{2223} & A_{2213} & A_{2212} \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & A_{3323} & A_{3313} & A_{3312} \\ A_{2311} & A_{2322} & A_{2333} & A_{2323} & A_{2313} & A_{2312} \\ A_{1311} & A_{1322} & A_{1333} & A_{1323} & A_{1313} & A_{1312} \\ A_{1211} & A_{1222} & A_{1233} & A_{1223} & A_{1213} & A_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Loi de comportement élastique linéaire isotrope

- La loi de comportement se réduit à **2** paramètres indépendants

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad : \text{loi de Hooke}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad : \text{loi de Hooke inverse}$$

λ, μ : coefficients de **Lamé**

E, ν : **Module de Young** et **coefficient de Poisson**

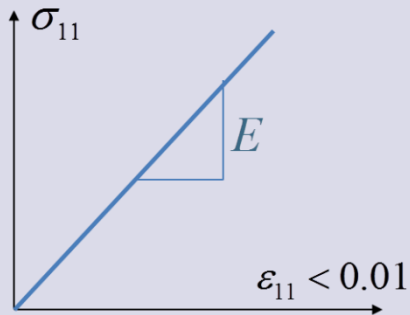
- Paramètres liés par les lois :
$$\begin{cases} E = \mu \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

- Module de Young** : pente de la droite contrainte-déformation
- Coefficient de Poisson** : coefficient de compaction radiale

Loi de comportement élastique linéaire isotrope

Module de Young :
pente de la courbe

$$\sigma_{11} = f(\varepsilon_{11})$$



$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu\sigma_{11}}{E} = -\nu\varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu\sigma_{11}}{E} = -\nu\varepsilon_{11} \end{pmatrix}$$

Coefficient de Poisson:
compaction transverse

$$\begin{aligned} a &= (1 - \nu\varepsilon_{11}) a_0 \\ b &= (1 - \nu\varepsilon_{11}) b_0 \\ l &= (1 + \varepsilon_{11}) l_0 \end{aligned}$$

The diagram illustrates a rectangular prism with initial dimensions a_0 , b_0 , and l_0 . Under stress, the transverse dimensions a and b contract, while the longitudinal dimension l extends. Red arrows indicate the direction of deformation.

2 : Rappels de mécanique des milieux continus en HPP

- Hypothèses
- Les déformations
- Les contraintes
- Loi de comportement
- **Les équations fondamentales**

Propriétés du tenseur des contraintes

$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ est **symétrique** : $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$

Equation d'équilibre : $\rho \underline{a} = \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f}^m$

Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}(\underline{v}) = \mathcal{P}_e(\underline{v}) + \mathcal{P}_i(\underline{v}) = \text{énergie cinétique}$$

- Puissance des efforts extérieurs : $\mathcal{P}_e = \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \underline{t} \cdot \underline{v} da}_{\text{surface}} + \underbrace{\int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m \cdot \underline{v} d\Omega_t}_{\text{volume}}$
- Puissance des efforts intérieurs : $\mathcal{P}_i(\underline{v}) = - \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} d\Omega_t$

Cas **statique** en **HPP** : $\mathcal{P}_e(\underline{v}) = -\mathcal{P}_i(\underline{v}) \Rightarrow \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \underline{t} \cdot \underline{v} da}_{\text{surface}} + \underbrace{\int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m \cdot \underline{v} d\Omega_t}_{\text{volume}} = \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} d\Omega_t$

$$\mathcal{P}_e(\underline{v}) = -\mathcal{P}_i(\underline{v}) \Rightarrow \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \underline{t} \cdot \underline{v} da}_{\text{surface}} + \underbrace{\int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m \cdot \underline{v} d\Omega_t}_{\text{volume}} = \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega_t$$

- Intégration par rapport au temps $\rightarrow$ travaux des efforts

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \underline{t} \cdot \underline{u} da + \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m \cdot \underline{u} d\Omega_t}_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) d\Omega_t = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) d\Omega_t \Rightarrow \mathcal{W}_{\text{int}} = \mathcal{W}_{\text{ext}}$$

Ecriture de l'équilibre dans la MEF

$$\mathcal{W}_{\text{int}} = \mathcal{W}_{\text{ext}}$$

Travail des efforts intérieurs = travail des efforts extérieurs

$$\mathcal{W}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \right) d\Omega_t \quad \mathcal{W}_{\text{ext}} = \int_{\partial\Omega_t} \underline{t} \cdot \underline{u} da + \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m \cdot \underline{u} d\Omega_t$$

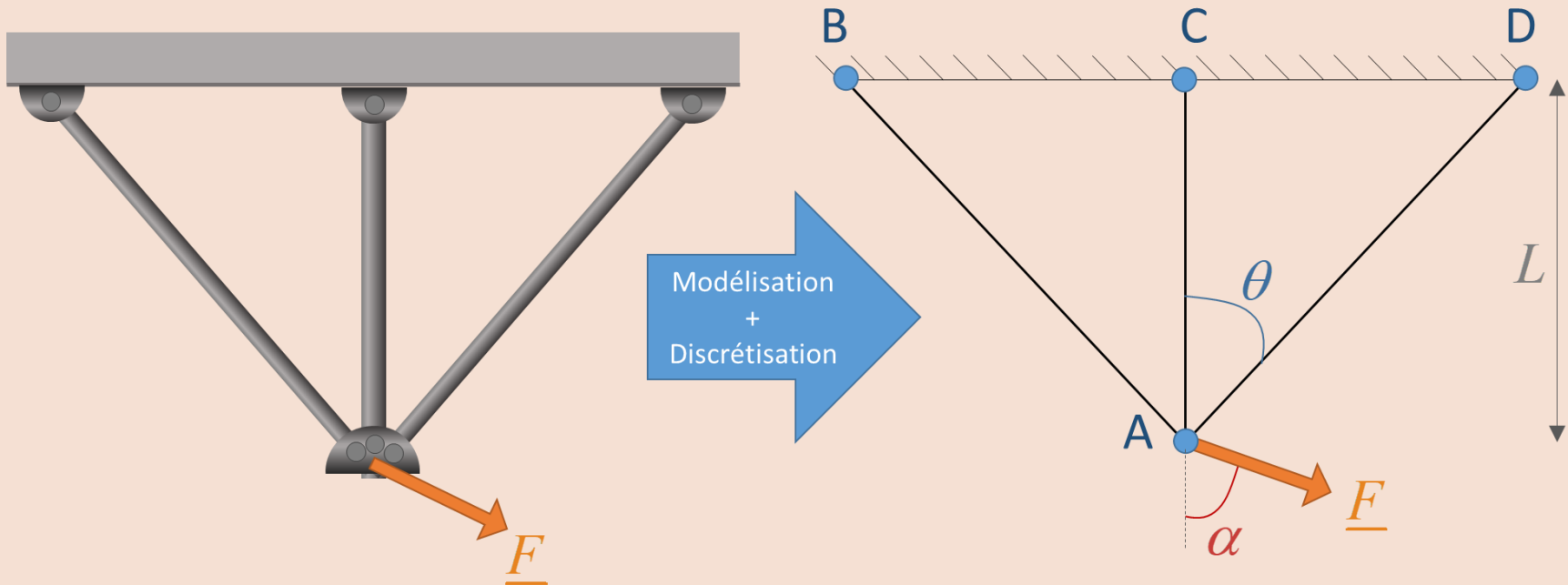
$\rightarrow$ Champ de déplacement $\underline{u}$ solution = **solution exacte** !

3 : Exemple de résolution directe pour un treillis

- **Discrétisation**
- Fonctions de forme
- Comportement de l'élément
- Passage au repère de la structure
- Assemblage des matrices élémentaires
- Conditions aux limites
- Résolution

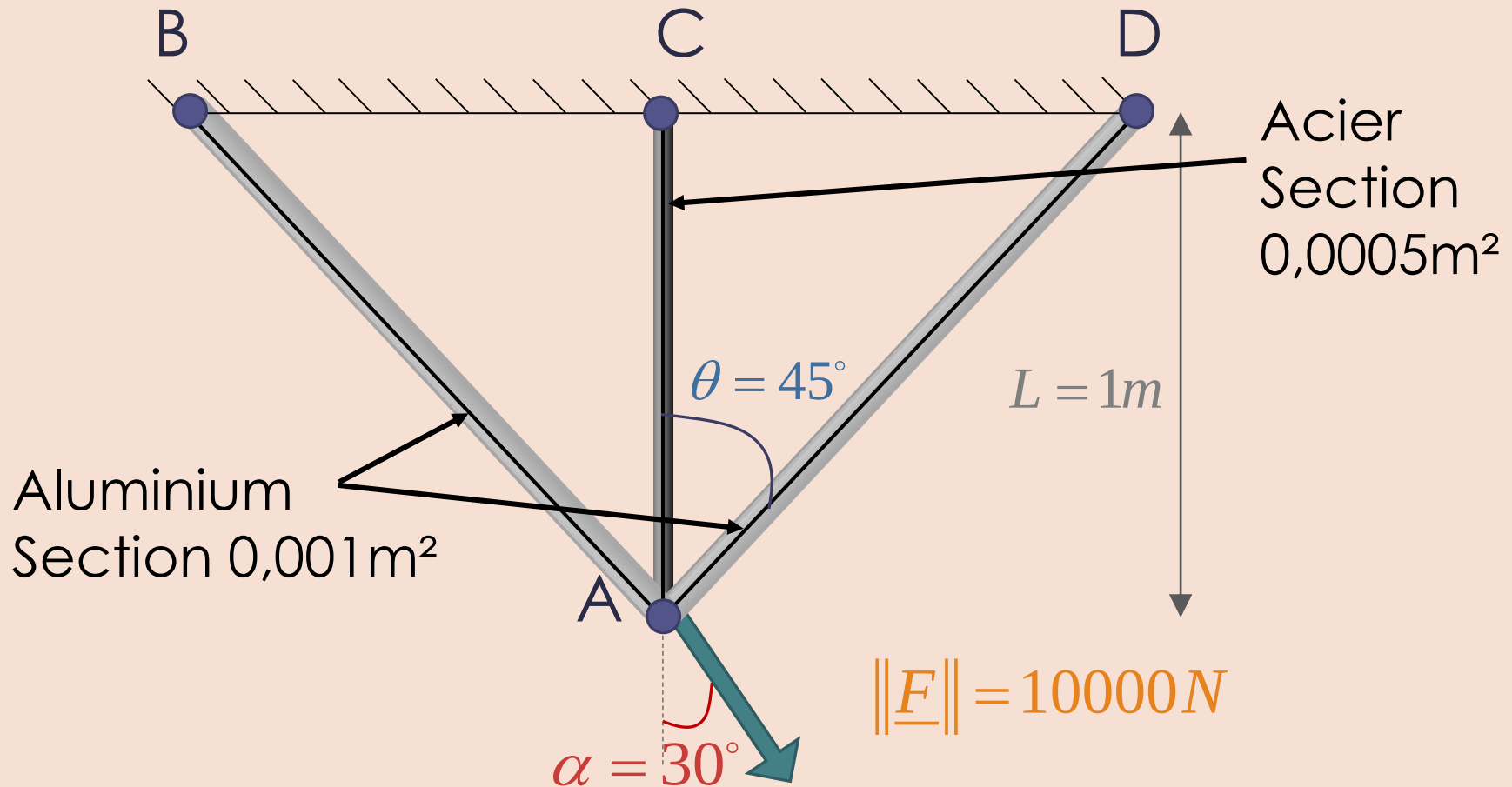
Exemple

- **Treillis plan** de 3 barres **articulées** entre elles
- On impose un **effort** connu, on cherche le **déplacement**



- **HYPOTHESE** : barres articulées $\rightarrow$ traction-compression uniquement
- **HYPOTHESE** : HPP + matériaux élastiques linéaires isotropes

Exemple



3 : Exemple de résolution directe pour un treillis

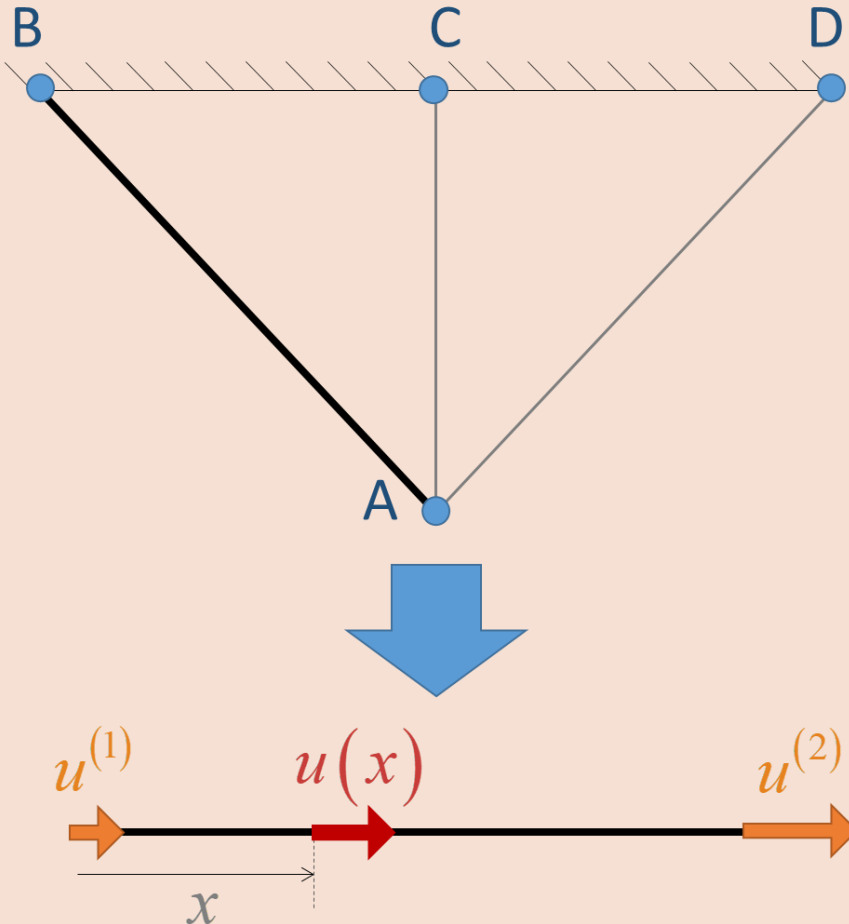
- Discrétisation
- **Fonctions de forme**
- Comportement de l'élément
- Passage au repère de la structure
- Assemblage des matrices élémentaires
- Conditions aux limites
- Résolution

Exemple

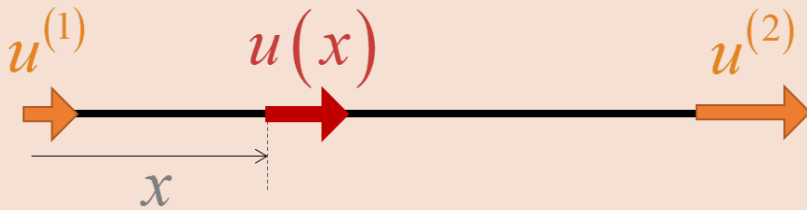
- **Hypothèse** : un seul degré de liberté par nœud
- **Hypothèse** : déplacement linéaire le long de la barre

$$\begin{cases} u(x) = \alpha + \beta x \\ u(0) = u^{(1)} \Rightarrow \alpha = u^{(1)} \\ u(l) = u^{(2)} \Rightarrow \beta = \frac{u^{(2)} - u^{(1)}}{l} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x) = u^{(1)} + \frac{u^{(2)} - u^{(1)}}{l} x}$$

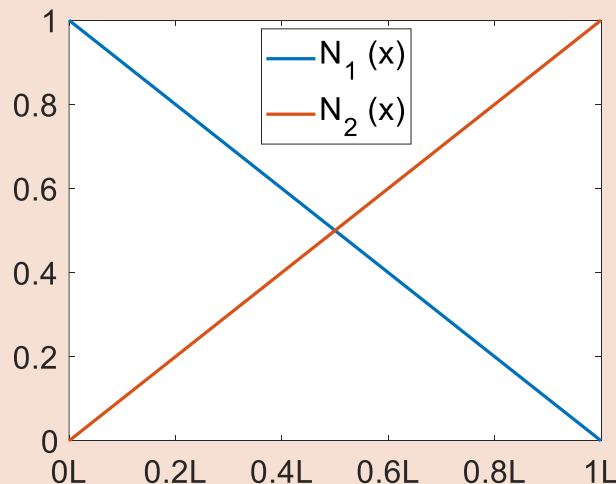


Exemple



$$u(x) = u^{(1)} + \frac{u^{(2)} - u^{(1)}}{l} x$$

- Ecriture alternative : $u(x) = u^{(1)} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + u^{(2)} \left(\frac{x}{l}\right)$
- Ou encore : $u(x) = \begin{pmatrix} N_1(x) = 1 - \frac{x}{l} & N_2(x) = \frac{x}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$

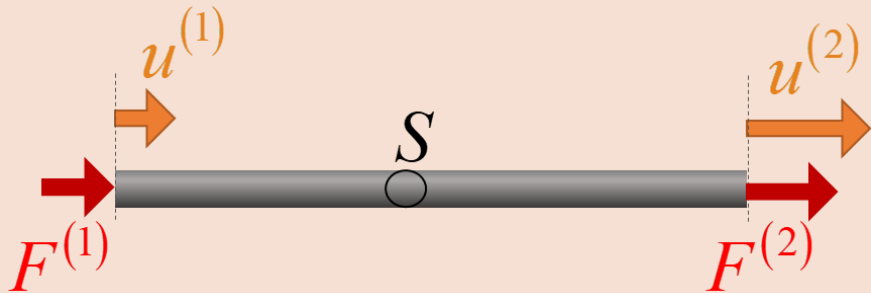


$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u^{(i)}$$

3 : Exemple de résolution directe pour un treillis

- Discrétisation
- Fonctions de forme
- **Comportement de l'élément**
- Passage au repère de la structure
- Assemblage des matrices élémentaires
- Conditions aux limites
- Résolution

Exemple



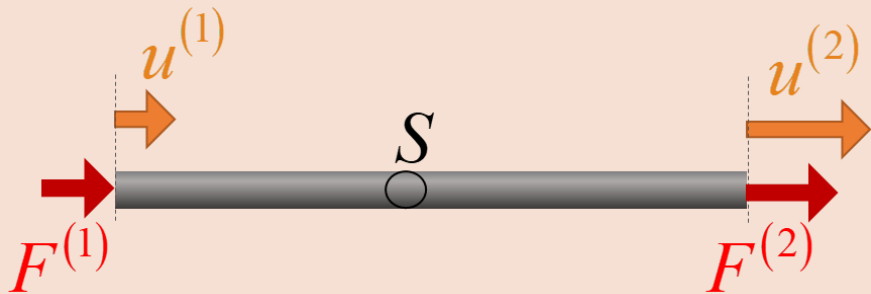
- A l'équilibre évidemment

$$F^{(1)} + F^{(2)} = 0$$

- Lien entre efforts et déplacements ??
→ Facile dans ce cas simple !
- Loi de Hooke en 1D :

$$\sigma = \frac{F}{S} = -\frac{F^{(1)}}{S} = \frac{F^{(2)}}{S} \quad \sigma = E \varepsilon \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{du(x)}{dx} + \frac{du(x)}{dx} \right) = \frac{du(x)}{dx}$$

Exemple



$$-\frac{F^{(1)}}{S} = \frac{F^{(2)}}{S} = E \times \frac{du(x)}{dx}$$

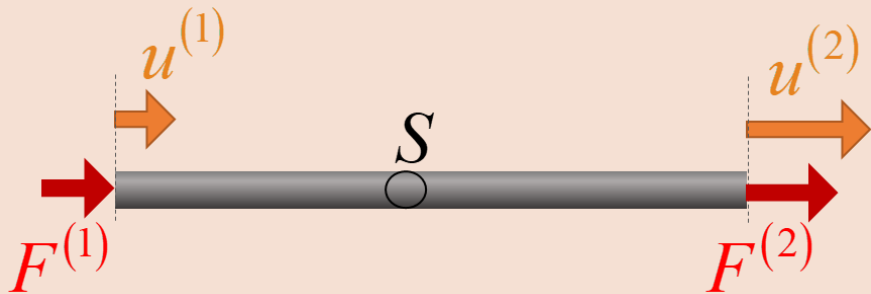
- Fonctions de formes : $u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u^{(i)}$

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{dN_1(x)}{dx} u^{(1)} + \frac{dN_2(x)}{dx} u^{(2)}$$

- En utilisant les formes précédentes :

$$\begin{cases} N_1(x) = 1 - x/L \\ N_2(x) = x/L \end{cases} \Rightarrow \varepsilon = \frac{du(x)}{dx} = -\frac{1}{L} u^{(1)} + \frac{1}{L} u^{(2)} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$$

Exemple



$$\varepsilon = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$$

- En reprenant la loi de Hooke :

$$\sigma = \frac{F^{(2)}}{S} = E\varepsilon \Rightarrow F^{(2)} = ES\varepsilon = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$$

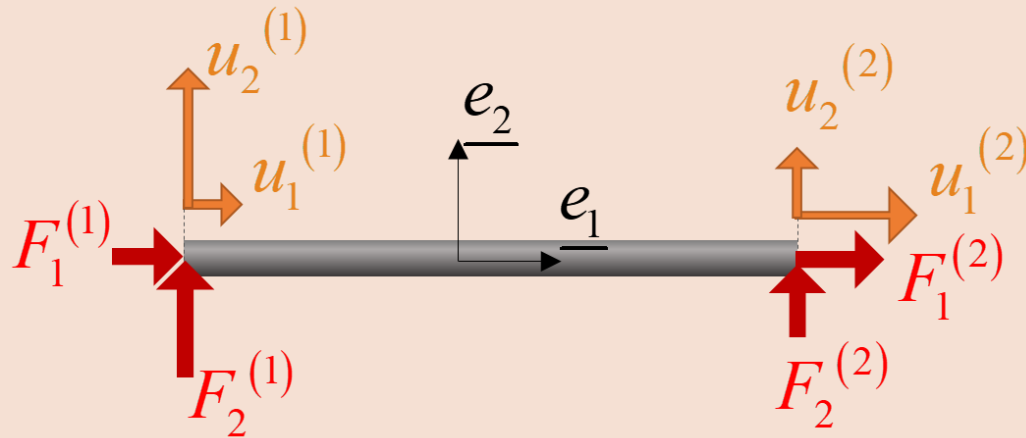
$$\sigma = -\frac{F^{(1)}}{S} = E\varepsilon \Rightarrow F^{(1)} = -ES\varepsilon = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$$

- Ou encore :

$$\begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e$$

Exemple



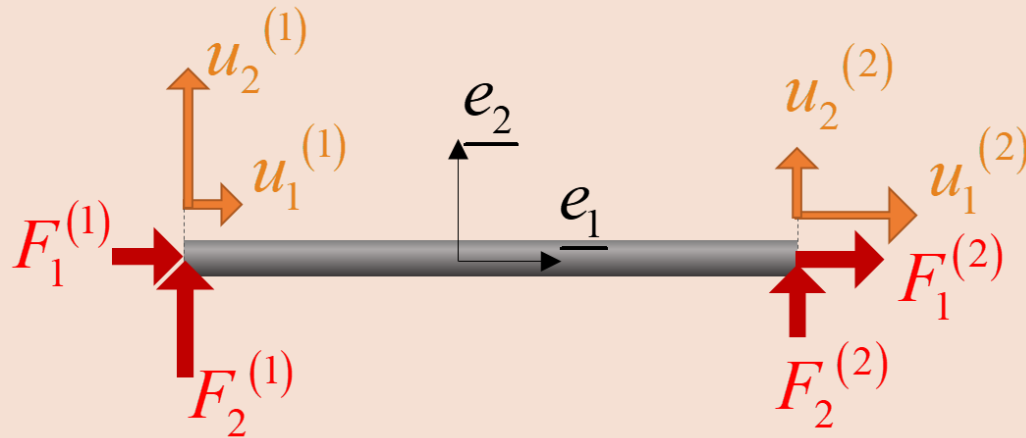
- Même démarche avec 2 degrés de libertés supplémentaires:

$$\underline{u}(x) = u_1(x)\underline{e}_1 + u_2(x)\underline{e}_2$$

- En faisant le même raisonnement on arrive à :

$$u_j(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_j^{(i)}$$

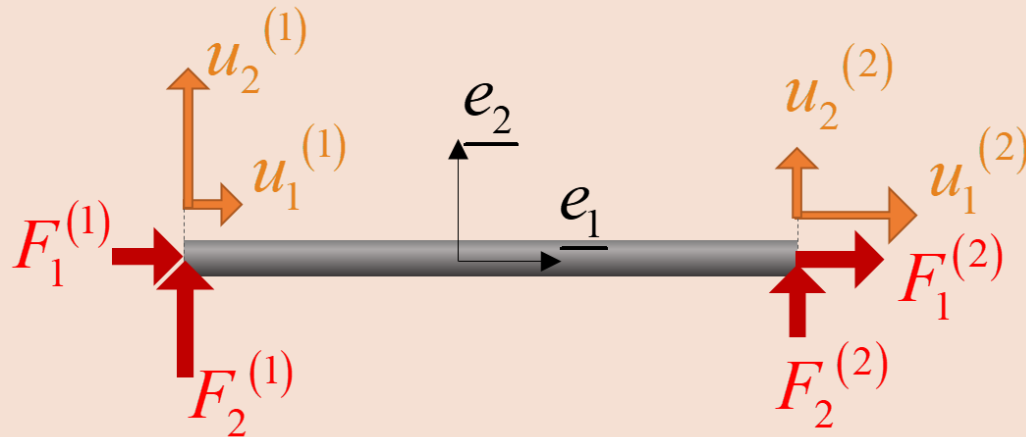
Exemple



- Ecrit autrement :
$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1(x) & 0 & N_2(x) & 0 \\ 0 & N_1(x) & 0 & N_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

- Ou encore : $\mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e$ avec $\mathbf{q}_e^T = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} \end{pmatrix}$

Exemple



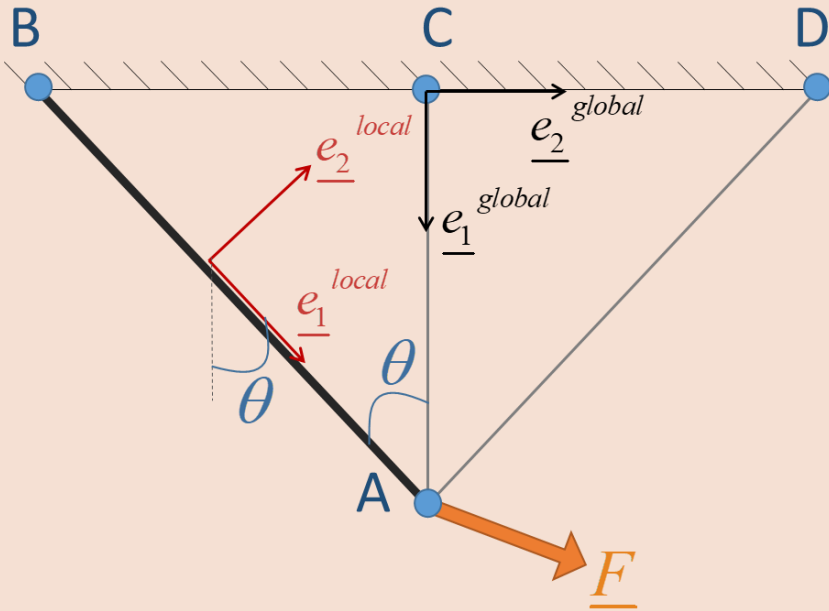
- Un déplacement dans la direction $\underline{e}_2$ n'entraîne pas d'efforts
- On peut étendre ce qui précède :

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \quad \text{avec la matrice de rigidité : } \mathbf{K}_e = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 : Exemple de résolution directe pour un treillis

- Discrétisation
- Fonctions de forme
- Comportement de l'élément
- **Passage au repère de la structure**
- Assemblage des matrices élémentaires
- Conditions aux limites
- Résolution

Exemple



- On change maintenant de repère
→ repère de la structure

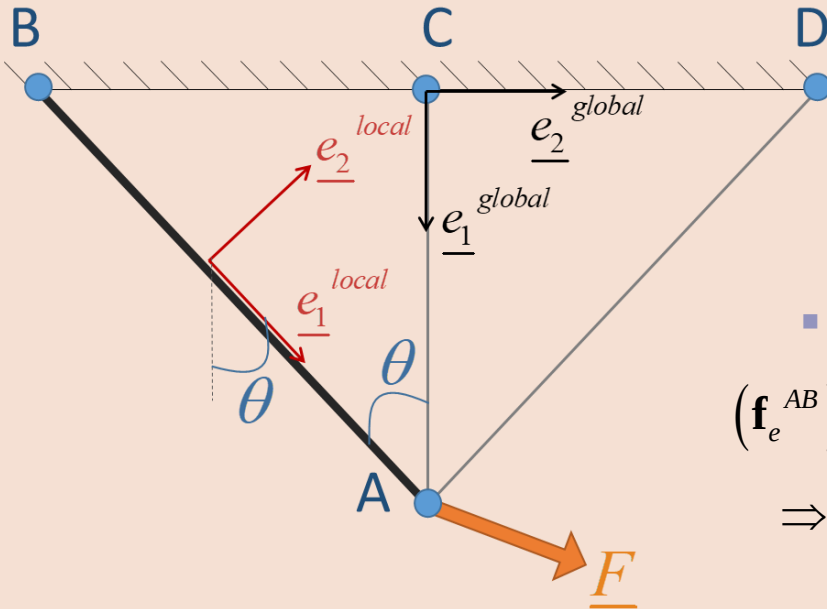
- Notation :
$$\begin{cases} \mathbf{f}_e \\ \mathbf{q}_e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{f}_e^{local} \\ \mathbf{q}_e^{local} \end{cases}$$

$$(\mathbf{q}_e^{local})^T = (u_1^A \quad u_2^A \quad u_1^B \quad u_2^B)$$

- Comment les exprimer dans la base globale ?

$$\begin{cases} (u_1^A)^{global} = u_1^A c - u_2^A s \\ (u_2^A)^{global} = u_1^A s + u_2^A c \\ (u_1^B)^{global} = u_1^B c - u_2^B s \\ (u_2^B)^{global} = u_1^B s + u_2^B c \end{cases} \Rightarrow (\mathbf{q}_e^{AB})^{global} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_e^{AB}} \cdot (\mathbf{q}_e^{AB})^{local}$$

Exemple



- Idem pour les efforts :

$$\left(\mathbf{f}_e^{AB}\right)^{global} = \mathbf{T}_e^{AB} \left(\mathbf{f}_e^{AB}\right)^{local}$$

- Au final le système s'écrit :

$$\left(\mathbf{f}_e^{AB}\right)^{local} = \left(\mathbf{K}_e^{AB}\right)^{local} \left(\mathbf{q}_e^{AB}\right)^{local}$$

$$\Rightarrow \left(\mathbf{f}_e^{AB}\right)^{global} = \underbrace{\mathbf{T}_e^{AB} \left(\mathbf{K}_e^{AB}\right)^{local} \left(\mathbf{T}_e^{AB}\right)^{-1}}_{\left(\mathbf{K}_e^{AB}\right)^{global}} \left(\mathbf{q}_e^{AB}\right)^{global}$$

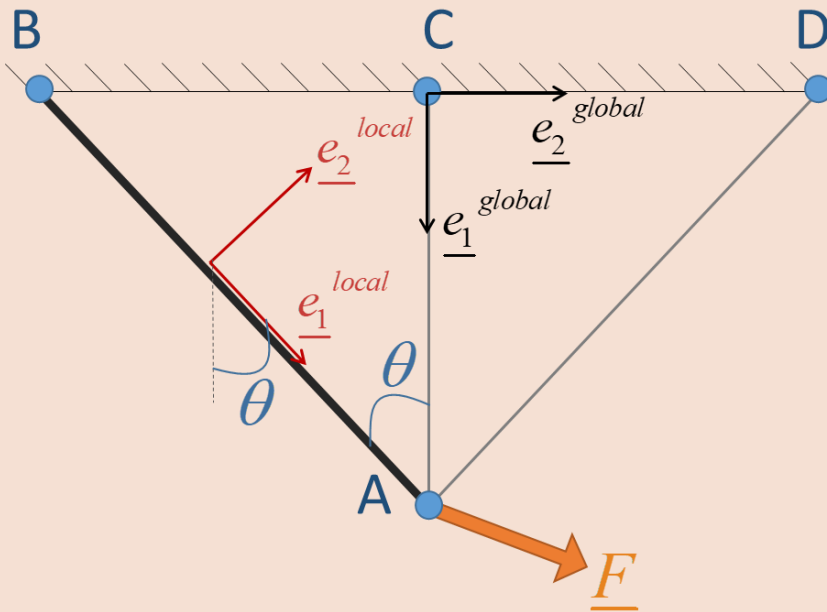
$$\Rightarrow \mathbf{K}_e^{global} = \mathbf{T}_e \mathbf{K}_e^{local} \mathbf{T}_e^{-1}$$

- Au final dans le repère **global** :

$$\left(\mathbf{f}_e^{AB}\right)^{global} = \left(\mathbf{K}_e^{AB}\right)^{global} \left(\mathbf{q}_e^{AB}\right)^{global}$$

$$\left(\mathbf{K}_e^{AB}\right)^{global} = \frac{E^{AB} S^{AB}}{L / c} \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix}$$

Exemple



$$(\mathbf{K}_e^{AB})^{global} = \frac{E^{AB} S^{AB}}{L/c} \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_e^{AC})^{global} = \frac{E^{AC} S^{AC}}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_e^{AD})^{global} = \frac{E^{AD} S^{AD}}{L/c} \begin{pmatrix} c^2 & -cs & -c^2 & cs \\ -cs & s^2 & cs & -s^2 \\ -c^2 & cs & c^2 & -cs \\ cs & -s^2 & -cs & s^2 \end{pmatrix}$$

3 : Exemple de résolution directe pour un treillis

- Discrétisation
- Fonctions de forme
- Comportement de l'élément
- Passage au repère de la structure
- **Assemblage des matrices élémentaires**
- Conditions aux limites
- Résolution

Exemple

- On considère tous les degrés de libertés de la **structure** (indice s) et non plus de **l'élément** (indice e)

$$\mathbf{q}_s^T = (u_1^A \quad u_2^A \quad u_1^B \quad u_2^B \quad u_1^C \quad u_2^C \quad u_1^D \quad u_2^D)$$

$$\mathbf{f}_s^T = (F_1^A \quad F_2^A \quad F_1^B \quad F_2^B \quad F_1^C \quad F_2^C \quad F_1^D \quad F_2^D)$$

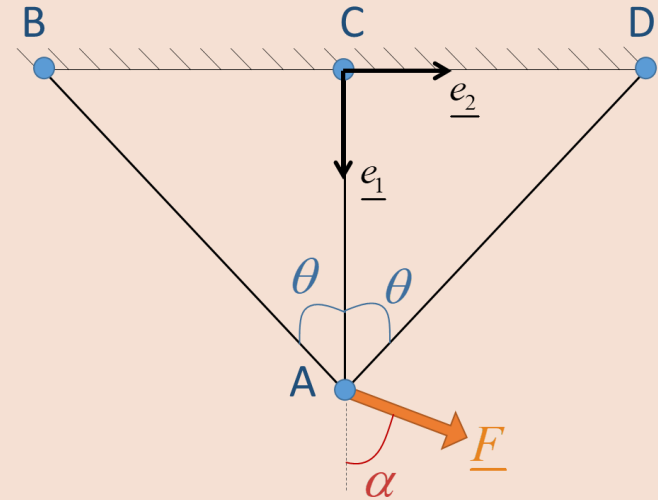
- Il existe une suite de relations entre les efforts et les déplacements

$$\mathbf{K}_e^{AB} = \frac{E^{AB} S^{AB}}{L/c} \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_1^A = \frac{E^{AB} S^{AB}}{L/c} (c^2 u_1^A + cs u_2^A - c^2 u_1^B - cs u_2^B) \\ F_2^A = \frac{E^{AB} S^{AB}}{L/c} (cs u_1^A + s^2 u_2^A - cs u_1^B - s^2 u_2^B) \\ \dots \end{cases}$$

- On peut combiner toutes ces relations dans **une seule matrice** !

Exemple

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s$$



$$\begin{pmatrix} F_1^A \\ F_2^A \\ F_1^B \\ F_2^B \\ F_1^C \\ F_2^C \\ F_1^D \\ F_2^D \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} K_{11}^{AB} + K_{11}^{AC} + K_{11}^{AD} & K_{12}^{AB} + K_{12}^{AC} + K_{12}^{AD} & K_{13}^{AB} & K_{14}^{AB} & K_{13}^{AC} & K_{14}^{AC} & K_{13}^{AD} & K_{14}^{AD} \\ K_{21}^{AB} + K_{21}^{AC} + K_{21}^{AD} & K_{22}^{AB} + K_{22}^{AC} + K_{22}^{AD} & K_{23}^{AB} & K_{24}^{AB} & K_{23}^{AC} & K_{24}^{AC} & K_{23}^{AD} & K_{24}^{AD} \\ & K_{31}^{AB} & K_{32}^{AB} & K_{33}^{AB} & K_{34}^{AB} & 0 & 0 & 0 \\ & K_{41}^{AB} & K_{42}^{AB} & K_{43}^{AB} & K_{44}^{AB} & 0 & 0 & 0 \\ & K_{31}^{AC} & K_{32}^{AC} & 0 & 0 & K_{33}^{AC} & K_{34}^{AC} & 0 \\ & K_{41}^{AC} & K_{42}^{AC} & 0 & 0 & K_{43}^{AC} & K_{44}^{AC} & 0 \\ & K_{31}^{AD} & K_{32}^{AD} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{33}^{AD} & K_{34}^{AD} \\ & K_{41}^{AD} & K_{42}^{AD} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{43}^{AD} & K_{44}^{AD} \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}_s} \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_1^B \\ u_2^B \\ u_1^C \\ u_2^C \\ u_1^D \\ u_2^D \end{pmatrix}$$

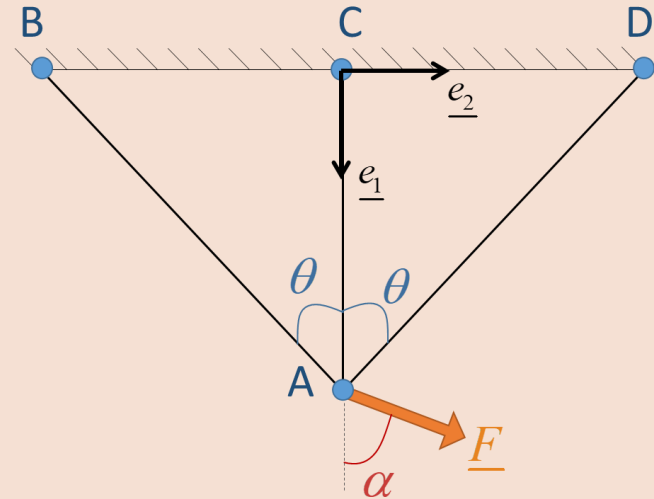
$\mathbf{f}_s$ $\mathbf{q}_s$

3 : Exemple de résolution directe pour un treillis

- Discrétisation
- Fonctions de forme
- Comportement de l'élément
- Passage au repère de la structure
- Assemblage des matrices élémentaires
- **Conditions aux limites**
- Résolution

Exemple

- Jusqu'ici : pas de prise en compte des **conditions aux limites**
- Dans cet exemple : degrés de libertés **nuls** en B, C, D et effort **connu** en A !
- Si on ne s'intéresse qu'au point A par exemple :



$$\begin{pmatrix} F_1^A = F \cos \alpha \\ F_2^A = F \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}^{AB} + K_{11}^{AC} + K_{11}^{AD} & K_{12}^{AB} + \cancel{K_{12}^{AC}} + K_{12}^{AD} \\ K_{21}^{AB} + \cancel{K_{21}^{AC}} + K_{21}^{AD} & K_{22}^{AB} + \cancel{K_{22}^{AC}} + K_{22}^{AD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} F \cos \alpha \\ F \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} E^{AB} S^{AB} c^3 + E^{AC} S^{AC} + E^{AD} S^{AD} c^3 & E^{AB} S^{AB} c^2 s - E^{AD} S^{AD} c^2 s \\ E^{AB} S^{AB} c^2 s - E^{AD} S^{AD} c^2 s & E^{AB} S^{AB} c s^2 + E^{AD} S^{AD} c s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} F \cos \alpha \\ F \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} E^{AB} S^{AB} c^3 + E^{AC} S^{AC} + E^{AD} S^{AD} c^3 & E^{AB} S^{AB} c^2 s - E^{AD} S^{AD} c^2 s \\ E^{AB} S^{AB} c^2 s - E^{AD} S^{AD} c^2 s & E^{AB} S^{AB} c s^2 + E^{AD} S^{AD} c s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} F \cos \alpha \\ F \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} E^{AC} S^{AC} + (E^{AD} S^{AD} + E^{AB} S^{AB}) c^3 & (E^{AB} S^{AB} - E^{AD} S^{AD}) c^2 s \\ (E^{AB} S^{AB} - E^{AD} S^{AD}) c^2 s & (E^{AB} S^{AB} + E^{AD} S^{AD}) c s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix}$$

imposé

inconnu

2 équations, 2 inconnues → on peut résoudre !

→ On détermine les déplacements inconnus en A

- Aux points B, C et D : $u_1^B = u_2^B = u_1^C = u_2^C = u_1^D = u_2^D = 0$
- Efforts inconnus en ces points : **6 équations, 6 inconnues : OK !**

→ On détermine les efforts inconnus en B,C,D

3 : Exemple de résolution directe pour un treillis

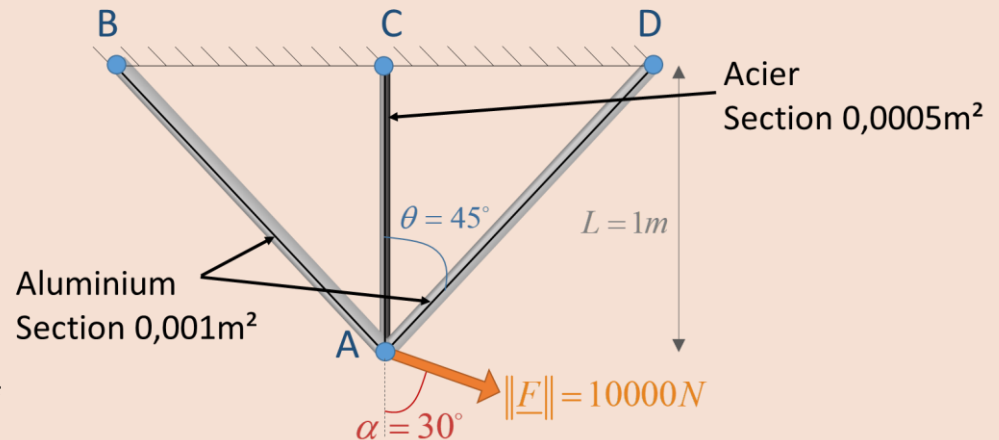
- Discrétisation
- Fonctions de forme
- Comportement de l'élément
- Passage au repère de la structure
- Assemblage des matrices élémentaires
- Conditions aux limites
- **Résolution**

Exemple

$$\begin{pmatrix} F \cos \alpha \\ F \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} E^{AC} S^{AC} + (E^{AD} S^{AD} + E^{AB} S^{AB}) c^3 & (E^{AB} S^{AB} - E^{AD} S^{AD}) c^2 s \\ (E^{AB} S^{AB} - E^{AD} S^{AD}) c^2 s & (E^{AB} S^{AB} + E^{AD} S^{AD}) c s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{q}_s = \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{f}_s$$

→ Méthode directe



```
theta=pi/4;c=cos(theta);s=sin(theta);
```

```
alpha=pi/6;
```

```
E_AC=210e9;%acier E=210GPa= 210e9N/m²
```

```
E_AB=70e9;%alu E=70GPa=70e9N/m²
```

```
E_AD=E_AB;%alu
```

```
S_AC=0.0005;%en m²
```

```
S_AB=0.001;%en m²
```

```
S_AD=S_AB;
```

```
F=10000;% en N
```

```
L=1;%en m
```

```
F_s=[F*cos(alpha);F*sin(alpha)];
```

```
K_s=(1/L)*[E_AC*S_AC+(E_AD*S_AD+E_AB*S_AB)*c³ (E_AB*S_AB-E_AD*S_AD)*c*c*s;...
```

```
(E_AB*S_AB-E_AD*S_AD)*c*c*s (E_AD*S_AD+E_AB*S_AB)*c*s*s];
```

```
u=inv(K_s)*(F_s);
```

$$\begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.056054 \times 10^{-3} \text{ m} = 56.054 \mu\text{m} \\ 0.101015 \times 10^{-3} \text{ m} = 101.015 \mu\text{m} \end{pmatrix}$$

4 : Extension au cas général (en HPP)

- **L'énergie potentielle totale**
- Discrétisation et maillage
- Les différents éléments
- Interpolation et fonctions de forme
- Matrices élémentaires
- Passage au repère de la structure
- Assemblage des matrices élémentaires
- Résolution pour des cas linéaires
- Éléments isoparamétriques
- Méthode d'intégration de Gauss
- Analyse vibratoire

- **Exemple du treillis** : éléments au comportement 1D $\sigma = E\varepsilon$

Problématique : comment formuler les matrices de rigidité pour un élément plus complexe ?

- Rappel : en **statique HPP**

$$\mathcal{P}_e(\underline{v}) = -\mathcal{P}_i(\underline{v}) \Rightarrow \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \underline{t} \cdot \underline{v} da}_{\text{surface}} + \underbrace{\int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m \cdot \underline{v} d\Omega_t}_{\text{volume}} = \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} d\Omega_t$$

- Intégration par rapport au temps $\rightarrow$ travaux des efforts

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \underline{t} \cdot \underline{u} da + \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m \cdot \underline{u} d\Omega_t}_{\mathcal{W}_{\text{ext}}} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) d\Omega_t = \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\Omega_t} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) d\Omega_t}_{\mathcal{W}_{\text{int}}} \Rightarrow \mathcal{W}_{\text{int}} = \mathcal{W}_{\text{ext}}$$

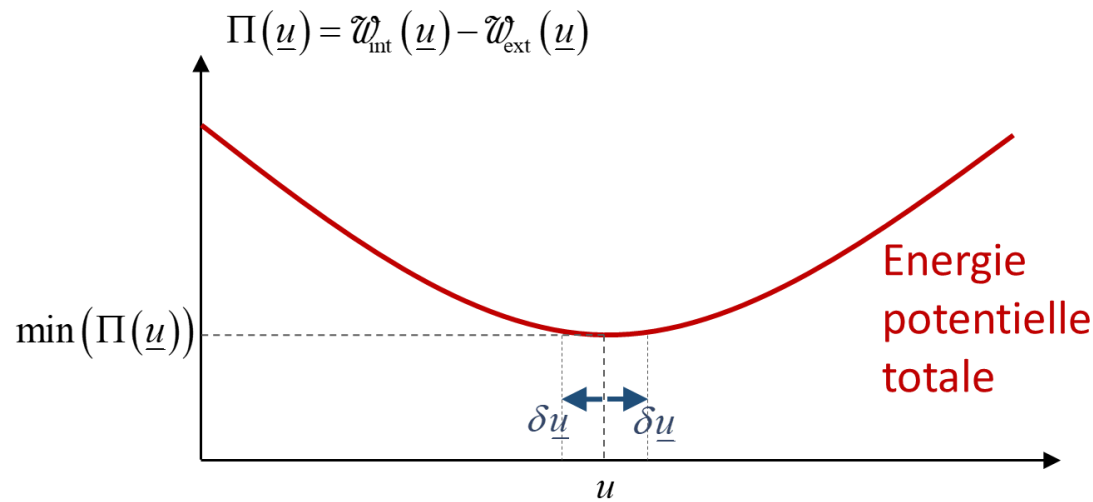
$\rightarrow$ Champ de déplacement solution = **solution exacte** !

Energie potentielle totale

- On pose la définition : $\Pi(\underline{u}) = \mathcal{W}_{\text{int}}(\underline{u}) - \mathcal{W}_{\text{ext}}(\underline{u})$
- Calcul pour n'importe quel champ
→ équilibre = énergie potentielle totale **minimale**

- Equilibre = énergie potentielle **stationnaire**

$$\forall \delta \underline{u} \quad , \quad \delta \Pi(\delta \underline{u}) = 0$$



Energie potentielle totale

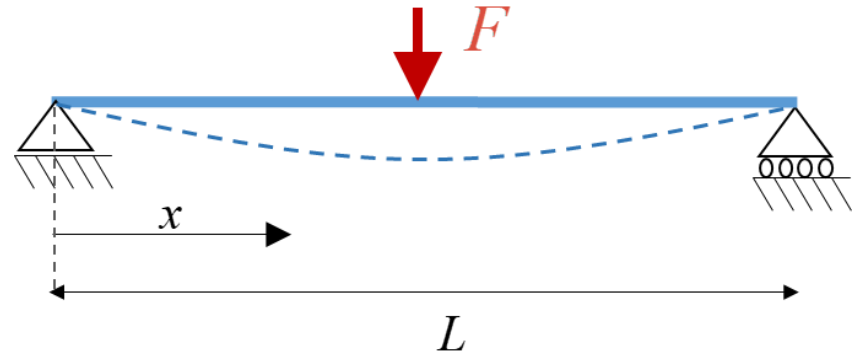
- Si on a le choix entre plusieurs déplacements :

→ le plus proche du champ réel assure $\delta \Pi(\delta \underline{u}) = 0$

- Exemple simple :

Déformée polynomiale ?

Déformée sinusoïdale ?

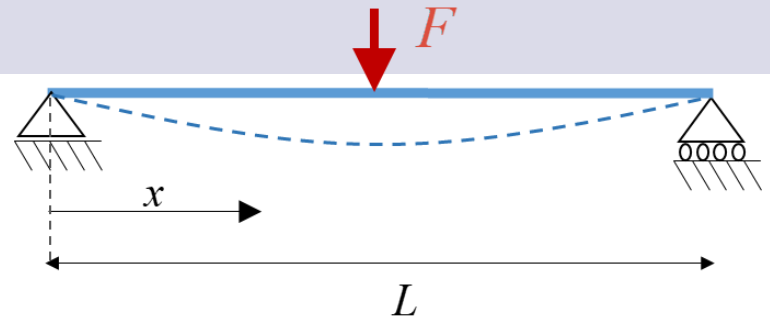


→ Solution analytique connue : $u_{\max} = \frac{FL^3}{48EI}$

$$u^{\text{polynomiale}}(x) = u_{\max} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$
$$u^{\text{sinusoïdale}}(x) = u_{\max} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$$

→ On se propose d'essayer :

Energie potentielle totale



- Théorie des poutres : $\varepsilon = -y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

→ Déformations pour les deux champs :

$$\varepsilon^{\text{polynomiale}}(x) = y \frac{2}{L^2} u_{\max} \quad \varepsilon^{\text{sinusoidale}}(x) = y \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) u_{\max}$$

- Calcul de **l'énergie potentielle totale** : (avec $\sigma = E\varepsilon$)

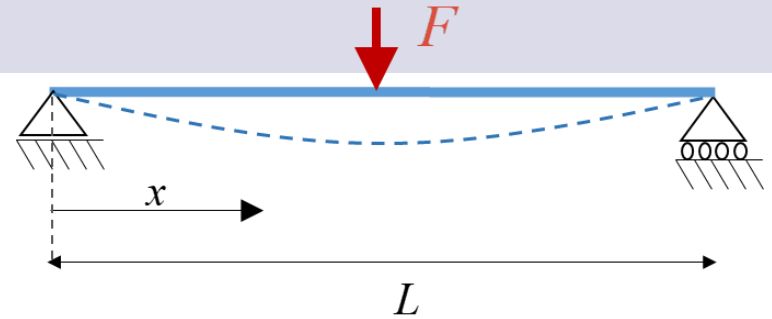
$$\Pi(u) = \mathcal{W}_{\text{int}}(u) - \mathcal{W}_{\text{ext}}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \sigma \varepsilon(x) d\Omega_t - Fu_{\max} = \frac{1}{2} \int_{dS} \int_{dx} E \varepsilon^2(x) dS dx - Fu_{\max}$$

$$\Pi^{\text{polynomiale}}(u) = \frac{2EI}{L^3} u_{\max}^2 - Fu_{\max}$$

- Pour les deux champs :

$$\Pi^{\text{sinusoidale}}(u) = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} u_{\max}^2 - Fu_{\max}$$

Energie potentielle totale



- Pour les deux champs :

$$\Pi^{polynomiale}(u) = \frac{2EI}{L^3} u_{\max}^2 - F u_{\max}$$

$$\Pi^{sinusoidale}(u) = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} u_{\max}^2 - F u_{\max}$$

- Équilibre = énergie potentielle totale **stationnaire**

$$\delta \Pi^{polynomiale} = 0 \Rightarrow \left(\frac{4EI}{L^3} u_{\max} - F \right) \delta u_{\max} = 0$$

$$\delta \Pi^{sinusoidale} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\pi^4 EI}{2L^3} u_{\max} - F \right) \delta u_{\max} = 0$$

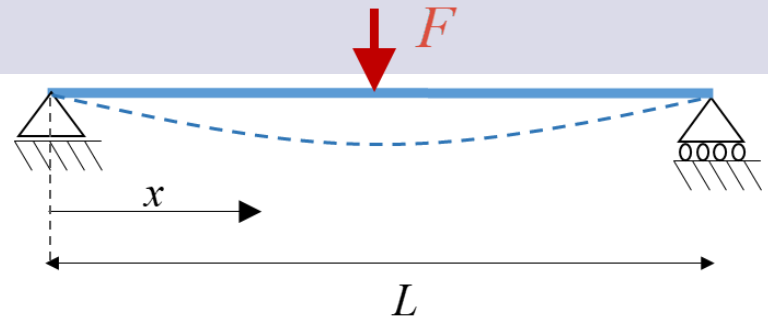
- Valide quelque soit la perturbation :

$$u_{\max}^{polynomiale} = \frac{FL^3}{4EI} \quad u_{\max}^{sinusoidale} = \frac{2FL^3}{\pi^4 EI}$$

Energie potentielle totale

$$u_{\max}^{\text{polynomiale}} = \frac{FL^3}{4EI}$$

$$u_{\max}^{\text{sinusoidale}} = \frac{2FL^3}{\pi^4 EI}$$



- Champ de déplacement le plus réaliste = minimise $\Pi(\underline{u}) = \mathcal{W}_{\text{int}}(\underline{u}) - \mathcal{W}_{\text{ext}}(\underline{u})$

$$\Pi^{\text{polynomiale}}(u) = -\frac{F^2 L^3}{8EI} > \Pi^{\text{sinusoidale}}(u) = -\frac{F^2 L^3}{\pi^4 EI}$$

- « Vraie » solution (théorie des poutres) : $u_{\max} = \frac{FL^3}{48EI}$

→ Erreurs :

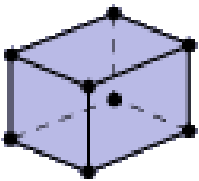
- Forme polynomiale : 1000 % !!!
- Forme sinusoidale : -1,4 %

4 : Extension au cas général (en HPP)

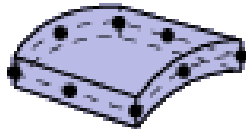
- L'énergie potentielle totale
- **Discretisation et maillage**
- Les différents éléments
- Interpolation et fonctions de forme
- Matrices élémentaires
- Passage au repère de la structure
- Assemblage des matrices élémentaires
- Résolution pour des cas linéaires
- Éléments isoparamétriques
- Méthode d'intégration de Gauss
- Analyse vibratoire

- Exemple du treillis plan : discrétisation évidente
- Cas général (1D, 2D, 3D) : choix de **sous-domaines** appelés **éléments**

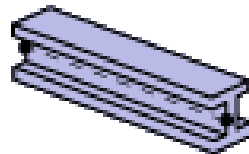
Solide continu



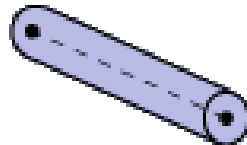
Coque



Poutre



Membrane



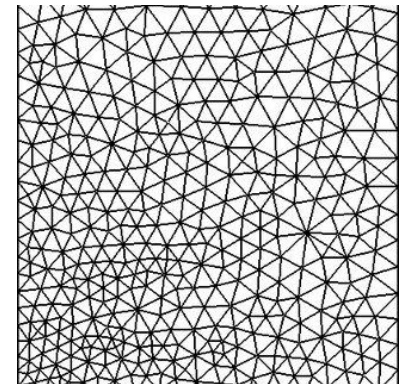
Barre



Rigide

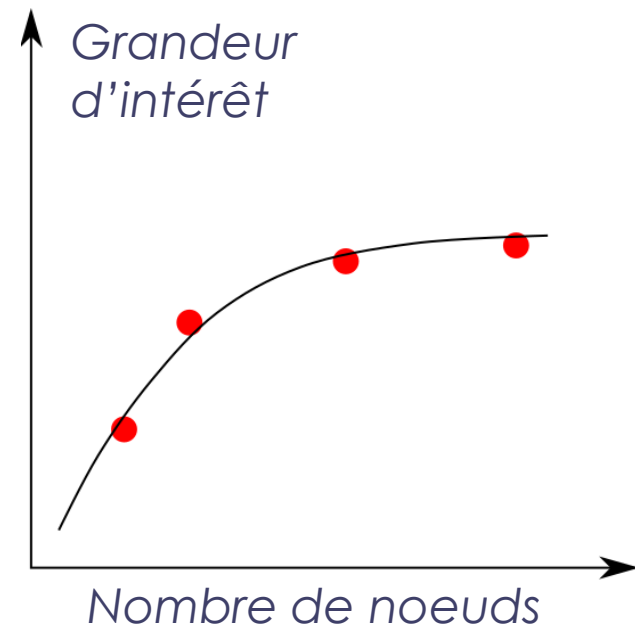
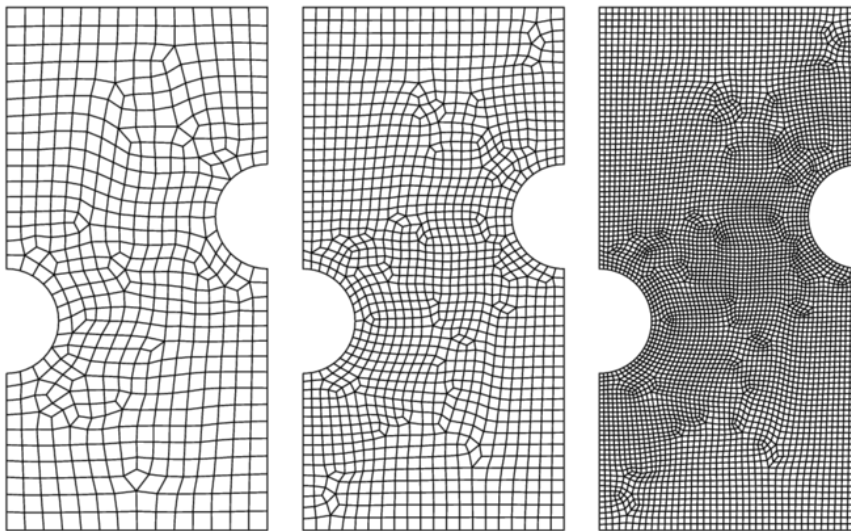
- ✓ Élément 1D : **barre** et **poutre**
- ✓ Élément 2D : **axisymétrique**, **membrane** et **coque**
- ✓ Élément 3D : **solide continu**

- Connexions entre les éléments = **noeuds**
- Ensemble des éléments et noeuds = **maillage**



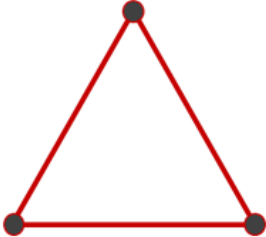
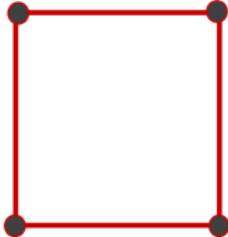
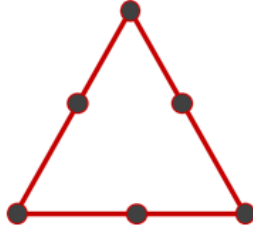
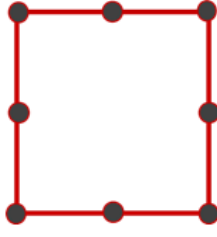
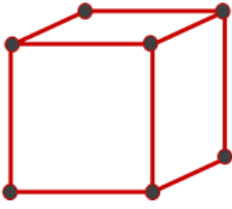
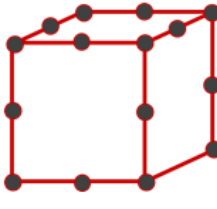
La qualité des résultats dépend fortement de la qualité du maillage

→ **étude de convergence au maillage** nécessaire avant conclusion !



4 : Extension au cas général (en HPP)

- L'énergie potentielle totale
- Discrétisation et maillage
- **Les différents éléments**
- Interpolation et fonctions de forme
- Matrices élémentaires
- Passage au repère de la structure
- Assemblage des matrices élémentaires
- Résolution pour des cas linéaires
- Éléments isoparamétriques
- Méthode d'intégration de Gauss
- Analyse vibratoire

	Degré 1 (linéaire)		Degré 2 (quadratique)	
1D				
2D				
	triangle	quadrangle	triangle	quadrangle
3D				
	tétraèdre	hexaèdre	tétraèdre	hexaèdre

Choix : nature du problème, complexité de la forme, ...

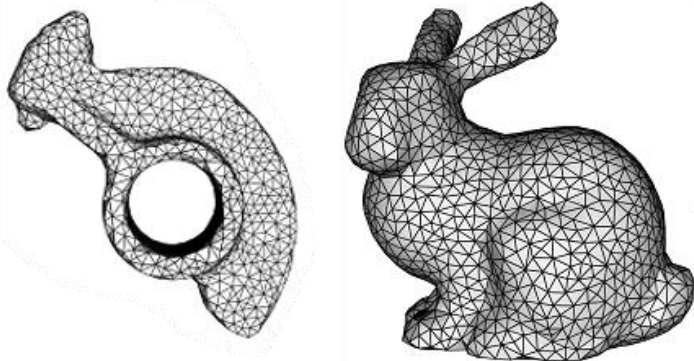
Triangles / tétraèdres



- géométries complexes
- peu sensibles à la distorsion de l'élément



- vitesse de convergence au raffinement du maillage
- éléments de degré 1 excessivement rigides
- blocages pour matériaux incompressibles



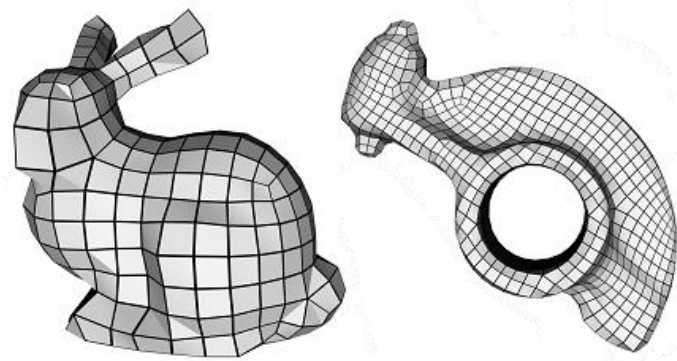
Quadrangles / Héxaèdres



- qualité du résultat équivalent à moindre coût en calcul
- vitesse de convergence élevée



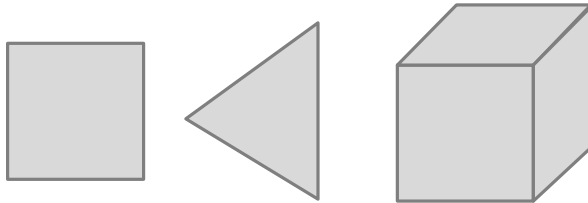
- sensible à la distorsion du maillage
- géométries complexes
- modes « hourglass »



Les différents types d'éléments

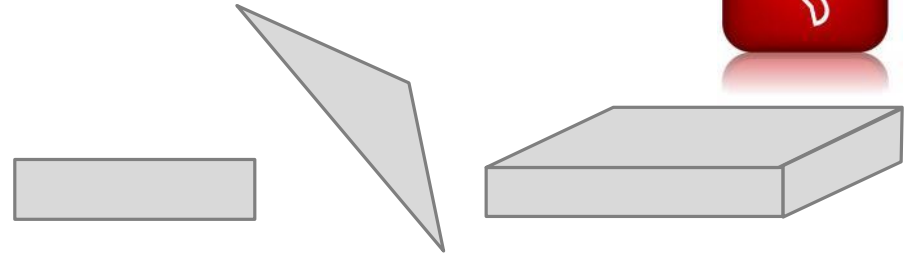


Bonnes pratiques

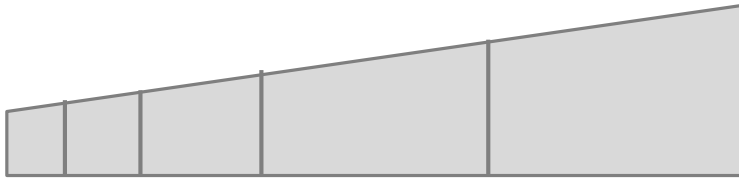


Éléments non déformés

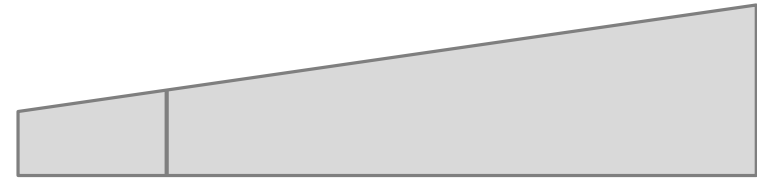
Mauvaises pratiques



Éléments déformés ou dégénérés

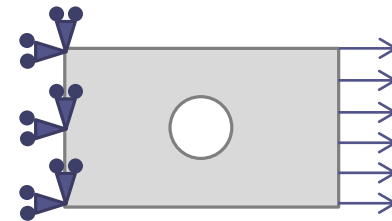
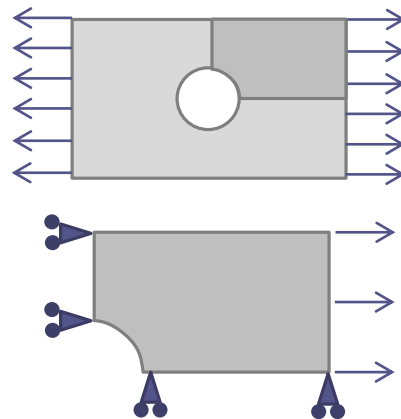


Variations progressives



Changements abrupts

Se servir des symétries !



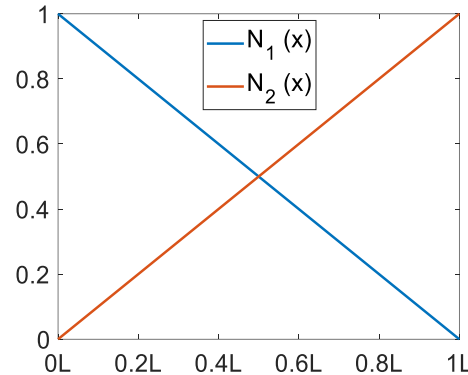
Problèmes de grande taille

4 : Extension au cas général (en HPP)

- L'énergie potentielle totale
- Discrétisation et maillage
- Les différents éléments
- **Interpolation et fonctions de forme**
- Matrices élémentaires
- Passage au repère de la structure
- Assemblage des matrices élémentaires
- Résolution pour des cas linéaires
- Éléments isoparamétriques
- Méthode d'intégration de Gauss
- Analyse vibratoire

- Exemple du treillis plan : interpolation sur l'élément

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u^{(i)}$$



→ **Généralisation** en 3D
pour d'autres éléments ?

Définition de la fonction de forme

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\underline{x}) \underline{u}^{(i)}$$

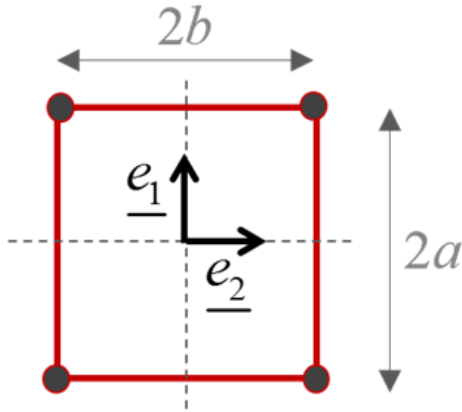
avec n le nombre de nœuds de l'élément

- Choix de fonctions de forme linéaires ou polynomiales, **à la condition** :

$$N_i(\underline{x}^{(j)}) = \begin{cases} 1 & \text{au nœud } i = j \\ 0 & \text{aux nœuds } i \neq j \end{cases}$$

avec $\underline{x}^{(i)}$ la position du nœud i

Elément
quadrangulaire
à 4 nœuds
(linéaire)

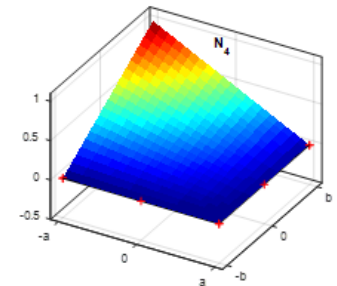
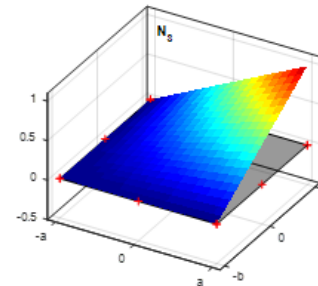
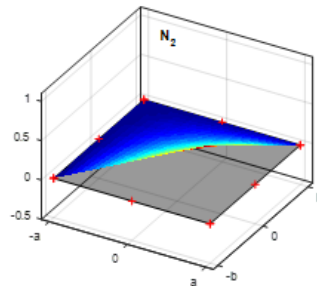
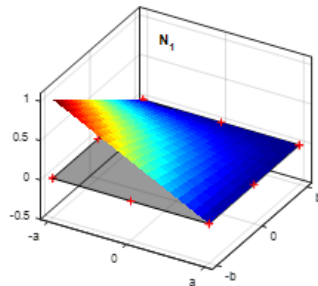


$$N_1 = (b - x_2)(a - x_1) / 4ab$$

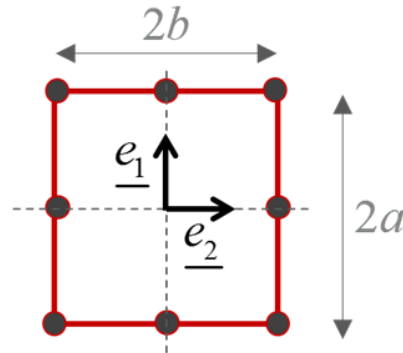
$$N_2 = (b - x_2)(a + x_1) / 4ab$$

$$N_3 = (b + x_2)(a + x_1) / 4ab$$

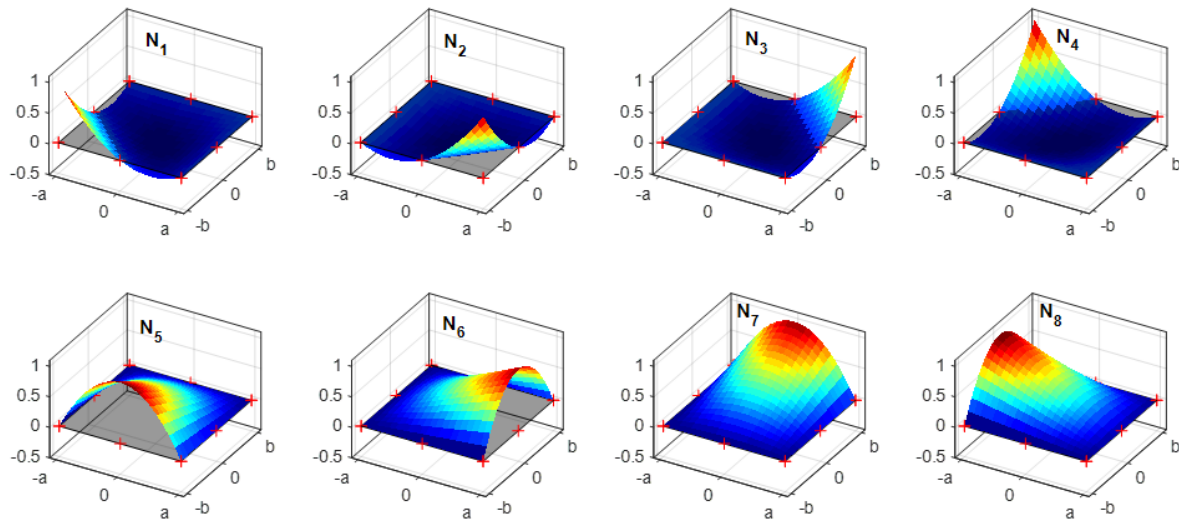
$$N_4 = (b + x_2)(a - x_1) / 4ab$$



Elément
quadrangulaire
à 8 nœuds
(quadratiques)



$$\begin{aligned} N_1 &= -(b-x_2)(a-x_1)(1+x_1/a+x_2/b)/4ab \\ N_2 &= -(b-x_2)(a+x_1)(1-x_1/a+x_2/b)/4ab \\ N_3 &= -(b+x_2)(a+x_1)(1-x_1/a-x_2/b)/4ab \\ N_4 &= -(b+x_2)(a-x_1)(1+x_1/a-x_2/b)/4ab \\ N_5 &= (b-x_2)(a-x_1)(a+x_1)/2a^2b \\ N_6 &= (a+x_1)(b-x_2)(b+x_2)/2ab^2 \\ N_7 &= (b+x_2)(a-x_1)(a+x_1)/2a^2b \\ N_8 &= (a-x_1)(b-x_2)(b+x_2)/2ab^2 \end{aligned}$$



- Comme pour le treillis, on introduit le vecteur des **ddl** :

$$\mathbf{q}_e^T = \left(u_1^{(1)} \quad u_2^{(1)} \quad u_3^{(1)} \quad u_1^{(2)} \quad u_2^{(2)} \quad u_3^{(2)} \quad \dots \quad u_1^{(n)} \quad u_2^{(n)} \quad u_3^{(n)} \right)$$

- Les fonctions de forme permettent d'écrire :

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_n \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \\ \dots \\ u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ u_3^{(n)} \end{pmatrix}$$

- De façon plus compacte :

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e$$

→ nombres de **lignes** = nombres de champs (dimensions, température...)

→ nombre de **colonnes** = nombre de **ddl**

4 : Extension au cas général (en HPP)

- L'énergie potentielle totale
- Discrétisation et maillage
- Les différents éléments
- Interpolation et fonctions de forme
- **Matrices élémentaires**
- Passage au repère de la structure
- Assemblage des matrices élémentaires
- Résolution pour des cas linéaires
- Éléments isoparamétriques
- Méthode d'intégration de Gauss
- Analyse vibratoire

Expression des déformations

- Rappel : en HPP $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \right)$
- En notation de Voigt : expression matricielle en 3D

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\underline{x}) \\ u_2(\underline{x}) \\ u_3(\underline{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{u}_e$$

- En intégrant la fonction de forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_e = \mathbf{D} \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e$$

Expression des déformations

$$\underline{\varepsilon}_e = \mathbf{D} \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e$$

$\mathbf{B}_e$

- Dans la matrice $\mathbf{B}_e$: dérivées des fonctions de forme
→ indépendants du déplacement !
- nombres de **lignes** = nombres de composantes indépendantes dans $\underline{\varepsilon}$
- nombre de **colonnes** = nombre de **ddl**

- matrice $\mathbf{D}$: opérateurs de dérivées partielles
- matrice $\mathbf{N}_e$: matrice des fonctions de formes

Expression des contraintes

- Rappel : matériau élastique linéaire HPP, notation de Voigt

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

- L'expression $\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e$ permet donc d'écrire pour l'élément :

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{A} \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e$$

Matrice de rigidité

- Exemple du treillis : matrice de rigidité obtenue à partir de $\sigma = \frac{F}{S} = E\varepsilon$
- Cas général... comment faire ?
- Idée : **stationnarité de l'énergie potentielle totale**

$$\Pi(\underline{u}) = \mathcal{W}_{\text{int}}(\underline{u}) - \mathcal{W}_{\text{ext}}(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \left(\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega_t - \int_{\partial\Omega_t} \underline{t} \cdot \underline{u} da - \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m \cdot \underline{u} d\Omega_t$$

avec la stationnarité $\forall \delta \underline{u} \quad , \quad \delta \Pi(\delta \underline{u}) = 0$

- Ecriture de l'énergie potentielle totale sous forme **matricielle** :

$$\Pi_e(\mathbf{u}_e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_e d\Omega_t - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^S da - \int_{\Omega_t} \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^V d\Omega_t$$

vecteur forces surfaciques
vecteur forces volumiques

Matrice de rigidité

$$\Pi_e(\mathbf{u}_e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_e d\Omega_t - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^S da - \int_{\Omega_t} \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^V d\Omega_t$$

- Stationnarité $\rightarrow$ écriture pour une perturbation $\delta \mathbf{q}_e$

$$\delta \Pi_e = \int_{\Omega_t} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_e d\Omega_t - \int_{\partial\Omega_t} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^S da - \int_{\Omega_t} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^V d\Omega_t$$



$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e \cdot \delta \mathbf{q}_e$



$\delta \mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e \cdot \delta \mathbf{q}_e$

- Factorisation par $\delta \mathbf{q}_e$ (arbitraire!)

$$\delta \Pi_e = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t \mathbf{q}_e - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^S da - \int_{\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^V d\Omega_t$$

Matrice de rigidité

$$\delta \Pi_e = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t \mathbf{q}_e - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^S da - \int_{\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^V d\Omega_t$$

- Stationnarité $\rightarrow$ nécessairement $\delta \Pi = 0$

$$\underbrace{\int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{q}_e = \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^S da + \int_{\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^V d\Omega_t}_{\mathbf{f}_e}$$

$$\Rightarrow \mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e$$

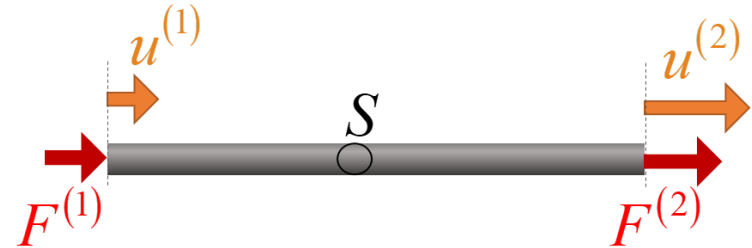
$\rightarrow$ Introduction de la **matrice de rigidité** de l'élément

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t$$

- $\rightarrow$ matrice **carrée** : autant de lignes et de colonnes que de **ddl**
- $\rightarrow$ vecteur $\mathbf{q}_e$: vecteur des degrés de liberté
- $\rightarrow$ vecteur $\mathbf{f}_e$: vecteur des forces nodales équivalentes (efforts extérieurs)

Matrice de rigidité

- Exemple : barre à 2 noeuds



- Matrice de rigidité : définition $\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t$

- en 1D : $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon$, $\boldsymbol{\sigma} = \sigma$, $\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \mathbf{A} = E$

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x} \\ \mathbf{N}_e = \begin{pmatrix} N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} & N_2(x) = \frac{x}{L} \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{B}_e = \mathbf{D} \mathbf{N}_e = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- calcul : $\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t = L \times S \times \frac{E}{L^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

→ même matrice de rigidité que précédemment !

4 : Extension au cas général (en HPP)

- L'énergie potentielle totale
- Discrétisation et maillage
- Les différents éléments
- Interpolation et fonctions de forme
- Matrices élémentaires
- **Passage au repère de la structure**
- Assemblage des matrices élémentaires
- Résolution pour des cas linéaires
- Éléments isoparamétriques
- Méthode d'intégration de Gauss
- Analyse vibratoire

- Exemple du treillis :

Ddl $\underline{q}_e$ et vecteur des efforts nodaux $\underline{f}_e$ dans le repère de l'élément

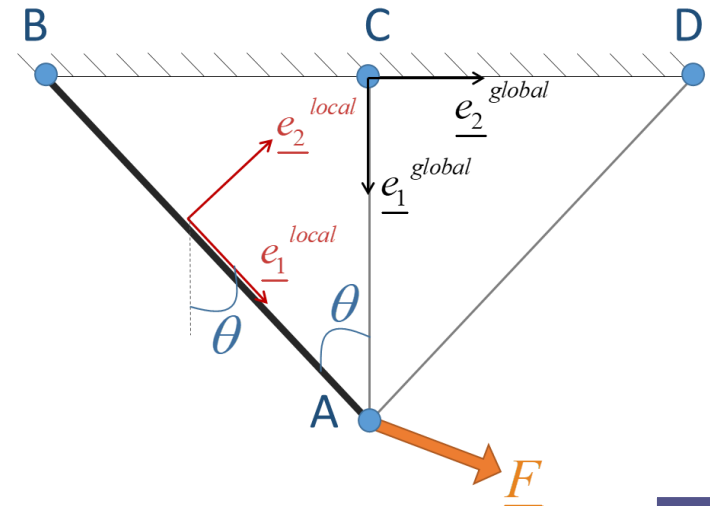
→ Dans la base $(\underline{e}_1^{local}, \underline{e}_2^{local})$ on écrit $\underline{f}_e^{local}$ et $\underline{q}_e^{local}$

→ Comment écrire tout dans la base $(\underline{e}_1^{global}, \underline{e}_2^{global})$?

- Ecriture d'une matrice de passage $\underline{T}_e$ pour chaque élément

- Matrice de rigidité dans le repère global :

$$\underline{K}_e^{global} = \underline{T}_e \underline{K}_e^{local} \underline{T}_e^{-1}$$



4 : Extension au cas général (en HPP)

- L'énergie potentielle totale
- Discrétisation et maillage
- Les différents éléments
- Interpolation et fonctions de forme
- Matrices élémentaires
- Passage au repère de la structure
- **Assemblage des matrices élémentaires**
- Résolution pour des cas linéaires
- Éléments isoparamétriques
- Méthode d'intégration de Gauss
- Analyse vibratoire

- Comportement de chaque élément

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_e = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t$$

- Exemple du treillis : description des **connexions** entre les nœuds

- Matrice de sélection $\mathbf{S}_e$ (contient des 0 ou 1) telle que :

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{S}_e \mathbf{q}_s \quad (\text{repère de la structure})$$

$$\mathbf{q}_e^{local} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{S}_e \mathbf{q}_s \quad (\text{repère de l'élément})$$

- Rappel : à l'échelle de l'élément, énergie potentielle totale **stationnaire**

$$\delta \Pi_e = 0 = \delta \mathbf{q}_e^T \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t \mathbf{q}_e - \delta \mathbf{q}_e^T \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^S da - \delta \mathbf{q}_e^T \int_{\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^V d\Omega_t$$

- **Hypothèse** : additivité de l'énergie potentielle totale (grandeur extensive)

$$\Pi = \sum_e \Pi_e \quad \text{et} \quad \delta \Pi = \sum_e \delta \Pi_e = 0$$

- **Energie potentielle totale = somme sur les éléments !**

$$\delta \Pi = \sum_e \left(\delta \mathbf{q}_s^T \mathbf{S}_e^T \mathbf{T}_e \left(\int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t \right) \mathbf{T}_e^T \mathbf{S}_e \mathbf{q}_s - \delta \mathbf{q}_s^T \mathbf{S}_e^T \mathbf{T}_e \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^S da - \delta \mathbf{q}_s^T \mathbf{S}_e^T \mathbf{T}_e \int_{\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^V d\Omega_t \right)$$

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_e \left(\mathbf{S}_e^T \mathbf{T}_e \left(\int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t \right) \mathbf{T}_e^T \mathbf{S}_e \right)}_{\mathbf{K}_S} \mathbf{q}_s = \underbrace{\sum_e \mathbf{S}_e^T \mathbf{T}_e \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^S da}_{\mathbf{f}_S^S} + \underbrace{\sum_e \mathbf{S}_e^T \mathbf{T}_e \int_{\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^V d\Omega_t}_{\mathbf{f}_S^V}$$

→ Equilibre de la structure : $\mathbf{K}_S \mathbf{q}_s = \mathbf{f}_s$

4 : Extension au cas général (en HPP)

- L'énergie potentielle totale
- Discrétisation et maillage
- Les différents éléments
- Interpolation et fonctions de forme
- Matrices élémentaires
- Passage au repère de la structure
- Assemblage des matrices élémentaires
- **Résolution pour des cas linéaires**
- Éléments isoparamétriques
- Méthode d'intégration de Gauss
- Analyse vibratoire

- Sous forme matricielle: système à résoudre

$$\begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(i)} \\ \vdots \\ u^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ \vdots \\ f^{(i)} \\ \vdots \\ f^{(n)} \end{pmatrix}$$

→ Intégration des
conditions aux limites ?

- Conditions aux limites de deux types :

1) Déplacement nul ou imposé aux points i tel que : $\underline{u}^{(i)} = \underline{0}$ ou $\underline{u}^{(i)} = \underline{u}_0$

1) Effort nul ou imposé aux points i tel que : $\underline{f}^{(i)} = \underline{0}$ ou $\underline{f}^{(i)} = \underline{f}_0$

- **Résolution du problème**

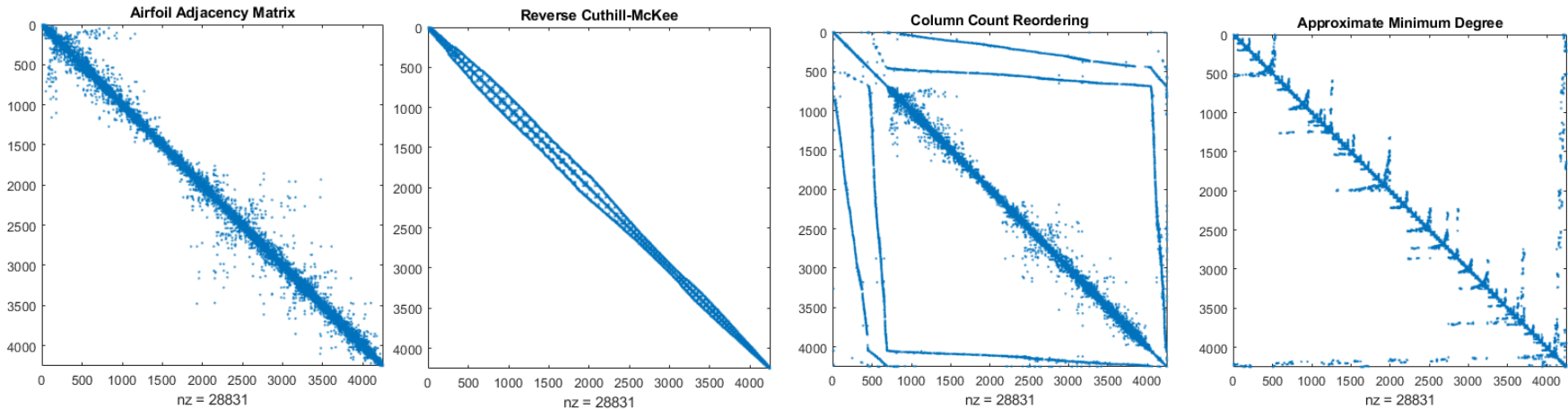
$$\mathbf{K}_s \mathbf{q}_s = \mathbf{f}_s \Rightarrow \mathbf{q}_s = \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{f}_s$$

$$\mathbf{K}_s^{-1}$$

= énorme matrice à inverser !!!

$$\mathbf{K}_s^{-1}$$

= énorme matrice à inverser !!!



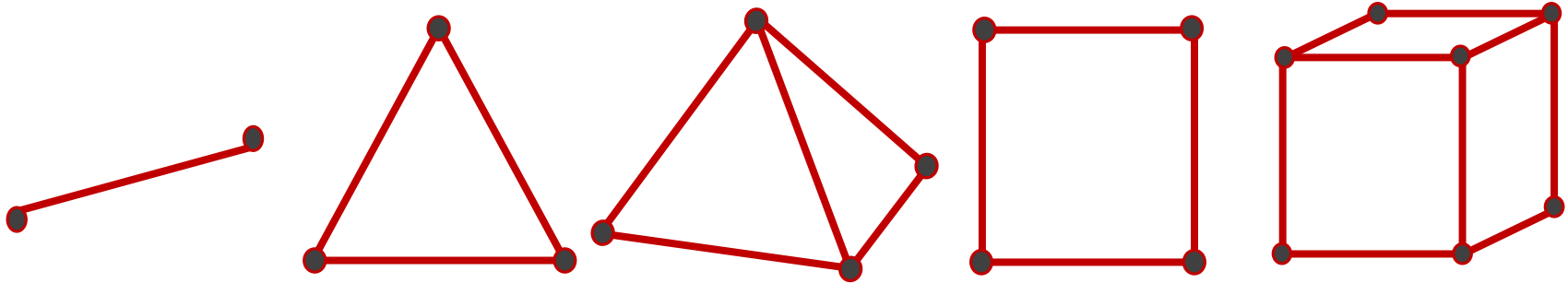
Méthodes numériques de réorganisation des matrices « sparse »

- **Après résolution :** obtention de $\mathbf{q}_s$
 - Calcul des déplacements locaux $\mathbf{q}_e^{local} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{S}_e \mathbf{q}_s$
 - Calcul des déformations nodales $\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e$
 - Calcul des contraintes nodales $\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{A} \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e$

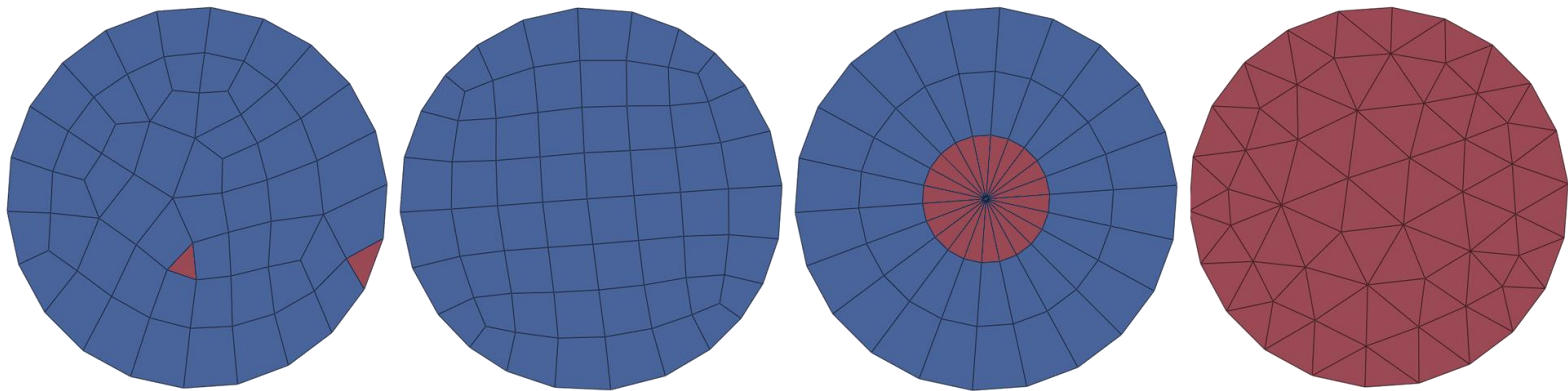
4 : Extension au cas général (en HPP)

- L'énergie potentielle totale
- Discrétisation et maillage
- Les différents éléments
- Interpolation et fonctions de forme
- Matrices élémentaires
- Passage au repère de la structure
- Assemblage des matrices élémentaires
- Résolution pour des cas linéaires
- **Eléments isoparamétriques**
- Méthode d'intégration de Gauss
- Analyse vibratoire

- Fonctions de formes précédentes : géométries **simples** et **parfaites**

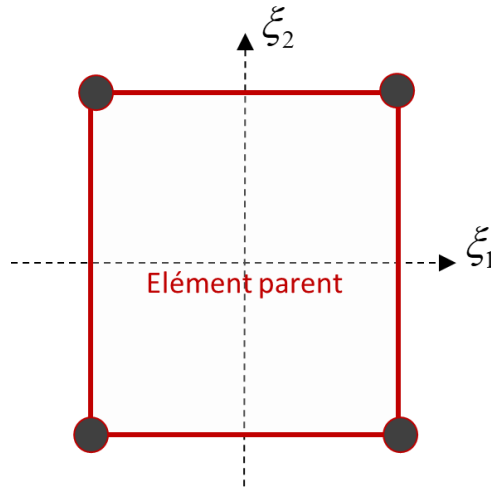


- Réalité : après le maillage d'une forme complexe :

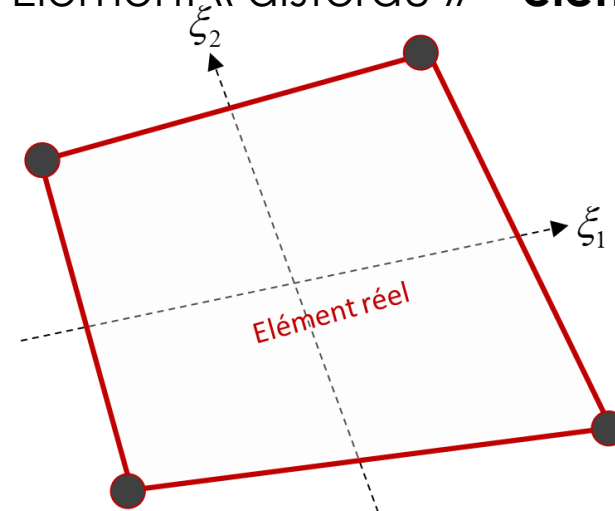


= éléments « distordus » par rapport à la forme idéale !

Élément « parfait » = **élément parent**



Élément « distordu » = **élément réel**



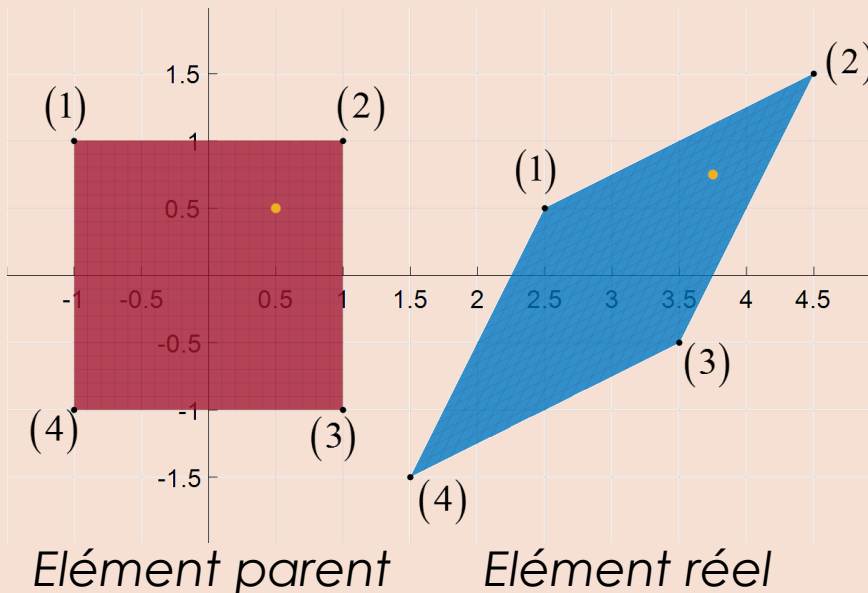
- ✓ Système de coordonnées « intrinsèques » $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$
- ✓ Transformation entre le système $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ et les coordonnées réelles
$$\underline{x}(\underline{\xi}) = \underline{\phi}(\underline{\xi})$$
- ✓ Sur l'élément parent : transformation = fonction des valeurs nodales !

- ✓ **Éléments isoparamétriques** : même fonctions de formes que précédemment pour décrire la transformation

$$\underline{\phi}(\underline{\xi}) = \sum_{i=1}^n N_i(\underline{\xi}) \underline{\phi}_{\underline{x}^{(i)}} \quad \text{d'où}$$

$$\underline{x}(\underline{\xi}) = \sum_{i=1}^n N_i(\underline{\xi}) \underline{x}^{(i)}$$

Exemple



Fonctions de formes :

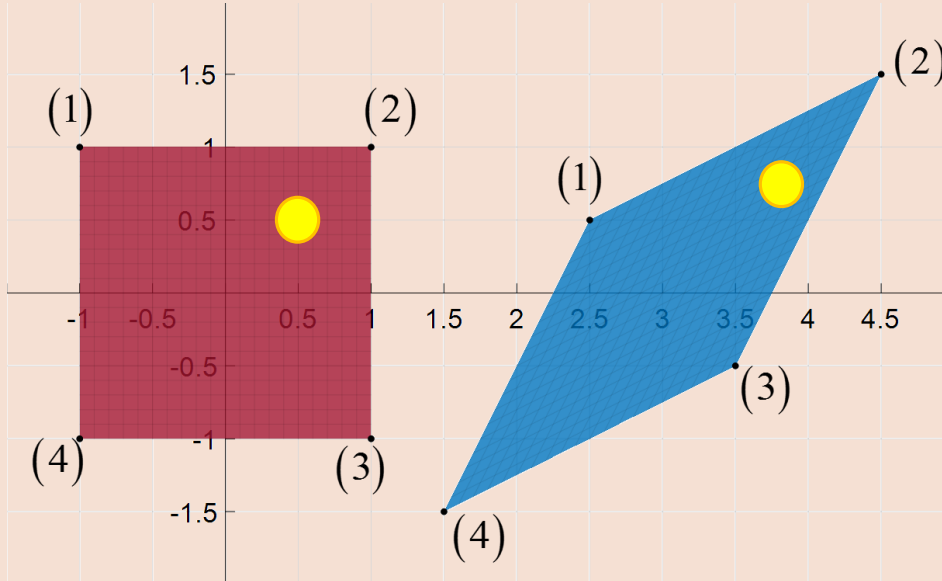
$$N_1 = (1 - \xi_2)(1 - \xi_1) / 4$$

$$N_2 = (1 - \xi_2)(1 + \xi_1) / 4$$

$$N_3 = (1 + \xi_2)(1 + \xi_1) / 4$$

$$N_4 = (1 + \xi_2)(1 - \xi_1) / 4$$

Exemple



$$N_1 = (1 - \xi_2)(1 - \xi_1) / 4$$

$$N_2 = (1 - \xi_2)(1 + \xi_1) / 4$$

$$N_3 = (1 + \xi_2)(1 + \xi_1) / 4$$

$$N_4 = (1 + \xi_2)(1 - \xi_1) / 4$$

Exemple : point de coordonnées intrinsèques $(\xi_1, \xi_2) = (0.5, 0.5)$

Position réelle :

$$\underline{x} = N_1(0.5, 0.5)\underline{x}^{(1)} + N_2(0.5, 0.5)\underline{x}^{(2)} + N_3(0.5, 0.5)\underline{x}^{(3)} + N_4(0.5, 0.5)\underline{x}^{(4)}$$

$$[\underline{x}] = 0.0625 \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + 0.1875 \begin{pmatrix} 4.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} + 0.5625 \begin{pmatrix} 3.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} + 0.1875 \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

Matrice jacobienne

- Rappel : matrice de rigidité de l'élément $\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e d\Omega_t$

avec (2D) : $\mathbf{B}_e = \mathbf{D} \mathbf{N}_e = \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & - \\ - & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & - \\ - & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial x_1} & - \\ - & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_n}{\partial x_1} & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right)$

- Éléments isoparamétriques $\rightarrow$ coordonnées $\begin{cases} \underline{x}(\underline{\xi}) = \underline{\phi}(\underline{\xi}) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{\phi}^{-1}(\underline{x}) \end{cases}$

- Dérivées des fonctions de forme : $\frac{\partial N_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_j}$

Matrice jacobienne

- en 2D :

$$\underline{x}(\underline{\xi}) = \sum_{i=1}^n N_i(\underline{\xi}) \underline{x}^{(i)} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} x_1^{(i)} & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} x_2^{(i)} \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} x_1^{(i)} & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} x_2^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

- sous forme abrégée :

$$\frac{\partial \mathbf{N}_e}{\partial \underline{\xi}} = \mathbf{J}_e \frac{\partial \mathbf{N}_e}{\partial \mathbf{x}}$$

$\mathbf{J}_e$ la **matrice jacobienne**

- en 2D :

$$\mathbf{J}_e = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} x_1^{(i)} & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} x_2^{(i)} \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} x_1^{(i)} & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} x_2^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} \end{pmatrix}$$

dérivées des fonctions de forme =
identique pour chaque élément !

ddl

Matrice jacobienne

- si la relation inverse existe : $\frac{\partial \mathbf{N}_e}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}_e^{-1} \frac{\partial \mathbf{N}_e}{\partial \xi}$
- **Jacobien** de la transformation = déterminant de la matrice jacobienne
= rapport des volumes actuels et initiaux

$$d\Omega_t = J d\Omega_0 = \det \mathbf{J}_e d\Omega_0$$

- **Changement de volume d'intégration** dans la matrice de rigidité :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_e^T(\underline{x}) \mathbf{A} \mathbf{B}_e(\underline{x}) d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_e^T(\underline{\xi}) \mathbf{A} \mathbf{B}_e(\underline{\xi}) J d\Omega_0$$

Conséquence : même calcul pour tous les éléments (seul J change !)

Erreur « jacobien négatif » : calcul impossible = élément trop distordu !

4 : Extension au cas général (en HPP)

- L'énergie potentielle totale
- Discrétisation et maillage
- Les différents éléments
- Interpolation et fonctions de forme
- Matrices élémentaires
- Passage au repère de la structure
- Assemblage des matrices élémentaires
- Résolution pour des cas linéaires
- Éléments isoparamétriques
- **Méthode d'intégration de Gauss**
- Analyse vibratoire

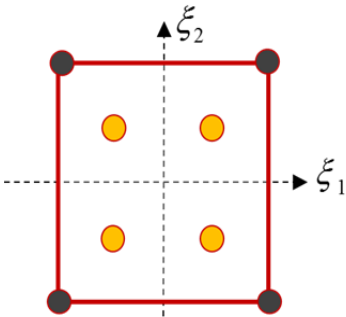
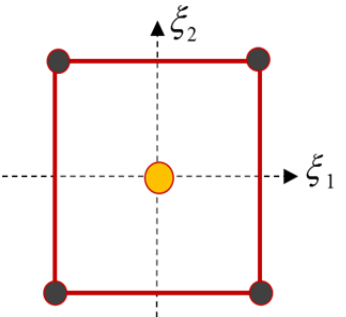
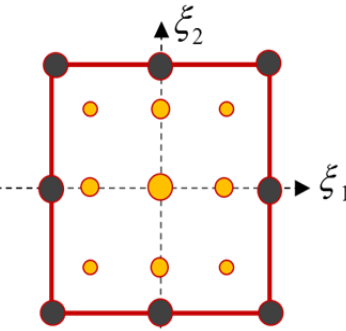
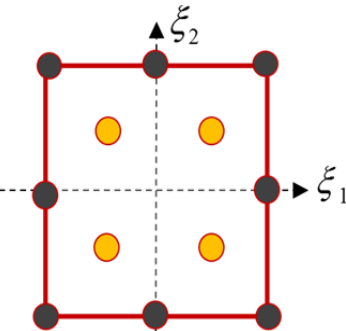
- Matrice de rigidité: $\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_e^T(\underline{\xi}) \mathbf{A} \mathbf{B}_e(\underline{\xi}) J d\Omega_0$
- Intégration **formelle** des fonctions de formes : trop **coûteux** !
 - alternative : intégration numérique approchée
 - méthode de Gauss : intégrale = somme pondérée

$$\int_{\Omega_0} f(\underline{\xi}) d\Omega_0 = \sum_{i=1}^{n_{G1}} \sum_{j=1}^{n_{G2}} \sum_{k=1}^{n_{G3}} w_i w_j w_k f(\xi_i, \xi_j, \xi_k)$$

n_G : nombre de points d'intégration de Gauss

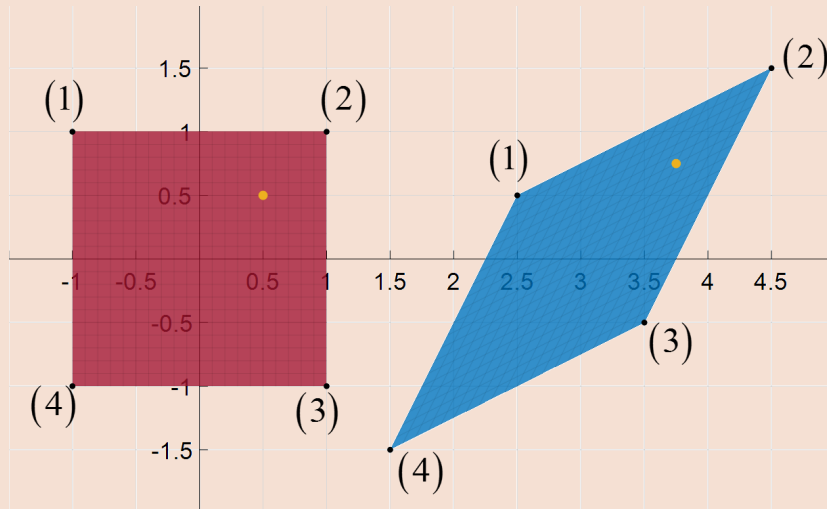
w_i : pondérations des points de Gauss

- Sans démonstration : intégration exacte pour des quantités, positions et pondérations précises
- Pour alléger le calcul : réduction du nombre de points d'intégration
= **intégration réduite**
= approximation sur le calcul suffisante si variations de champs faibles

	Intégration complète	Intégration réduite
Elément linéaire (4 nœuds)		
Elément quadratique (8 nœuds)		

Modes indésirables

Exemple



Transformation affine :

$$\begin{cases} u_1 = a + b\xi_1 + c\xi_2 + d\xi_1\xi_2 \\ u_2 = e + f\xi_1 + g\xi_2 + h\xi_1\xi_2 \end{cases}$$

Déformations nodales :

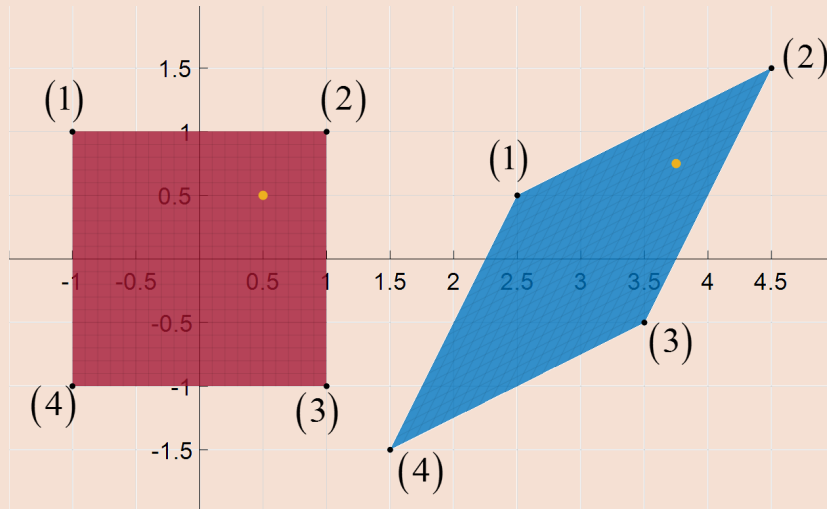
$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{D} \mathbf{u}_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Calcul pour cette transformation :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + d\xi_2 \\ g + h\xi_1 \\ (c + f) + d\xi_1 + h\xi_2 \end{pmatrix}$$

Modes indésirables

Exemple



5 modes de déformation :

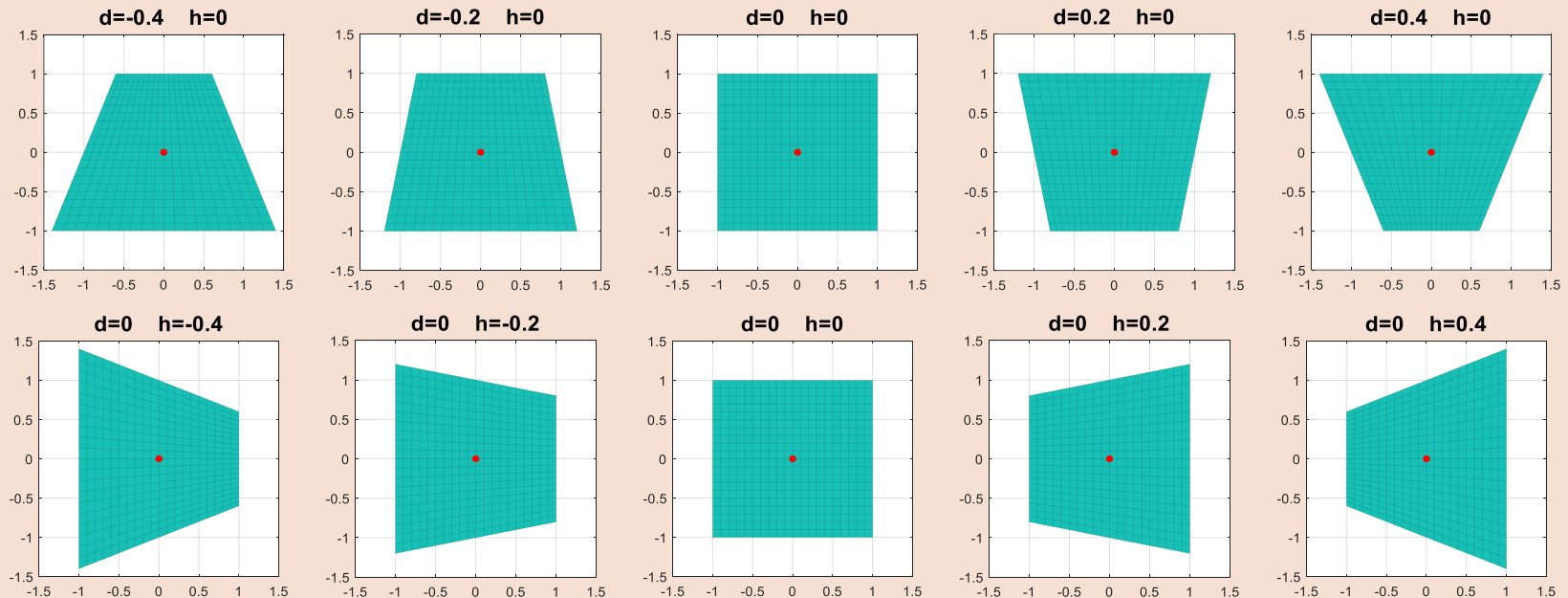
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} b + d\xi_2 \\ g + h\xi_1 \\ (c + f) + d\xi_1 + h\xi_2 \end{pmatrix}$$

Hypothèse : intégration réduite, 1 point de Gauss au centre $\xi_1 = \xi_2 = 0$

Dans ce cas : $\boldsymbol{\varepsilon}^G = \begin{pmatrix} b \\ g \\ (c + f) \end{pmatrix} \rightarrow$ effet des paramètres d et h invisibles !

Modes indésirables

Exemple



1 seul point d'intégration : aucune différence sur le calcul de l'intégrale !!

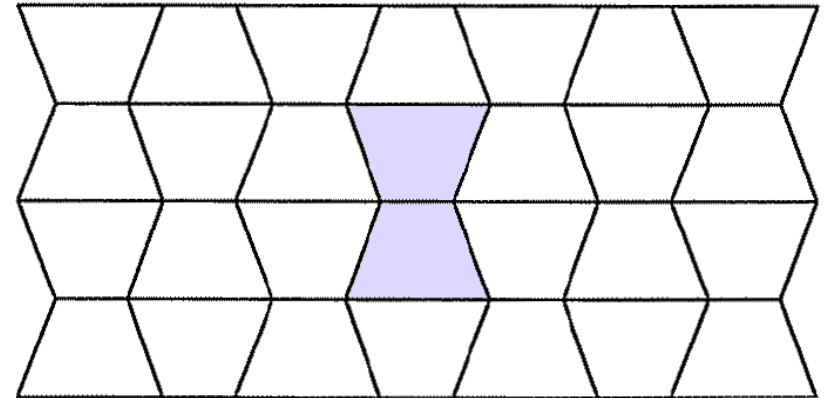
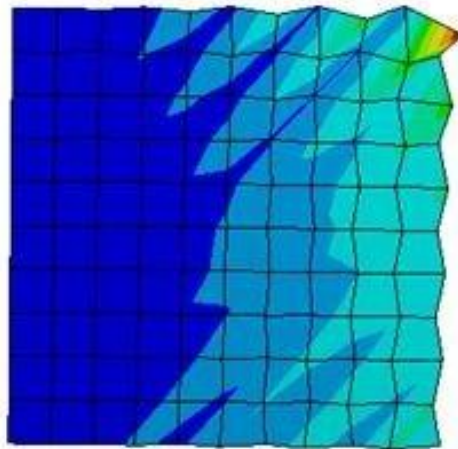
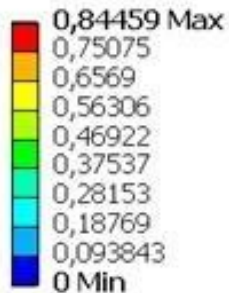
mode « **indésirable** » ou « **mode à zéro énergie** »

Modes indésirables

- Mode « **hourglass** »

= artefact numérique fréquent pour des **quadrangles linéaires** ou des **hexaèdres linéaires**

Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: mm
Time: 1
04.02.2008 14:13



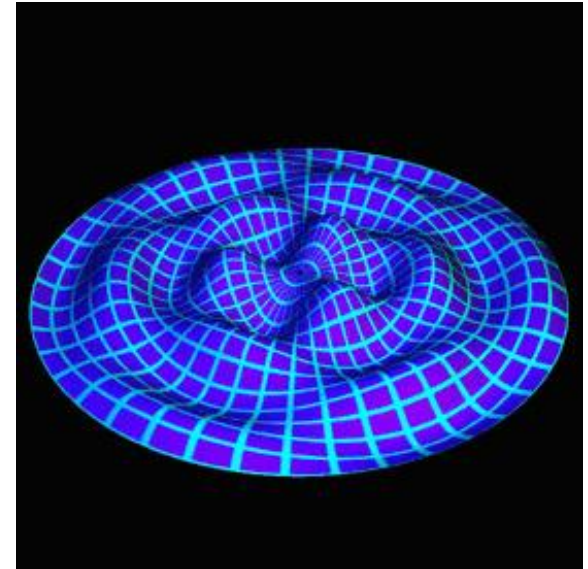
Solutions :

- choisir des éléments de degré 2
- choisir une intégration non réduite

4 : Extension au cas général (en HPP)

- L'énergie potentielle totale
- Discrétisation et maillage
- Les différents éléments
- Interpolation et fonctions de forme
- Matrices élémentaires
- Passage au repère de la structure
- Assemblage des matrices élémentaires
- Résolution pour des cas linéaires
- Éléments isoparamétriques
- Méthode d'intégration de Gauss
- **Analyse vibratoire**

- Démarche précédente : élastostatique en HPP
- Extension à la **dynamique** pour le calcul des **modes propres** ?



- **Energie totale =**

énergie potentielle totale + énergie cinétique + (énergie de dissipation)

$$\Pi(\underline{u}) = \left[\mathcal{W}_{\text{int}}(\underline{u}) - \mathcal{W}_{\text{ext}}(\underline{u}) \right] + \mathcal{K}(\underline{u})$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{K}(\underline{u}) = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2} \rho \dot{\underline{\mathbf{u}}}_e^T \dot{\underline{\mathbf{u}}}_e d\Omega_t$$

- Energie totale **stationnaire** lors d'une perturbation

$$\delta \Pi_e = \int_{\Omega_t} \left(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} - \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^V + \rho \ddot{\mathbf{u}}_e^T \delta \mathbf{u}_e \right) d\Omega_t - \int_{\partial\Omega_t} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^S da = 0$$

- Ecriture en utilisant les fonctions de forme :
$$\begin{cases} \mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e \\ \ddot{\mathbf{u}}_e = \mathbf{N}_e \ddot{\mathbf{q}}_e \end{cases}$$

$$\underbrace{\int_{\Omega_t} (\mathbf{B}_e^T \mathbf{A} \mathbf{B}_e) d\Omega_t}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{q}_e + \underbrace{\int_{\Omega_t} (\rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e) d\Omega_t}_{\mathbf{M}_e} \ddot{\mathbf{q}}_e = \underbrace{\int_{\Omega_t} (\mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^V) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f}_e^S da}_{\mathbf{f}_e}$$

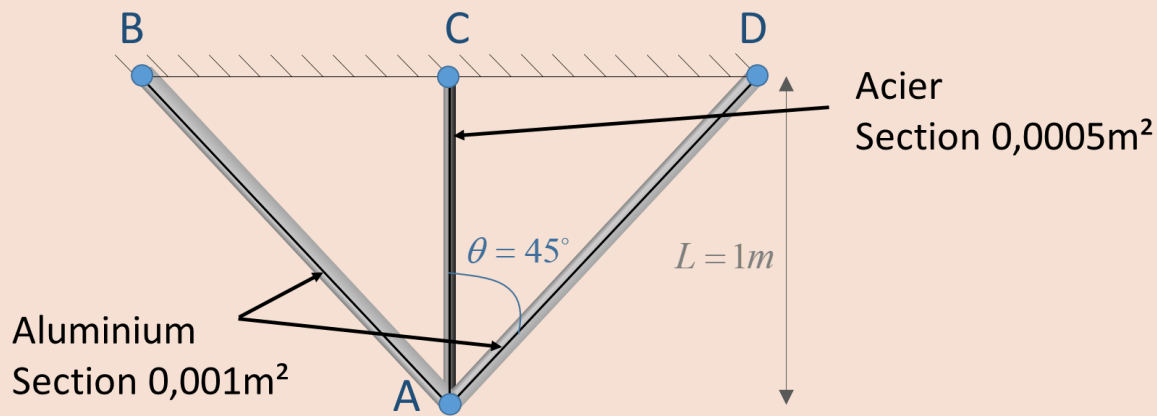
$$\Rightarrow \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e + \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{f}_e$$

matrice des masses

- A l'échelle de la structure : matrice de passage + matrice de sélection

$$\mathbf{K}_s \mathbf{q}_s + \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{f}_s$$

Exemple

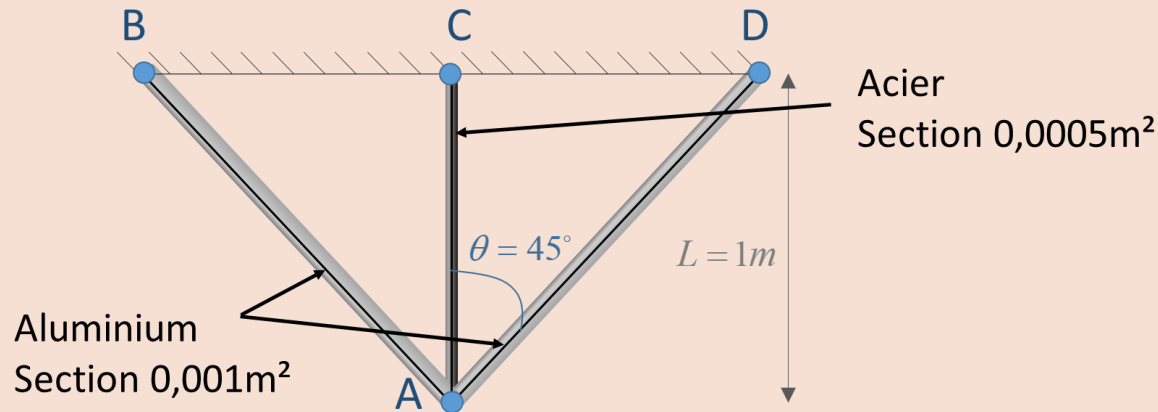


Hypothèse :
on néglige
l'amortissement

- Modes propres de la structure ??

- A l'échelle de l'élément : $\mathbf{K}_e \mathbf{q}_e + \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{f}_e$

Exemple



$$\mathbf{K}_e \mathbf{q}_e + \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{f}_e$$

$$\mathbf{K}_e = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

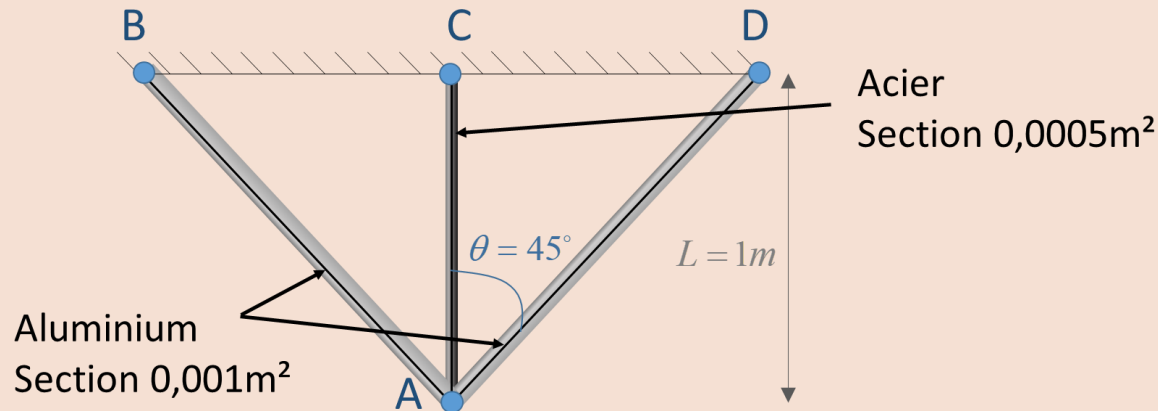
- Matrice des masses dans le repère de l'élément :

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_t} (\rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e) d\Omega_t \quad \mathbf{N}_e = \begin{pmatrix} N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} & N_2(x) = \frac{x}{L} \end{pmatrix}$$

→ **ddl** à l'échelle de la structure

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1(x) & 0 & N_2(x) & 0 \\ 0 & N_1(x) & 0 & N_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

Exemple



$$\mathbf{K}_e \mathbf{q}_e + \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{f}_e$$

$$\mathbf{K}_e = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_s = \rho S \int_0^L \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{pmatrix} dx = \dots = \frac{\rho S L^2}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

■ Système global :

$$\begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{\rho S L^2}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1^{(1)} \\ \ddot{u}_2^{(1)} \\ \ddot{u}_1^{(2)} \\ \ddot{u}_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

Exemple

- Passage au repère global : changements de base

$$(\mathbf{K}_e^{AB})^{global} = \frac{E^{AB} S^{AB}}{L/c} \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{M}_e^{AB})^{global} = \frac{\rho^{AB} S^{AB} (L/c)^2}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_e^{AC})^{global} = \frac{E^{AC} S^{AC}}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{M}_e^{AC})^{global} = \frac{\rho^{AC} S^{AC} L}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_e^{AD})^{global} = \frac{E^{AD} S^{AD}}{L/c} \begin{pmatrix} c^2 & -cs & -c^2 & cs \\ -cs & s^2 & cs & -s^2 \\ -c^2 & cs & c^2 & -cs \\ cs & -s^2 & -cs & s^2 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{M}_e^{AD})^{global} = \frac{\rho^{AD} S^{AD} (L/c)^2}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple

- Assemblage : matrices de sélection
- Exemple au point **A** :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} E^{AB} S^{AB} c^3 + E^{AC} S^{AC} + E^{AD} S^{AD} c^3 & E^{AB} S^{AB} c^2 s - E^{AD} S^{AD} c^2 s \\ E^{AB} S^{AB} c^2 s - E^{AD} S^{AD} c^2 s & E^{AB} S^{AB} c s^2 + E^{AD} S^{AD} c s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{pmatrix} \\ + \frac{L^2}{3} \begin{pmatrix} (\rho^{AB} S^{AB} + \rho^{AD} S^{AD}) / c^2 + \rho^{AC} S^{AC} & (\rho^{AD} S^{AD} - \rho^{AB} S^{AB}) / c^2 \\ (\rho^{AD} S^{AD} - \rho^{AB} S^{AB}) / c^2 & (\rho^{AB} S^{AB} + \rho^{AD} S^{AD}) / c^2 + \rho^{AC} S^{AC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1^A \\ \ddot{u}_2^A \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s + \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{0}$$

- Solution sous la forme $\mathbf{q}_s(t) = \mathbf{Q} e^{i\omega t}$ avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation propre

$$\begin{cases} \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}_s(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s(t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_s(t) = \mathbf{Q} e^{i\omega t} \end{cases} \Rightarrow (i\omega)^2 \mathbf{M}_s \mathbf{q}_s(t) = -\mathbf{K}_s \mathbf{q}_s(t) \Rightarrow \det(\mathbf{K}_s - \omega^2 \mathbf{M}_s) = 0$$

- Résolution : deux fréquences

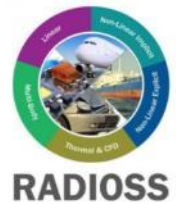
$$f_1 = 466 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 823 \text{ Hz}$$

5 : Utilisation du code de calcul Abaqus

Logiciels utilisant la MEF

- ✓ Principaux logiciels commerciaux



Marc®



Sélectionné à l'ENSEM en raison des partenaires industriels

- ✓ Open source (orientés recherche)

- ADVENTURE
- Code Aster (EDF)
- Elmer
- FEbio (biomechanics)
- DANSOFT (geotechnics)
- Warp3D
- ParaFEM
- Open FEM
- CALCULIX
- FreeFEM++
- ...

Procédure dans les codes utilisant la MEF

Utilisateur

Preprocess

Writing files

Machine

Process

Writing files

Utilisateur

Post-process

Construction du jeu de données

- Géométrie
- Matériaux
- Conditions aux limites
- Paramètres de calcul

Analyse numérique

Résultats

- Visualisation des champs
- Tracé de courbes
- Export de données

 **ABAQUS** : les trois étapes sont dans le même logiciel

Fichiers entrée / sortie

- ❑ **.cae : contient le modèle et les calculs (celui que l'on ré-ouvre)**
- ❑ **.jnl : journal , repertoriant ce qui a été sauvegardé sur le disque**
- ❑ **.rec: ce qui a été fait depuis la dernière sauvegarde**
- ❑ **.inp: fichier d'entrée écrit par Abaqus CA, prêt à être envoyé au process**
→ **peut être écrit directement (sans preprocess)**
- ❑ **.odb: contient les résultats de l'analyse**
- ❑ **.res: restart : pour continuer une analyse interrompue**
- ❑ **.msg: messages d'informations sur le déroulement du calcul**

✓ **Attention au répertoire d'écriture!!** → File / Set work Directory

6 : Quelques mots sur les non-linéarités

- **Non-linéarités géométriques**
- Non-linéarités matérielles
- Le traitement du contact

Méthodologie globale : rappel sur le cas linéaire

✓ Fonctions de forme :



✓ Ecriture de la déformation :



✓ Loi de comportement :



✓ Stationnarité de l'EPT :



✓ Passage au repère de la structure :



✓ Assemblage :



✓ Résolution :

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e$$



$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{D} \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e$$



$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{A} \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e$$



$$\mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e$$



$$\mathbf{K}_e^{global} = \mathbf{T}_e \mathbf{K}_e^{local} \mathbf{T}_e^{-1}$$

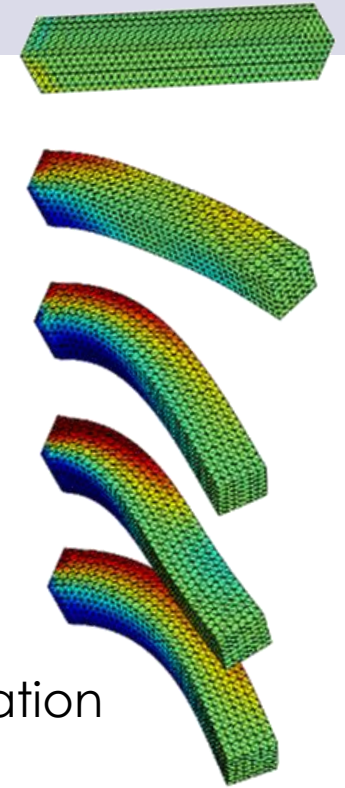
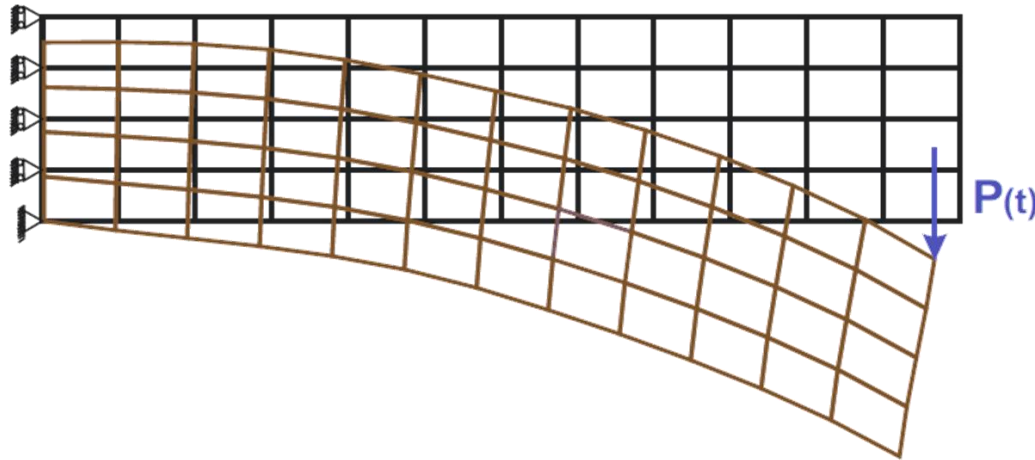


$$\mathbf{K}_s \mathbf{q}_s = \mathbf{f}_s$$



$$\mathbf{q}_s = \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{f}_s \rightarrow \text{calcul } \boldsymbol{\varepsilon}_e \text{ et } \boldsymbol{\sigma}_e$$

Méthodologie globale



- ✓ Apparition d'un terme non-linéaire dans la déformation
- ✓ La rigidité apparente peut changer en cours de déformation
- ✓ Les efforts extérieurs changent en cours de déformation

Philosophie :

Déformation totale = succession de déformations élémentaires

$$\underline{\underline{E}} \rightarrow d\underline{\underline{E}} : \text{incrément de déformation}$$

Méthodologie globale

- ✓ Pour chaque **incrément** de déformation :
équilibre de la structure → **stationnarité de l'énergie potentielle totale**

$$\forall \delta \underline{u} \quad , \quad \delta \Pi(\delta \underline{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \mathcal{W}_{\text{int}}(\delta \underline{u}) = \delta \mathcal{W}_{\text{ext}}(\delta \underline{u})$$

- ✓ On montre (mais pas ici!) qu'on peut alors calculer :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_S$$

Matrice de rigidité tangente

- ✓ Matrice de rigidité linéaire : $\mathbf{K}$
- ✓ Matrice de rigidité « des déplacements initiaux » : $\mathbf{K}_{NL}$
→ Fonction des déplacements (terme non-linéaire)
- ✓ Matrice de rigidité « des contraintes initiales » : $\mathbf{K}_S$
→ Rigidification de la structure

Matrice de rigidité tangente

- ✓ A l'équilibre entre deux incréments :

$$d\delta\mathcal{W}_{\text{int}} = \delta\mathcal{W}_{\text{int}}^{n+1} - \delta\mathcal{W}_{\text{int}}^n = \delta\mathcal{W}_{\text{ext}}^{n+1} - \delta\mathcal{W}_{\text{ext}}^n = d\delta\mathcal{W}_{\text{ext}}$$

$$d\delta\mathcal{W}_{\text{int}} = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{K}_T d\mathbf{q}$$

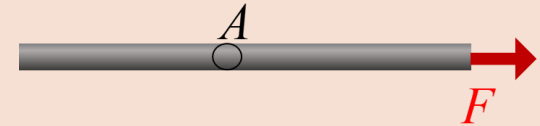
$$d\delta\mathcal{W}_{\text{ext}} = \delta\mathbf{q}^T d\mathbf{f}$$

$$\mathbf{K}_T d\mathbf{q} = d\mathbf{f}$$

- ✓ Matrice de rigidité tangente : $\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_S$
- ✓ Vecteur des variations des degrés de liberté : $d\mathbf{q}$
- ✓ Vecteur des variations d'efforts nodaux : $d\mathbf{f}$

Exemple

- ✓ Traction simple d'une barre de section A



- ✓ Fonctions de forme écrites précédemment :

$$\mathbf{B}_L = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{NL} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} = \frac{\Delta L}{L} \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix}$$

- ✓ Comportement élastique linéaire en 1D : $\mathbf{A} = E$

- ✓ Matrice de rigidité tangente : $\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_S$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} d\Omega_0 = A \int_0^L \begin{pmatrix} -1/L \\ 1/L \end{pmatrix} E \begin{pmatrix} -1/L & 1/L \end{pmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

- ✓ Matrice de rigidité tangente :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_S = \frac{EA}{L} \left(1 + 2 \frac{\Delta L}{L} + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 + \frac{F}{EA} \right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ✓ Equilibre final : $\mathbf{K}_T d\mathbf{q} = d\mathbf{f}$
- ✓ Poutre encastée en $x=0 \rightarrow u^{(1)} = 0$
- ✓ Inconnue en $x=l \rightarrow u^{(2)} = \Delta L$
- ✓ Effort connu en $x=l \rightarrow f^{(2)} = F$

$$F = \frac{EA}{L} \left(1 + 2 \frac{\Delta L}{L} + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 + \frac{F}{EA} \right) \Delta L = \mathbf{K}_T \Delta L \rightarrow \text{dépend du chargement !!!}$$

Exemple

$$F = \frac{EA}{L} \left(1 + 2 \frac{\Delta L}{L} + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 + \frac{F}{EA} \right) \Delta L = \mathbf{K}_T \Delta L$$

- ✓ Application numérique : $l=1m$, section $0,001m^2$
- ✓ Initialement : $F=0$, $\Delta L=0 \Rightarrow K_T = 200.00 \times 10^6 N.m^{-1}$
- ✓ Effort imposé : $F = 10\,000kN$

OPTION 1 → increments sur l'effort $\Delta F = 100kN$

$$K_T = \frac{EA}{L} \left(1 + 2 \frac{0}{L} + \left(\frac{0}{L} \right)^2 + \frac{1 \times 10^3}{EA} \right) = 217.94 \times 10^6 N.m^{-1} \Rightarrow \Delta L = \frac{F}{K_T} = 4.58 \times 10^{-6} m$$

nouveau déplacement → nouvelle valeur de la rigidité → etc...

Exemple

OPTION 2 → increments sur les déplacements!

valeurs initiales : $F = 0, \Delta L = 0 \Rightarrow K_T = 200.00 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1}$

increment sur les déplacements : $\Delta L = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$

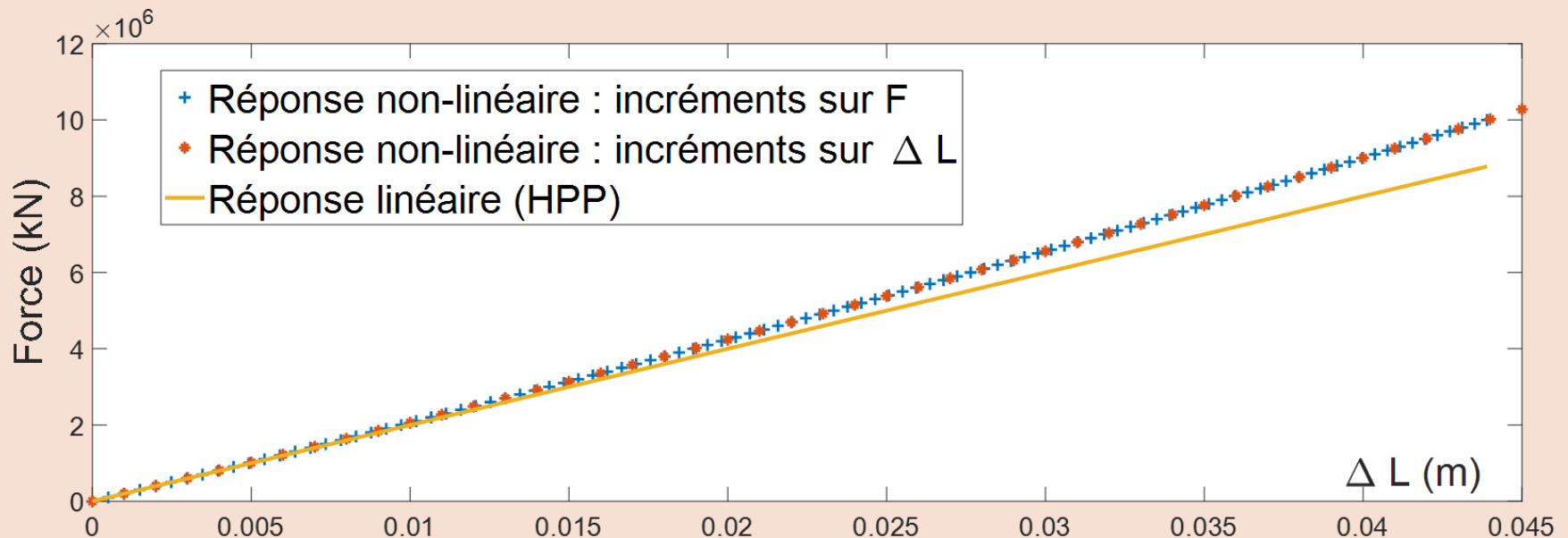
$$K_T = \frac{EA}{L} \left(1 + 2 \frac{1 \times 10^3}{L} + \left(\frac{1 \times 10^3}{L} \right)^2 + \frac{0}{EA} \right) = 200.40 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1} \Rightarrow F = K_T \Delta L = 200.40 \times 10^3 \text{ N}$$

nouvel effort → nouvelle valeur de la rigidité → etc...

✓ Arrêt du calcul lorsque l'effort $F = 10\,000 \text{ kN}$ est atteint !

Exemple

- ✓ Si les increments sont suffisamment petits $\rightarrow$ mêmes valeurs !
- ✓ A comparer avec le cas linéaire : $F = EA\Delta L / L$

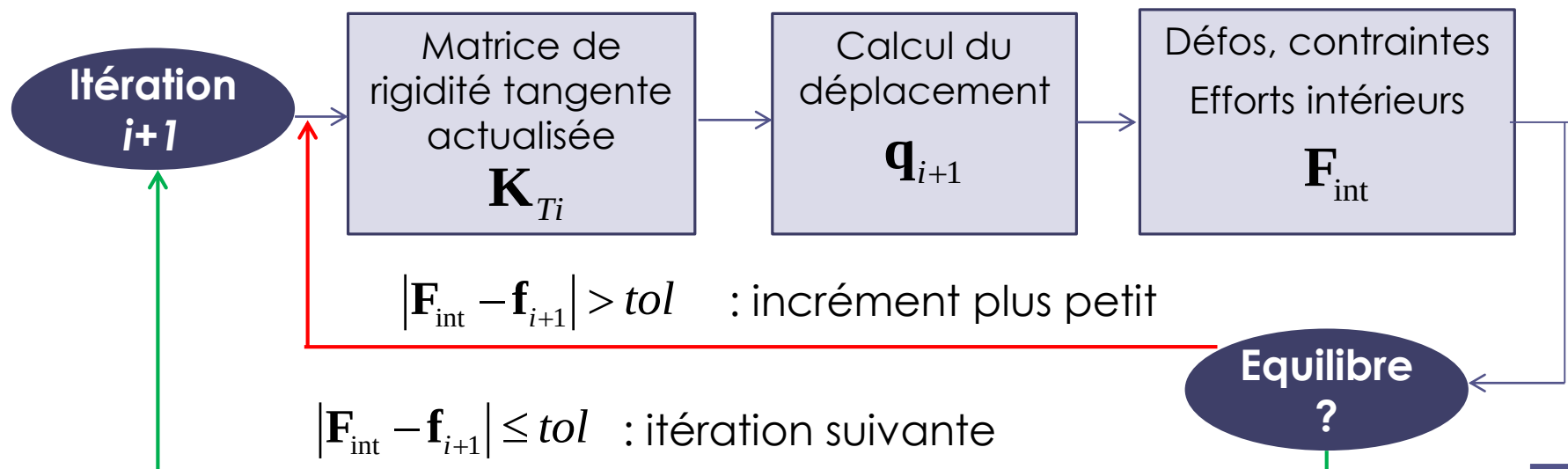


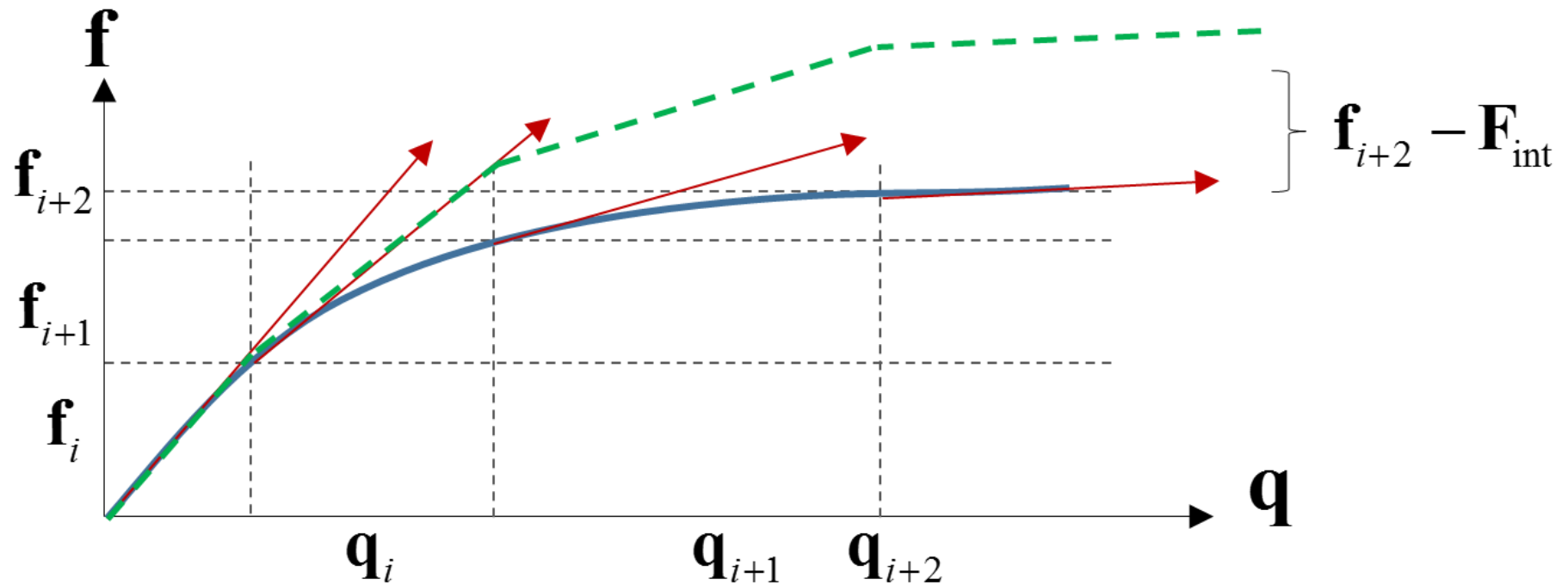
✓ **En pratique :**

- **1** : incrément d'efforts $d\mathbf{f}$ ou incréments du vecteur des ddl $d\mathbf{q}$
- **2** : actualisation de la matrice tangente
- **3** : incrément suivant

Question : Comment gérer la taille de l'incrément ?

✓ Dans la plupart des codes : **méthode de Newton-Raphson**





- ✓ **Jargon** : équilibre = **convergence** du calcul
- ✓ **A définir** :
 - incrément initial
 - taille maximale de l'incrément
 - taille minimale et/ou nombre maximum d'incréments
 - tolérance sur le *résidu*

Utilisateur

Jeu de données

Maillage (géométrie)
Conditions aux limites et
chargements
Comportement du matériau
Paramètres de la résolution

Traitement des résultats

Distribution des contraintes
Distribution des
déformations
Configuration déformée

Machine de
calcul

Configuration de référence

Incrément de chargement

Calcul du champ de
déplacements

Calcul des **déformations**,
efforts extérieurs et
intérieurs

Equilibre?

Actualisation de la
géométrie et des
matrices de rigidité
tangentes

Dernier pas de temps?

Modification de la taille
de l'incrément
(Newton-Raphson)

non

oui

non

oui

- ✓ **En général** : paramètres du calcul incrémental dans « step »

Prise en charge des non-linéarités géométriques : option « NLgeom »

- ✓ **Par défaut**: incrémentation automatique (suffisant pour calculs simples)

plaqueNL Monitor

Job: plaqueNL Status: Aborted

Step	Increment	Att	Severe Discon Iter	Equil Iter	Total Iter	Total Time/Freq	Step Time/LPF	Time/LPF Inc
1	1	1U	0	5	5	0	0	
1	1	2	0	9	9	0.025	0.025	0.025
1	2	1U	0	4	4	0.025	0.025	0.025
1	2	2	0	12	12	0.03125	0.03125	0.00625
1	3	1U	0	5	5	0.03125	0.03125	0.0046875
1	3	2	0	10	10	0.0324219	0.0324219	0.00117188
1	4	1U	0	9	9	0.0324219	0.0324219	0.00117188

Log ! Errors ! Warnings Output Data File Message File Status File

Time increments required is less than the minimum specified

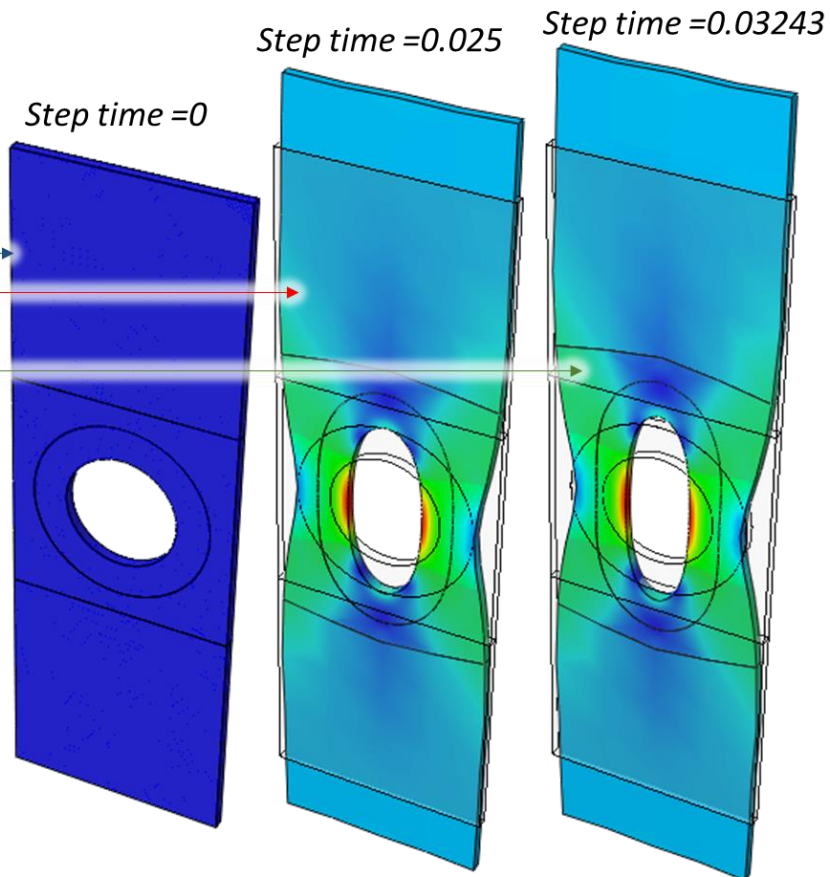
Abaqus/Standard Analysis exited with an error - Please see the message file for possible error messages if the file exists.

Search Text

Text to find: ☐ Match case

Incrément

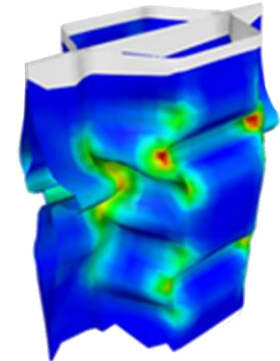
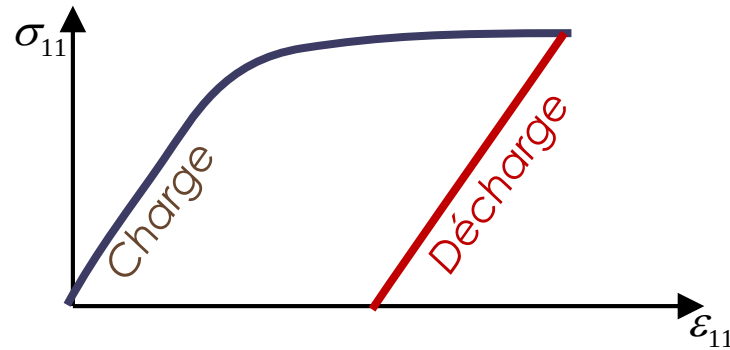
Nombre de
tentatives pour
résoudre l'équilibre
pour cet incrément



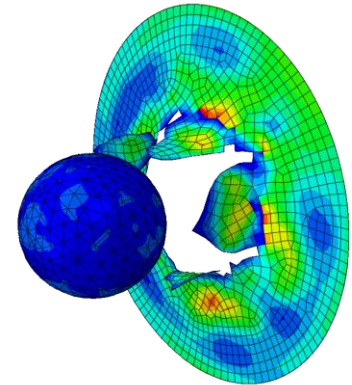
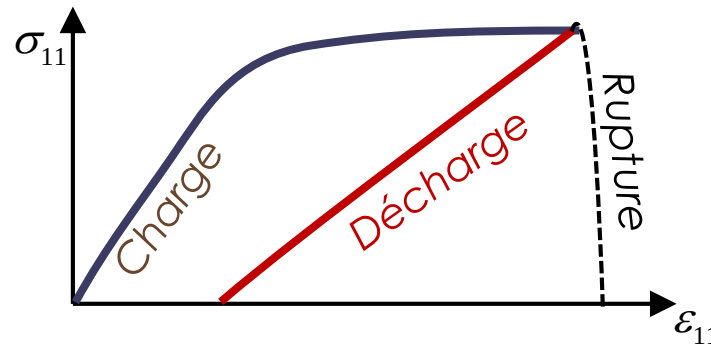
6 : Quelques mots sur les non-linéarités

- Non-linéarités géométriques
- **Non-linéarités matérielles**
- Le traitement du contact

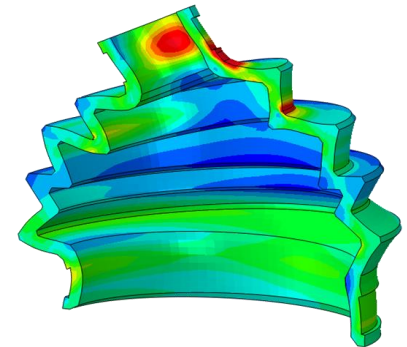
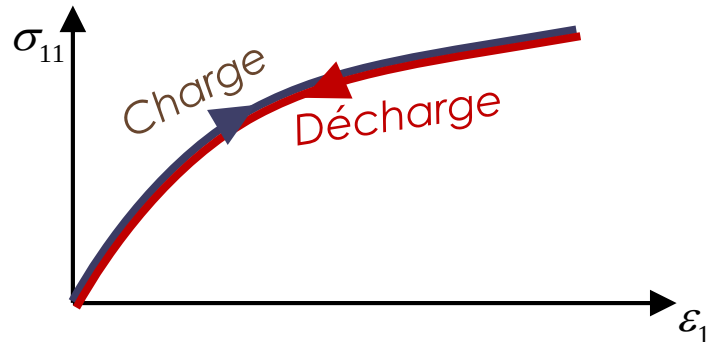
Plasticité



Endommagement et rupture



Hyperélasticité



6 : Quelques mots sur les non-linéarités

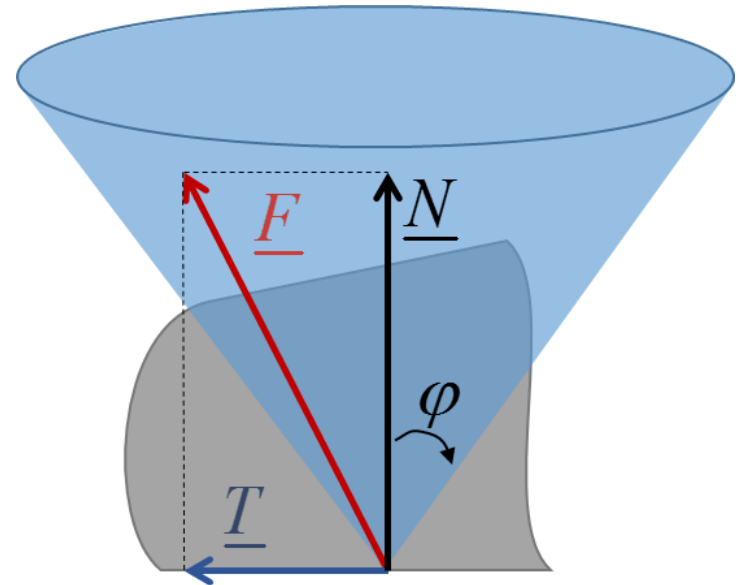
- Non-linéarités géométriques
- Non-linéarités matérielles
- **Le traitement du contact**

- ✓ une pièce exerce un effort sur une autre
- ✓ décomposition : effort **normal** et effort **tangentiel**
- ✓ **introduction du frottement statique :**

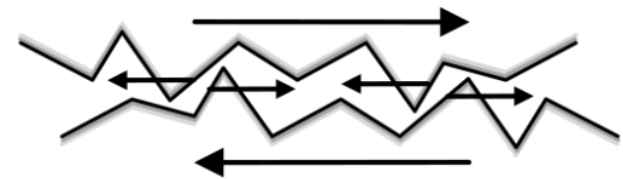
$$\|\underline{T}\| < f \|\underline{N}\| : \text{adhérence}$$

$$\|\underline{T}\| = f \|\underline{N}\| : \text{apparition du glissement}$$

- ✓ frottement statique : $f = \tan \varphi$
avec φ l'angle du cône



- ✓ en réalité : phénomène **très complexe** !!



- ✓ première étape : **détection du contact** ou **appariement**

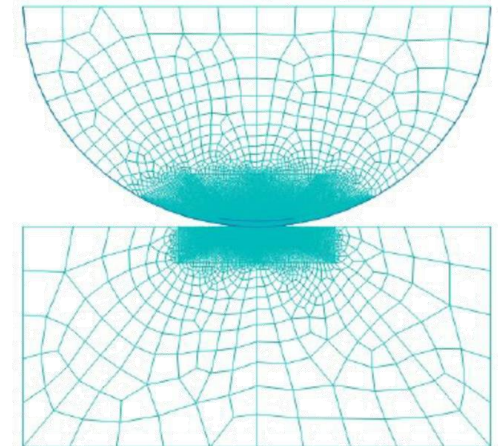
Principe: mesurer la *distance signée* entre deux surfaces

- ✓ **3 cas de figure :**

- 1) distance **positive** = surfaces pas en contact
- 2) distance **nulle** = les surfaces se touchent
- 3) distance **négative** = interpénétration

- ✓ recherche du contact :

surfaces **candidates** définies par l'utilisateur



Problème: connaissance a priori de la configuration déformée !!

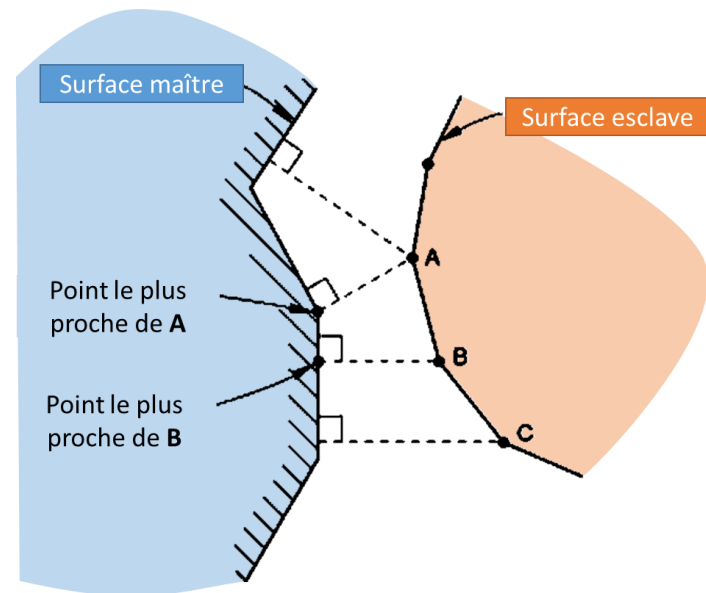
- ✓ liste de surfaces candidates : surfaces maîtres et surfaces esclaves

Faire respecter le contact

=

**empêcher les nœuds
esclaves de pénétrer dans les
surfaces maîtres**

(l'inverse est possible)



- ✓ calcul de la distance signée :

$$g_N = \min \left(\underline{x}^{esclave} - \underline{x}^{maître} \right) \cdot \underline{n}$$

normale sortante à la surface maître

- ✓ **comment choisir** les surfaces maitres et surfaces esclaves ????

Règle 1 :

*Surface beaucoup
plus rigide que l'autre*

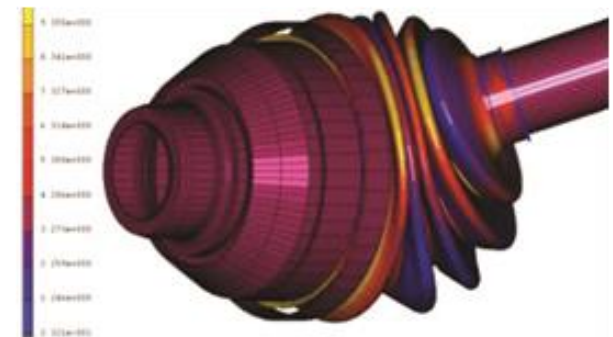
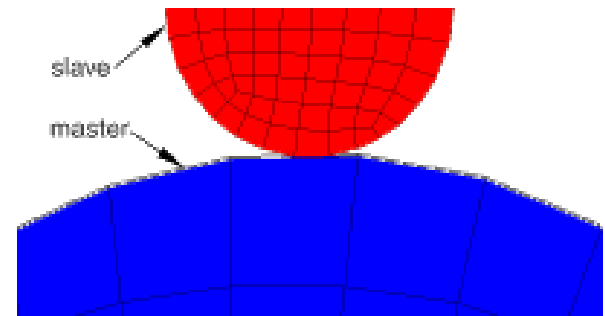
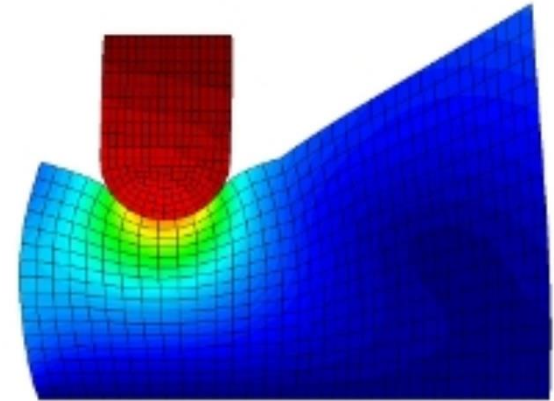
surface
maître

Règle 2 :

*Surface maillée plus
grossièrement que
l'autre*

**Autocontact = surfaces d'un même
objet**

→ pas de maître / esclave



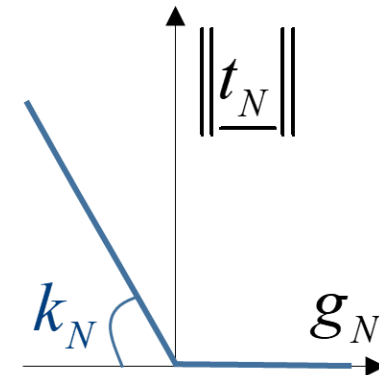
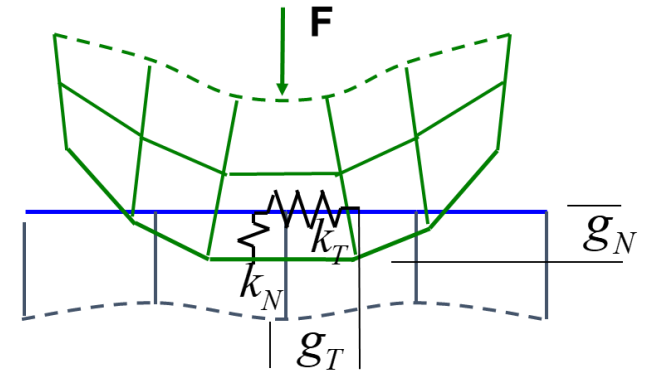
- ✓ **contact** → apparition d'une **densité d'efforts de contacts** $\underline{t}_N$
- ✓ **proportionnelle** à l'interpénétration $g_N < 0$
- ✓ introduction d'un **coefficient de pénalité normal** k_N

$$\|\underline{t}_N\| = -k_N g_N \quad \text{si} \quad g_N < 0$$

$$\|\underline{t}_N\| = 0 \quad \text{si} \quad g_N \geq 0$$

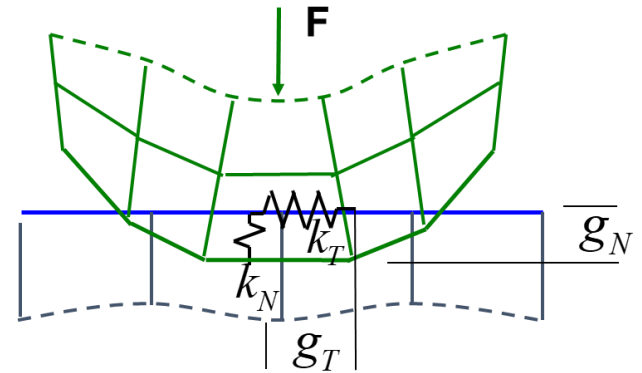
= **méthode des pénalités**

(repousse les surfaces interpénétrées)



- ✓ **modélisation du frottement = loi de Coulomb**
- ✓ introduction d'une mesure de **glissement** (gap tangentiel $\underline{g}_T$)

$$\begin{aligned} \|\underline{t}_T\| < \mu \|\underline{t}_N\| & \text{ alors } \underline{g}_T = 0 \\ \|\underline{t}_T\| \geq \mu \|\underline{t}_N\| & \text{ alors } \underline{g}_T \text{ inconnu} \end{aligned}$$

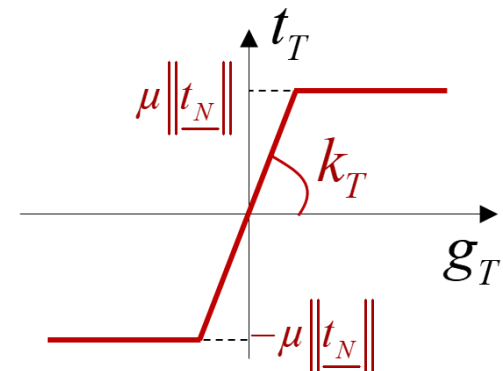


- ✓ **régularisation = second coefficient de pénalité tangent**

$$\underline{t}_T = k_T \underline{g}_T \quad \text{pour} \quad \|\underline{t}_T\| < \mu \|\underline{t}_N\|$$

- ✓ **contact collant :** $\underline{g}_T = 0$

- ✓ **sinon :** glissement calculé à chaque itération



- ✓ l'équilibre se traduit :
- $$\mathcal{W}_{\text{int}}(\underline{u}) + \mathcal{W}_{cf}(\underline{u}) = \mathcal{W}_{\text{ext}}(\underline{u})$$

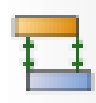
$$\mathcal{W}_{cf}(\underline{u}) = \int_{\Gamma_{cf}} \left(\underline{x}^{esclave} - \underline{x}^{maitre} \right) \cdot \boxed{\underline{t}_{cf}} d\Gamma_{cf}$$

$$\underline{t}_{cf} = \|\underline{t}_N\| \underline{n} + \|\underline{t}_{T_1}\| \underline{\tau}_1 + \|\underline{t}_{T_2}\| \underline{\tau}_2$$

-

✓ Dans Abaqus : module « **interactions** »

✓ Définir une interaction de contact



→ démarche précédente = « **surface-to-surface contact** »

→ sélection des surfaces maître/esclave **ou** autocontact

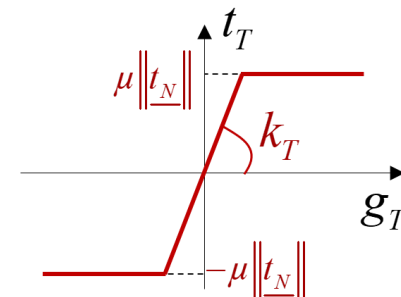
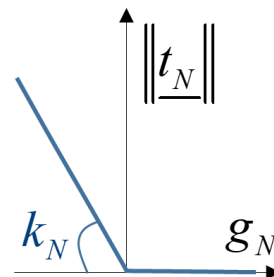
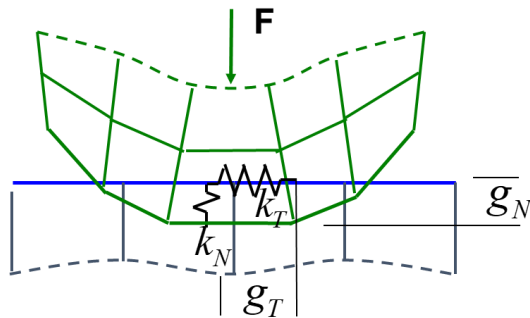
✓ Définir les **propriétés** des interactions



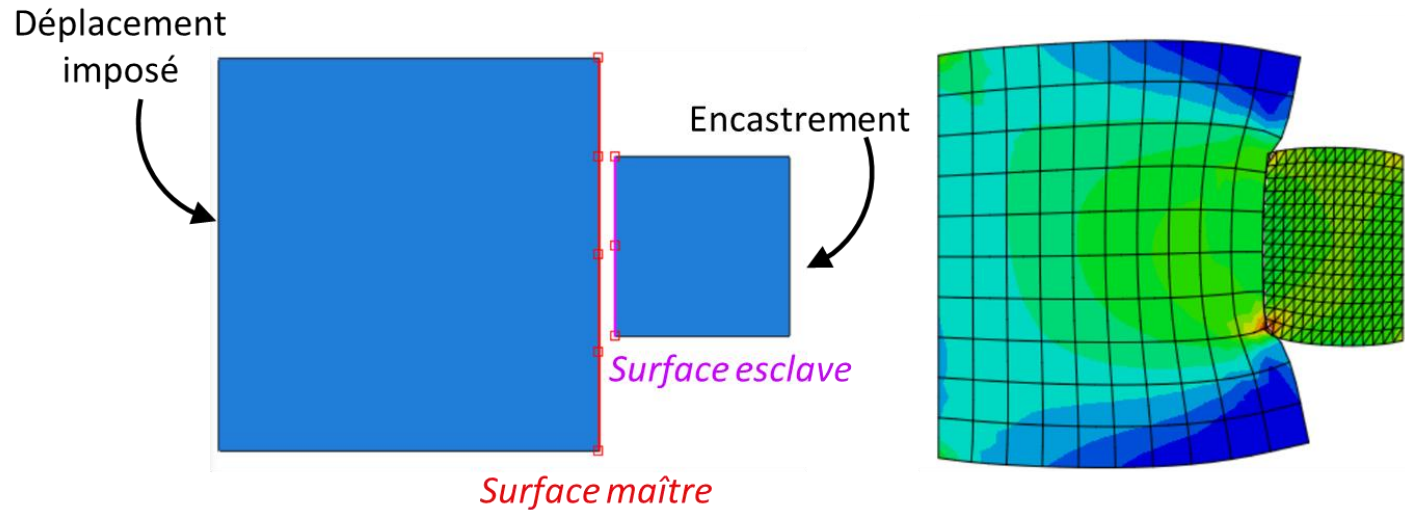
Par défaut : calcul automatique des coefficients de pénalité !

→ définition du coefficient de frottement

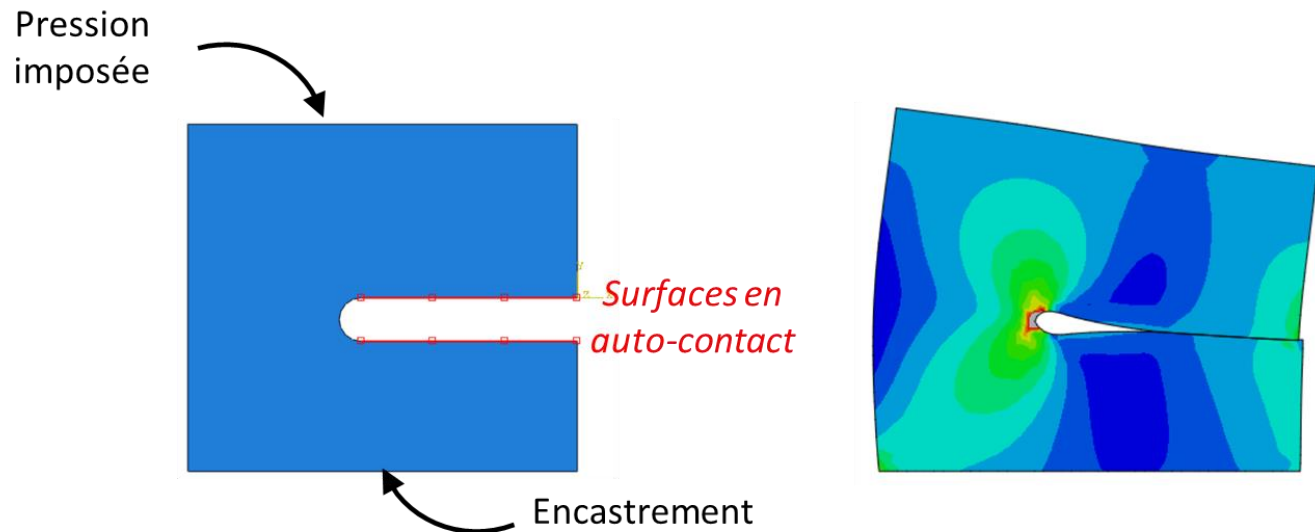
→ comportement normal : « hard contact » = limitation de la pénétration



Contact entre deux objets

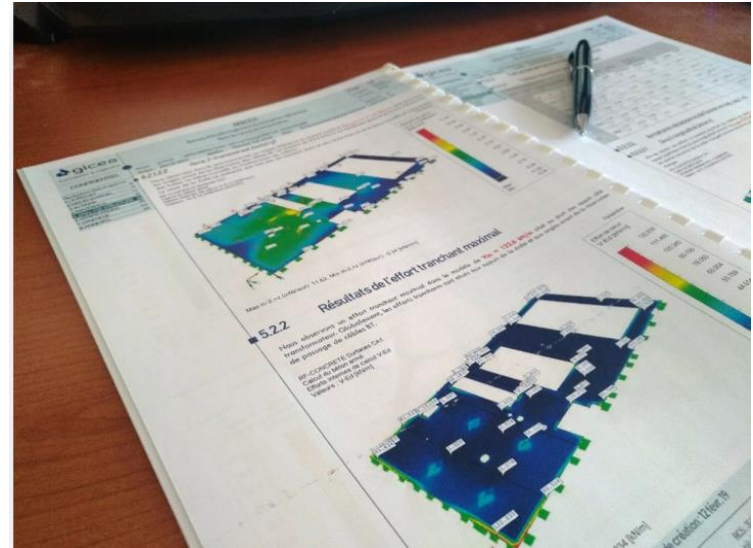


Auto-contact



7 : Conclusion : la note de calcul

- ✓ En pratique : l'ingénieur·e en simulation numérique fournit des **notes de calcul**
- ✓ Doit fournir **toutes** les informations pour effectuer **la même simulation !!**



- ❑ **Géométrie** : dimensionnalité (1D – 2D – 3D), dimensions, simplifications
- ❑ **Matériaux** (loi de comportement), type de modèle (poutre, coques, ...)
- ❑ **Type de calcul** (statique, dynamique, ...) et **paramètres** du calcul
- ❑ **Interactions** entre les différentes parties (contact-frottement)
- ❑ **Maillage** : nombre d'éléments, types d'éléments, méthode d'intégration
- ❑ **Conditions aux limites** et hypothèses de modélisation

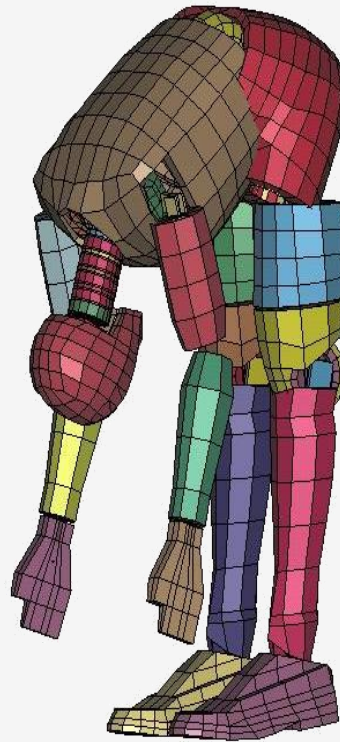


Une figure n'est pas un résultat !!!!

✓ On cherchera plutôt à quantifier les résultats :

- ☐ **évolution des contraintes** dans certaines régions ;
- ☐ **évolution des déformations** dans certaines régions ;
- ☐ **facteur de sécurité** vis-à-vis de l'usage de la structure modélisée ;
- ☐ **comparaisons** avec des données expérimentales, une vérification analytiques des ordres de grandeurs, etc...

A suivre maintenant : 5 séances de TP extraordinaires



LORRAINE
INP Ensem