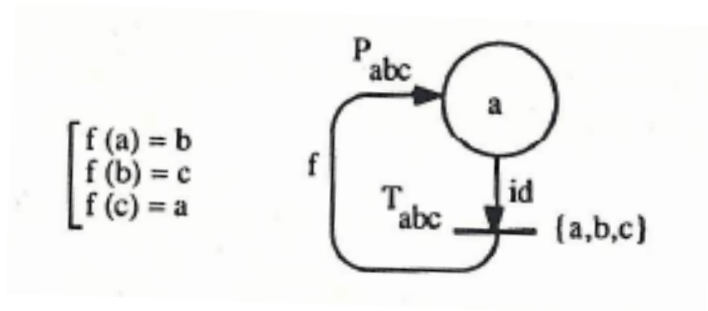
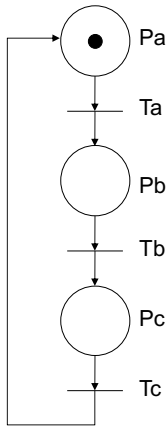


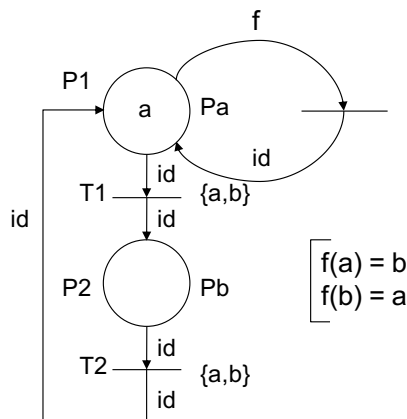
Exercice 1. Pliage

Transformer le RdP ordinaire suivant en RdP coloré avec une seule place et une seule transition.

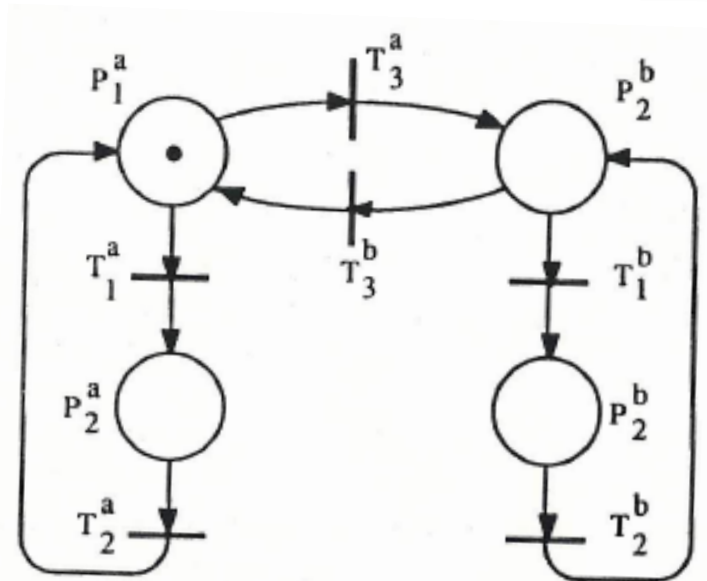


Exercice 2. Dépliage

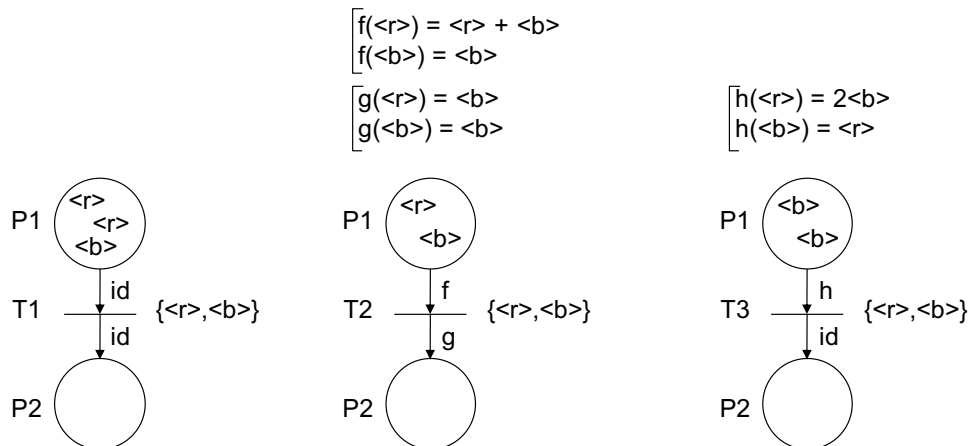
Transformer le RdP coloré suivant en RdP ordinaire.



Corrigé 5.2. Le franchissement de T_3 correspond à transformer une marque de couleur a en une marque de couleur b, et réciproquement, par la fonction f. Ceci est traduit par les deux transitions T_3^a et T_3^b qui font passer de la place P_1^a à la place P_1^b . La boucle $P_1 T_1 P_2 T_2$ ne comporte que des fonctions identité. Elle est dupliquée en $P_1^a T_1^a P_2^a T_2^a$ pour la couleur a et $P_1^b T_1^b P_2^b T_2^b$ pour la couleur b.



Exercice 3. Franchissement de transitions



- Donner les ensembles de couleurs pour lesquelles les transitions T1, T2 et T3 sont franchissables.
- Donner le marquage résultant du franchissement de la transition de chacun de ces réseaux par rapport à la couleur <r>.

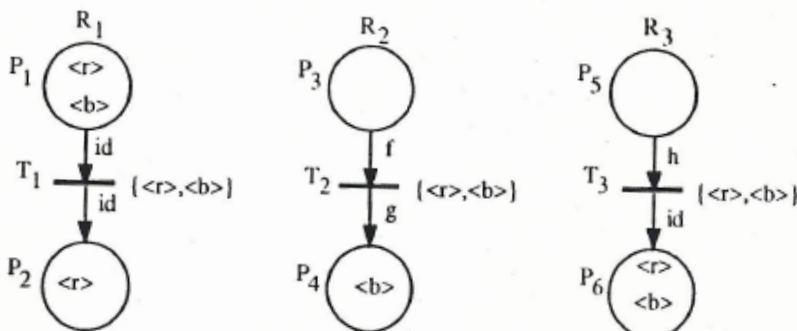
1) Réseau R_1 : la transition T_1 est validée par rapport à la couleur <r> car la place P_1 contient au moins une marque de couleur id (<r>) = <r>. Elle est également franchissable par rapport à la couleur . Donc, T_1 est validée par rapport à toutes les couleurs de $C(T_1) = \{<r>, \}$.

2) Réseau R_2 : la transition T_2 est validée par rapport à la couleur <r> car $f(<r>) = <r> + $ et la place P_2 contient une marque de couleur <r> et une marque de couleur . Elle est également franchissable par rapport à la couleur . Donc, T_2 est validée par rapport à toutes les couleurs de $C(T_2) = \{<r>, \}$.

3) Réseau R_3 : la transition T_3 est validée par rapport à la couleur <r> mais elle n'est pas validée par rapport à car la place P_3 ne contient aucune marque de couleur <r>. Donc, T_3 n'est pas validée pour toutes les couleurs de $C(T_3)$ mais seulement pour le sous-ensemble {<r>}.

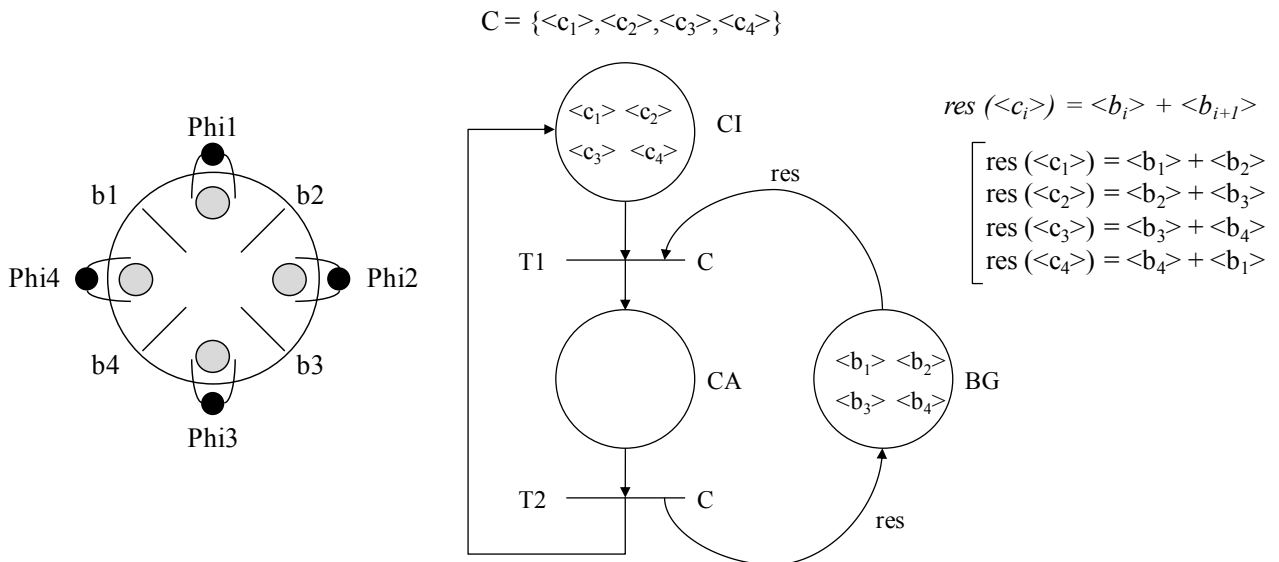
Figure C.3.4.

- Réseau R_1 : $M(P_1) = 2<r> + - id(<r>) = <r> + $
 $M(P_2) = 0 + id(<r>) = <r>$
- Réseau R_2 : $M(P_3) = <r> + - f(<r>) = 0$
 $M(P_4) = 0 + g(<r>) = $
- Réseau R_3 : $M(P_5) = 2 - h(<r>) = 0$
 $M(P_6) = + id(<r>) = + <r>$



Exercice 4. Matrice d'incidence et invariant de marquage

- Montrer que le RdP coloré suivant constitue une modélisation du problème des philosophes.
- Donner la matrice d'incidence du RdP coloré suivant.
- Montrer que les vecteurs $F1^T = (id, id, 0)$ et $F2^T = (0, res, id)$ sont des semi-flots. En déduire deux invariants de marquage.



1) Le RdP coloré de ce système est donné à la figure C.5.9.a. Chaque philosophe peut être dans un des deux états suivants :

au repos (dans la place CI : consommateurs inactifs) ;

en train de manger (dans la place CA : consommateurs actifs)

La place BG représente l'ensemble des ressources disponibles, c'est-à-dire les quatre baguettes représentées par les couleurs $\langle b_i \rangle$. Pour manger, un consommateur c_i a besoin de la baguette qui est à sa droite soit la baguette b_i (figure 2.26) et de la baguette qui est à sa gauche soit la baguette b_{i+1} . Cela entraîne la définition de la fonction *res* utilisée à la prise de ressources et à la restitution de ressources. L'ensemble de couleurs associé aux transitions est l'ensemble des consommateurs, soit $C = \{\langle c_1 \rangle, \langle c_2 \rangle, \langle c_3 \rangle, \langle c_4 \rangle\}$, la couleur c_i étant associée au philosophe ph_i . Par exemple, pour que le consommateur c_2 passe de l'état actif à l'état inactif il faut que la place CI contienne la marque $\langle c_2 \rangle$ et la place BG les marques $\text{Res}(\langle c_2 \rangle) = \langle b_2 \rangle + \langle b_3 \rangle$. On peut alors franchir la transition T_1 par rapport à la couleur $\langle c_2 \rangle$, etc.

La matrice d'incidence est la suivante :

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} T_1 & T_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} CI \\ CA \\ BG \end{matrix} & \begin{bmatrix} -id & id \\ id & -id \\ -res & res \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2) Le système d'équations $F^T \cdot W = 0$ possède deux solutions simples :

$$F_1^T = (id, id, 0) \quad \text{et} \quad F_2^T = (0, res, id)$$

A partir du vecteur F_1 , on obtient l'invariant I_1 qui exprime la conservation de l'ensemble des consommateurs :

$$[id \ id \ 0] \begin{bmatrix} M(CI) \\ M(CA) \\ M(BG) \end{bmatrix} = [id \ id \ 0] \begin{bmatrix} \langle c_1 \rangle + \langle c_2 \rangle + \langle c_3 \rangle + \langle c_4 \rangle \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Invariant I_1 : $M(CI) + M(CA) = \langle c_1 \rangle + \langle c_2 \rangle + \langle c_3 \rangle + \langle c_4 \rangle$

De la même manière, on obtient l'invariant I_2 à partir du vecteur F_2 :

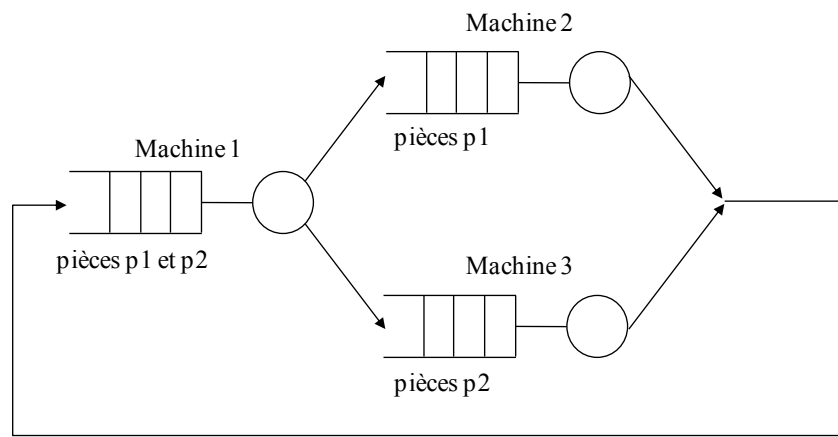
Invariant I_2 : $res[M(CA)] + M(BG) = \langle b_1 \rangle + \langle b_2 \rangle + \langle b_3 \rangle + \langle b_4 \rangle$

En observant le deuxième invariant, on peut constater que 2 consommateurs voisins ne peuvent pas manger en même temps. En effet, supposons par exemple que le marquage $M(CA) = \langle c_2 \rangle + \langle c_3 \rangle$

Alors $res[M(CA)] = res(\langle c_2 \rangle) + res(\langle c_3 \rangle) = \langle b_2 \rangle + \langle b_3 \rangle + \langle b_3 \rangle + \langle b_4 \rangle$

Exercice 5. Modélisation

On considère un système de production composé de 3 machines, chaque machine ayant un stock d'entrée. Ce système produit deux types de pièces : p1 et p2. La gamme de fabrication d'une pièce p1 correspond au passage sur la machine 1 puis sur la machine 2. La gamme de fabrication d'une pièce p2 correspond au passage sur la machine 1 puis sur la machine 3. La machine 1 étant une ressource partagée, on impose un ordonnancement alterné sur cette machine : pièce p1 puis pièce p2 puis pièce 1 ... Les pièces sont portées par des palettes recyclées à chaque fin de cycle. On dispose de n palettes pour les pièces p1 et n palettes pour les pièces p2.



- En associant les couleurs aux pièces (c_1 , c_2) et aux machines (m_1 , m_2), définissez l'ensemble des couleurs complexes de la forme $\langle c_i, m_i \rangle$ admissible pour décrire ce système.
- En se basant sur cet ensemble de couleurs, proposez un RdP coloré qui décrit le fonctionnement du système. Vous définirez pour cela, deux fonctions gamme et ordo.

Corrigé 5.6. Dans le RdP coloré de la figure C.5.6, on distingue 3 parties, chacune représentant une machine. L'ensemble de couleurs associé à la machine 1 est l'ensemble $\langle c_1, c_2 \rangle$ car les deux pièces de type p_1 et p_2 passent par la machine 1. En revanche, à la machine 2 est associé l'ensemble $\{c_1\}$ (seule la pièce de type p_1 passe par la machine 2) et à la machine 3 est associé l'ensemble $\{c_2\}$ (seule la pièce de type p_2 passe par la machine 3). La structure graphique du modèle est relative à la gamme de fabrication alors que l'ordonnancement sur la machine 1 est réalisé par la fonction succ. Il n'y a pas d'ordonnancement sur les machines 2 et 3 car il n'y passe qu'un seul type de pièces par machine.

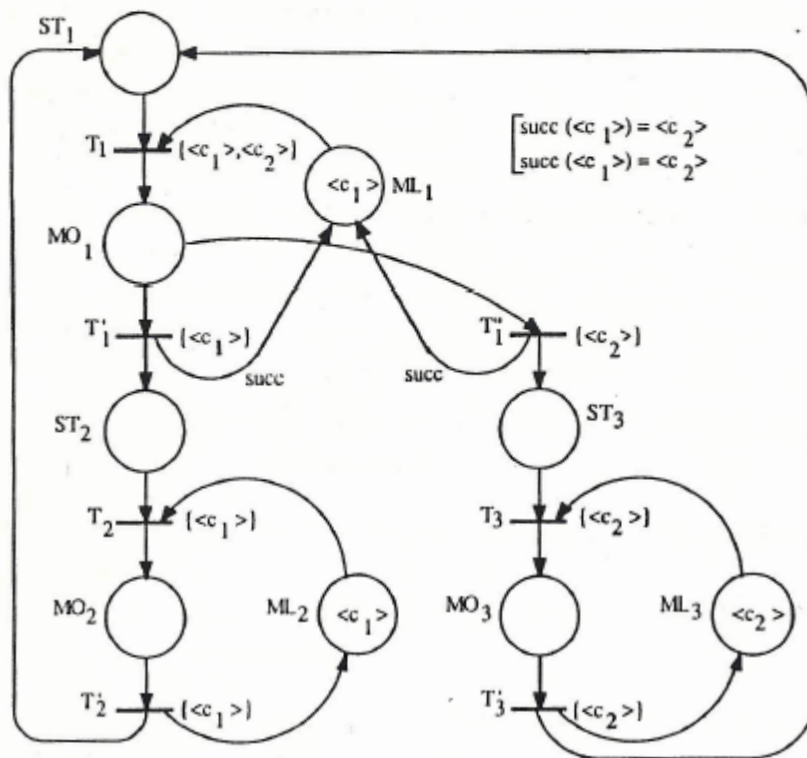
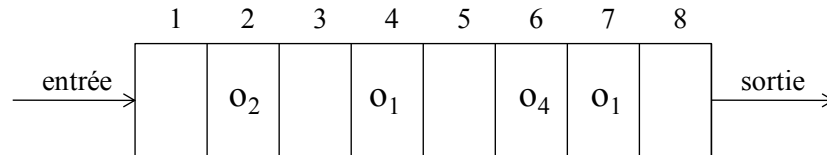


Figure C.5.6.

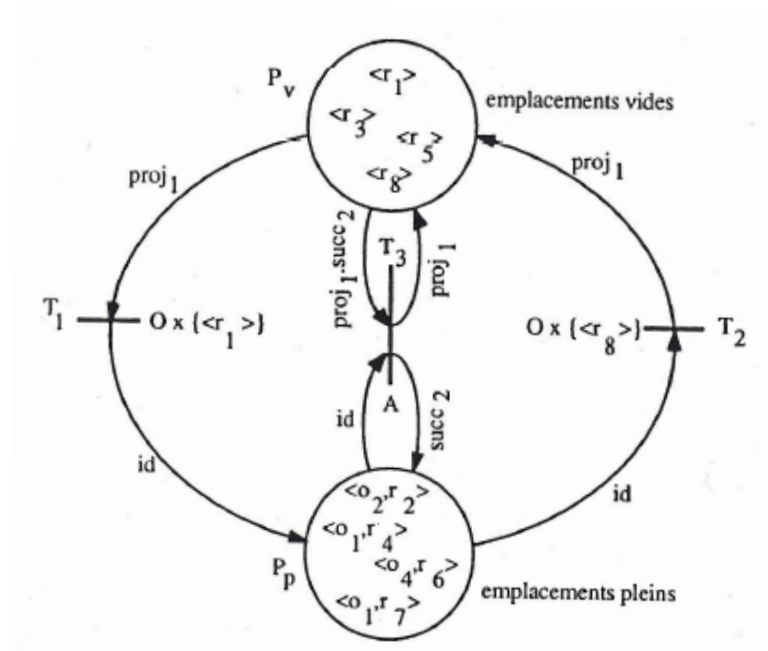
Exercice 6. Modélisation

Un convoyeur linéaire peut transporter simultanément q types d'objets appelés $o_1, o_2, \dots, o_q$, le nombre maximum d'objets transportés simultanément étant n (n correspond aux nombres d'emplacements sur le convoyeur). On suppose que l'on dispose d'un convoyeur à 8 emplacements ($n=8$) dont l'état initial est donné par la figure suivante.



- En se basant sur des couleurs complexes associées à l'ensemble des emplacements du convoyeur $R=\{\langle r_i \rangle, 1 \leq i \leq 8\}$ et à l'ensemble des objets $O=\{\langle o_j \rangle, 1 \leq j \leq q\}$, proposez un RdP coloré qui donne à tout instant l'état du convoyeur (position et nature des objets transportés).
- Quel serait le marquage initial signifiant que le système de transport est vide ?
- Donner la matrice d'incidence du RdP coloré obtenu.

$$A = O \times \{r_1 \dots r_{n-1}\}$$



Le marquage indiqué sur le figure 5.16 correspond à l'état indiqué sur la figure 5.15. A partir de ce marquage la transition d'entrée T_1 du système de transport est franchissable par rapport à la couleur $\langle o_j, r_1 \rangle$ quel que soit l'indice j car la place P_v contient la marque $\text{proj}_1 (\langle o_j, r_1 \rangle) = \langle r_1 \rangle$, c'est-à-dire que l'emplacement 1 du système est vide. Le franchissement de T_1 dépose une marque de couleur $\langle o_j, r_1 \rangle$ dans la place P_p et retire une marque $\langle r_1 \rangle$ de la place P_v ; l'emplacement 1 du système contient maintenant un objet j . Cet objet sera transféré d'un emplacement à un autre par le franchissement de la transition T_3 . Pour le marquage de la figure 5.16, la place P_p contient une marque $\langle o_2, r_2 \rangle$, la transition T_3 peut être franchie par rapport à cette couleur si la place P_v contient une marque de couleur $\text{proj}_1 . \text{succ}_2 (\langle o_2, r_2 \rangle) = \langle r_3 \rangle$, ce qui signifie que l'emplacement 3 doit être vide (ce qui est le cas dans l'exemple). Le franchissement de T_3 dépose une marque de couleur $\text{proj}_1 (\langle o_2, r_2 \rangle) = \langle r_2 \rangle$ dans la place P_v (l'emplacement 2 est libéré) et une marque $\text{succ}_2 (\langle o_2, r_2 \rangle) = \langle o_2, r_3 \rangle$ dans la place P_p (l'emplacement 3 est occupé par un objet o_2). Ce transfert va se poursuivre tant qu'il y a de la place dans la file jusqu'à ce que l'objet arrive dans l'emplacement n . Il est alors évacué du système par le franchissement de la transition de sortie T_2 . Ce système modélisé par un RdP non coloré nécessiterait $(q + 1)n$ places et $q(n + 1)$ transitions. Le modèle obtenu est, dans sa structure, indépendant de la longueur du convoyeur et de la nature des objets qu'il transporte.

b)

$$M_0(P_p) = 0 \text{ et } M_0(P_v) = \sum_{i=1}^n \langle r_i \rangle$$

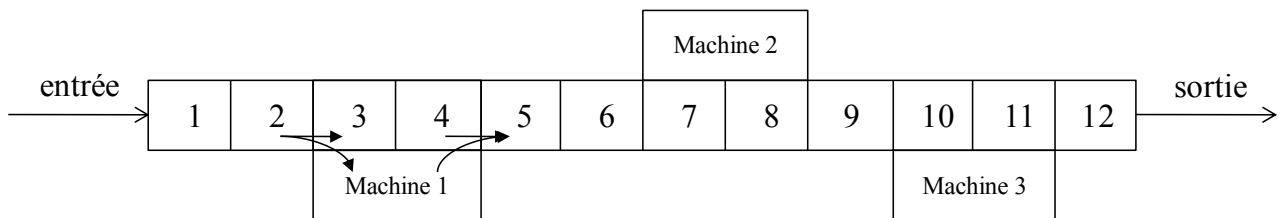
c)

$$\begin{array}{c} P_p \\ P_v \end{array} \left[\begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & T_3 \\ \text{id} & - \text{id} & \text{succ}_2 - \text{id} \\ - \text{proj}_1 & \text{proj}_1 & \text{proj}_1 (\text{id} - \text{succ}_2) \end{array} \right]$$

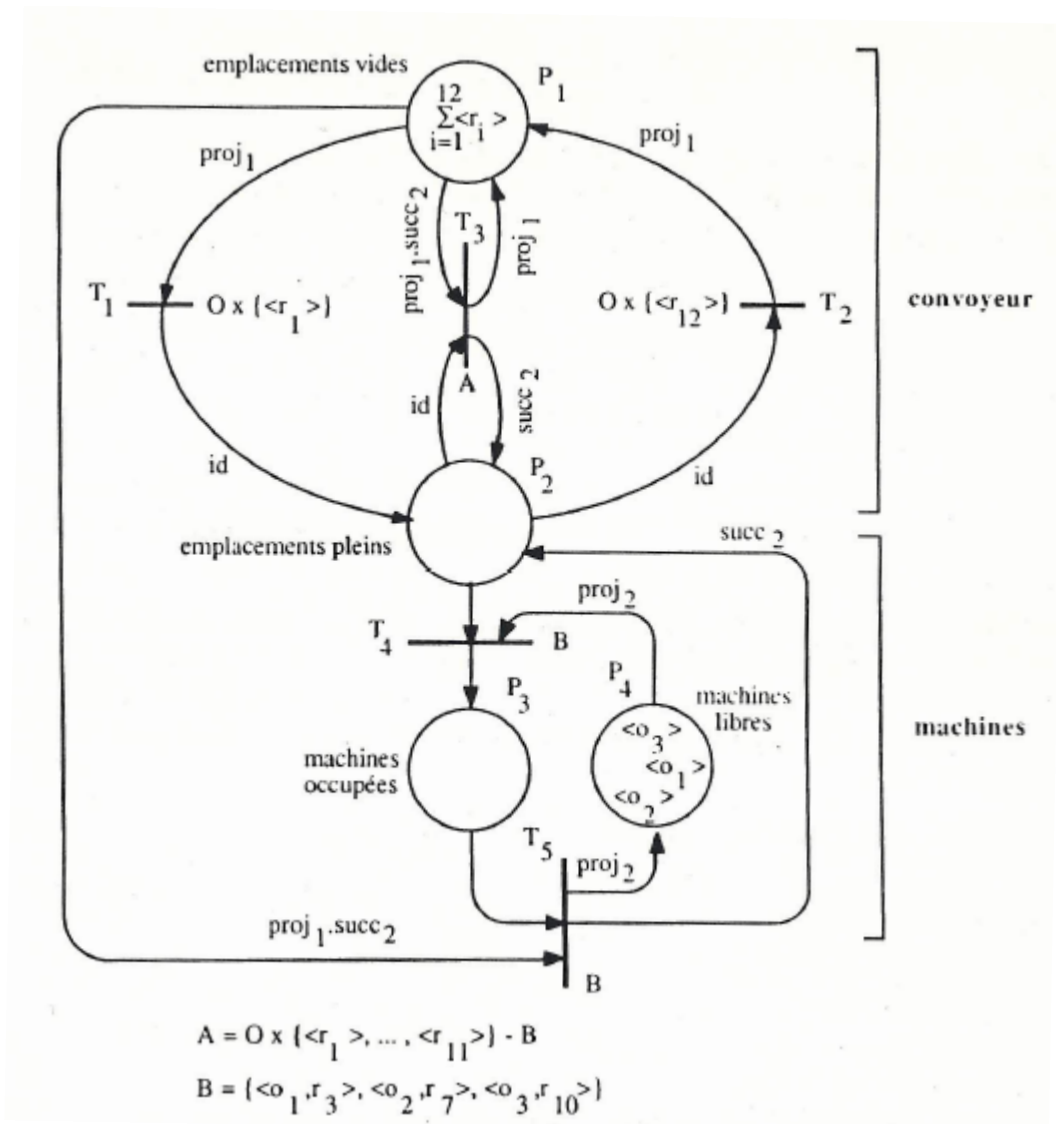
Exercice 7. Modélisation

On considère maintenant un système de production composé de 3 machines desservies par un convoyeur linéaire du type de celui modélisé dans l'exercice précédent. Trois types de pièces différentes sont produites, chacun sur une machine distincte (pièce 1 produite sur machine 1, pièce 2 produite sur machine 2, pièce 3 produite sur machine 3). Cette numérotation permettra de donner aux machines et aux pièces le même identificateur. On suppose que les pièces arrivent dans un ordre quelconque à des instants quelconques.

Le convoyeur présente 12 emplacements ($n=12$). Les entrées des machines 1, 2 et 3 sont respectivement situées aux emplacements 3, 7 et 10. Les sorties des machines 1, 2 et 3 sont situées aux emplacements 4, 8 et 11. Lorsqu'une palette arrive à l'emplacement d'entrée d'une machine, la palette sera chargée sur la machine en libérant l'emplacement d'entrée sur le convoyeur si la machine est libre. Dans le cas contraire, la palette attend la libération de la machine sur l'emplacement d'entrée et bloquer ainsi le passage sur le convoyeur. La libération de la machine consiste à transférer la palette sur l'emplacement de sortie de la machine si celui-ci est libre.

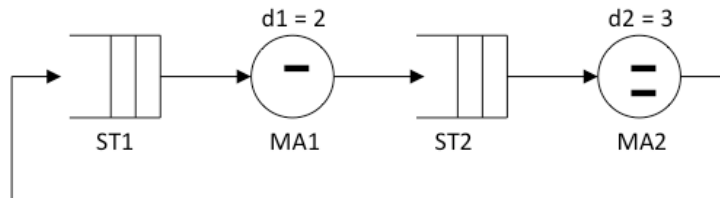


- a) en se basant sur le modèle de convoyeur linéaire proposé à l'exercice précédent, proposez un RdP coloré décrivant le fonctionnement de cette unité de production
- b) donner la matrice d'incidence du RdP coloré obtenu.



Exercice 4. Modélisation en RdP temporisés

On considère qu'il y a deux palettes (portant chacune une pièce) qui passent successivement sur les machines MA1 et MA2. La machine MA1 ne peut traiter qu'une pièce à la fois et son temps de service est de $d_1=2$. La machine MA2 peut traiter deux pièces simultanément, el temps de service pour une pièce est de $d_2=3$. En amont de chaque machine se trouve un stock, respectivement ST1 et ST2.



- Représenter le fonctionnement de ce système par un RdP P-temporisé. L'état initial est tel que les deux palettes sont dans le stock ST1.
- Représenter le graphe des marquages du fonctionnement à vitesse maximale en indiquant les indisponibilités résiduelles pour chaque marquage.

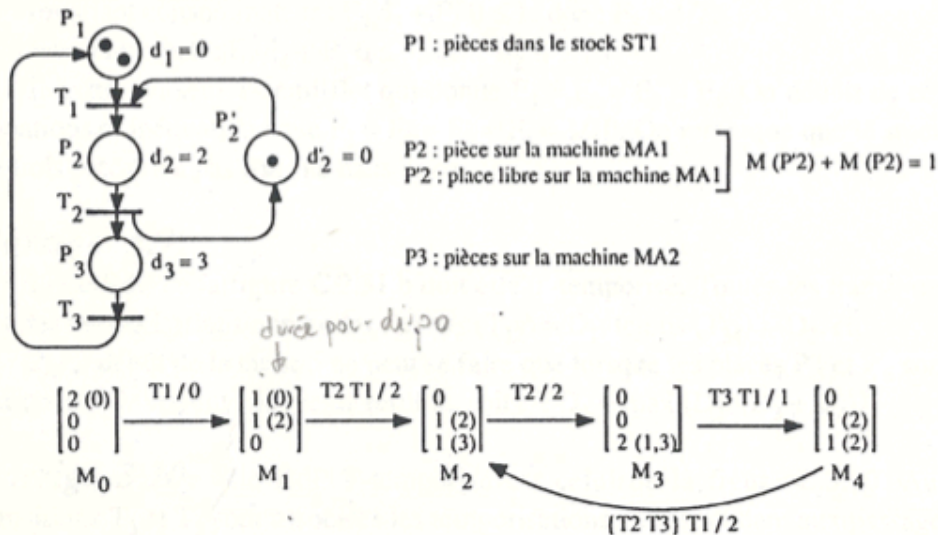
Corrigé 3.5.

1) Comme il n'y a que deux pièces et que la machine MA₂ peut les servir en même temps il n'y a jamais de pièces en attente dans le stock ST₂. On n'a pas besoin d'associer une place au stock ST₂. Les places P₁, P₂ et P₃ correspondent aux pièces dans le stock ST₁, sur la machine MA₁ et sur la machine MA₂, respectivement comme l'indique la figure C.3.5. Une place P'₂ complémentaire de P₂ assure qu'il y a une seule pièce sur la machine MA₁. Les temporisations $d_2 = D_1 = 2$ et $d_3 = D_2 = 3$ sont associées aux places P₂ et P₃. Les autres places ont une temporisation nulle.

2) On ne représente que le marquage $(M(P_1), M(P_2), M(P_3))$, celui de la place P'₂ étant implicite puisque $M(P_2) + M(P'_2) = 1$. L'état initial est M₀ (voir

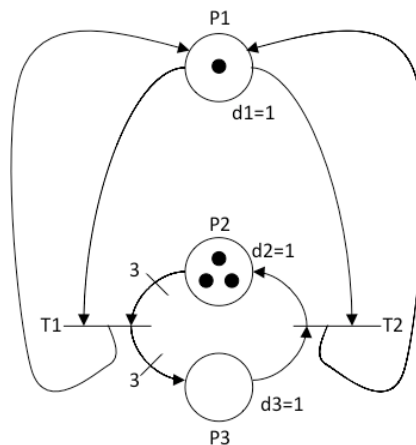
figure C.3.5). Pour M₀, T₁ est franchissable, mais une seule fois. On atteint le marquage M₁. Deux unités de temps plus tard on franchit T₂, et la transition T₁ qui redevient validée est également franchie. On atteint M₂. Deux unités de temps plus tard, T₂ est à nouveau franchie. On atteint le marquage M₃. Une unité plus tard la première marque arrivée dans P₃ devient disponible et l'on franchit T₃. Comme T₁ est immédiatement franchissable, on atteint M₄. Deux unités de temps plus tard, les transitions T₂ et T₃ deviennent simultanément validées. On les franchit dans un ordre quelconque, puis la transition T₁ est immédiatement franchissable et l'on revient au marquage M₂.

Le régime stationnaire correspond donc au fonctionnement périodique $M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow M_4 \rightarrow M_2$ dont la durée de cycle est 5 unités.



Exercice 5. Fréquence de franchissement

Calculer les fréquences de franchissement des transitions du RdP généralisé P-temporisé suivant, à vitesse maximale.



Corrigé 3.7.

Il y a deux invariants qui sont $M(P_1) = 1$ et $M(P_2) + M(P_3) = 3$. On en déduit les inéquations :

$$(F_1 + F_2) d_1 \leq 1 \quad (3.7.1)$$

$$F_2 d_2 + 3 F_1 d_3 \leq 3 \quad (3.7.2)$$

Le coefficient 3 dans le terme $3 F_1 d_3$ correspond au fait qu'un seul franchissement de F_1 met 3 marques dans la place P_3 (poids de l'arc $T_1 \rightarrow P_3$).

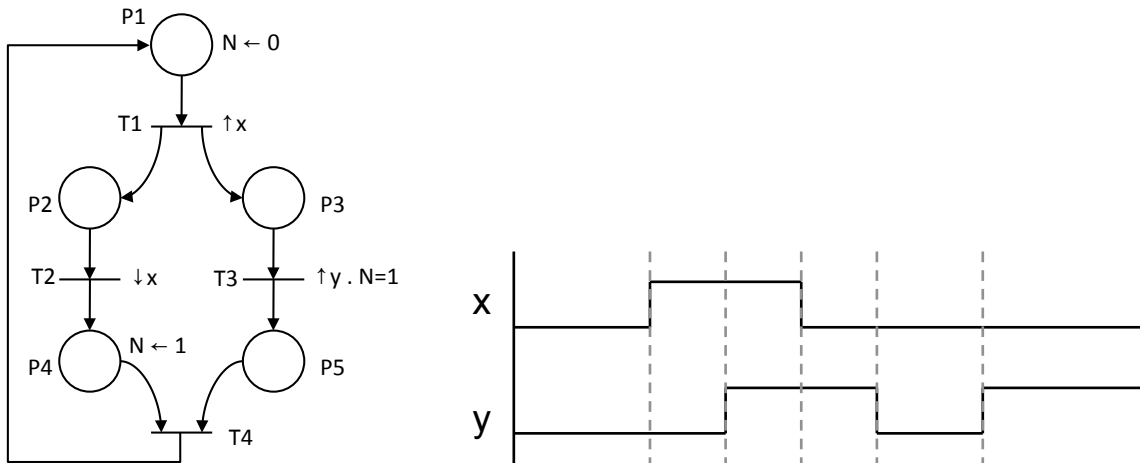
Il y a un T-semi-flot correspondant à une séquence répétitive minimale qui est $T_1 T_2 T_2 T_2$. On en déduit :

$$F_2 = 3 F_1 \quad (3.7.3)$$

Sachant que $d_1 = d_2 = d_3 = 1$, on déduit de 3.7.1 et 3.7.3 que $F_1 \leq 1/4$, et l'on déduit de 3.7.2 et 3.7.3 que $F_1 \leq 1/2$. Donc $F_1 = \min(1/4, 1/2)$, soit $F_1 = 1/4$ et $F_2 = 3/4$.

Exercice 6. Réseaux de Petri Interprétés

Déterminer l'évolution du réseau de Petri Interprété suivant, à partir du marquage initial et pour le chronogramme des entrées x et y suivant.



Corrigé 3.13. Les marquages stables et les états de la variable N sont indiqués sur la figure C.3.13.

