

Analyse
Master 1 de Mathématiques 2021-2022
Université de Lorraine

Frédéric Robert

UNIVERSITÉ DE LORRAINE, CNRS, IECL, F-54000 NANCY, FRANCE
E-mail address: frederic.robert@univ-lorraine.fr

RÉSUMÉ. **Objectif :** Maîtriser les outils d'analyse de base pour une utilisation professionnelle des mathématiques.

Ce cours d'"Analyse" est destiné aux étudiants de M1 Mathématiques, qu'ils/elles se destinent à l'agrégation ou la recherche bien entendu, mais aussi à une carrière plus appliquée. Quel que soit le choix professionnel, la maîtrise avec rigueur des outils d'analyse est indispensable.

Prérequis : Topologie (surtout sur les espaces métriques), Topologie des espaces vectoriels normés, projection sur un convexe fermé dans les espaces de Hilbert, Calcul Différentiel, Intégration. Des rappels seront donnés dans ces notes.

Prologue : Pourquoi ce cours d'Analyse ?

Que vous vous destiniez à "faire des mathématiques" dans l'enseignement secondaire, dans le milieu académique classique ou bien dans l'industrie, la finance, les assurances, il est indispensable d'avoir d'excellentes bases mathématiques, en particulier en Analyse.

Au-delà du talent et du savoir-faire dans la résolution des exercices et problèmes, on attendra de vous d'avoir de la méthode et de la rigueur. Par exemple, un théorème a des hypothèses, et il est évident qu'il faut les vérifier avant d'appliquer le-dit théorème. Dans un exercice, si vous n'avez pas vérifié les hypothèses, c'est dommage, ce sera faux... mais c'est tout. Si vous utilisez un super-calculateur couplé à un super-logiciel et que vous n'avez pas pris le soin de contrôler si vous les utilisiez dans le bon cadre, les conséquences peuvent être un peu plus sérieuses...

Dans ce cours, nous partirons de structures très générales, puis nous nous spécialiserons avec des méthodes de plus en plus pointues. Le fil rouge de ces méthodes sera la résolution d'équations différentielles ordinaires (EDO), à savoir des équations différentielles en une seule variable. Chaque partie sera illustrée par une application dans ce domaine.

Ces notes sont organisées de la façon suivante :

La **Partie 1** est à la fois une révision et un approfondissement des notions de topologie métrique ou générale. Cette partie est aussi l'occasion de revoir diverses méthodes de raisonnements mathématiques. On s'attardera largement sur la notion de complétude et diverses applications, dont une première façon de résoudre des EDOs avec conditions initiales (Théorie de Cauchy-Lipschitz).

Dans la **Partie 2**, on ajoutera de la structure en se concentrant sur les espaces vectoriels normés. Nous parlerons beaucoup d'applications linéaires continues : ce sera donc un mélange entre l'algèbre linéaire et la topologie, le lien étant fait par les normes. Nous verrons alors la méthode de continuité qui permettra de préserver la bijectivité de certaines applications, et du coup de résoudre "continuellement" divers problèmes. Comme applications, on parviendra à résoudre des EDOs avec données au bord (problèmes de type Dirichlet).

Dans la **Partie 3**, nous irons plus loin en imposant en plus une structure Hilbertienne. Au-delà du théorème de projection sur les convexes (qui sera brièvement rappelé), cette structure nous permettra d'avoir des théorèmes très généraux de résolutions d'équations (Stampacchia et Lax-Milgram). Nous verrons aussi une nouvelle topologie dite "faible" qui permettra d'obtenir une propriété de type "Bolzano-Weierstrass", et de résoudre des problèmes de minimisation. Enfin, Nous introduirons la transformée de Fourier qui permettra de changer la nature des certaines

EDOs en leur donnant (parfois partiellement) une forme polynomiale, ce qui sera très utile sur un groupe topologique comme $\mathbb{R}$.

Dans la **Partie 4**, enfin, nous étudierons les espaces de Sobolev et les distributions en dimension 1 afin de résoudre quelques EDOs. Ce ne sera qu'une modeste introduction à des méthodes qui viennent des équations aux dérivées partielles (ou EDP, à plusieurs variables, donc).

Les références principales de ces notes sont les ouvrages de Brezis [1], Dixmier [2] and Rudin [6]. D'excellentes références pour le cours de Licence sont les ouvrages d'Azoulay-Avignan et Auliac.

Table des matières

Prologue : Pourquoi ce cours d'Analyse ?	3
partie 1. Structure d'espace métrique et topologie générale	7
Chapitre 1. Espaces métriques	9
1. Définitions	9
2. Voisinages, ouverts, fermés	10
3. Intérieur et adhérence	14
4. Fonctions continues	16
5. Compacité	17
Chapitre 2. Topologie générale	21
1. Définition et premières notions associées	21
2. Construction de nouvelles topologies	21
3. Suites et fonctions	22
4. Espaces compacts	23
Chapitre 3. Espaces complets	25
1. Complétude (panorama rapide)	25
2. Énoncé et preuve du théorème du point fixe	26
3. Applications	27
4. Lemme de Baire et premières applications	29
partie 2. Structure d'espace vectoriel normé	33
Chapitre 4. Applications linéaires continues	35
1. Applications (multi)linéaires : exemples	35
2. Espaces de Banach et $Gl_c(E)$	38
3. Apparté : construction et propriétés de l'exponentielle	40
Chapitre 5. Quelques conséquences du Lemme de Baire	43
1. Application 1 : Théorème de Banach-Steinhaus	43
2. Application 2 : Le Théorème de l'Application Ouverte	44
3. Application 3 : Le Théorème du Graphe Fermé	45
Chapitre 6. La méthode de continuité	47
1. Théorème principal et description de la méthode	47
2. Application à un problème de type Dirichlet	48
3. Quelques remarques	49
partie 3. Structure Hilbertienne	51

Chapitre 7. Espaces de Hilbert	53
1. Panorama succinct de définitions et résultats classiques	53
2. Le théorème de projection et conséquences	56
3. Compacité faible de la boule unité	59
partie 4. La transformée de Fourier	65
Chapitre 8. La transformée de Fourier L^1 –Fourier	67
1. C’est quoi ? Ça sert à quoi ?	67
2. Définition et quelques propriétés classiques	68
3. Dérivation	72
Chapitre 9. La formule d’inversion et application à quelques EDOs	77
1. Le théorème d’inversion	77
2. Preuve du théorème d’inversion	77
3. Application à la résolution de quelques EDOs	78
4. Application à l’équation de la chaleur	81
5. Application à l’équation des ondes	85
Chapitre 10. La transformée de Fourier L^2	87
1. Énoncés et exemples	87
Appendix : definitions, notations, index	91
2. Topologie	92
3. Calcul Différentiel	92
4. Théorème de Cauchy-Lipschitz et conséquences	92
5. Integrales dépendant d’un paramètre	93
6. Divers	93
Bibliographie	95

Première partie

Structure d'espace métrique et
topologie générale

Espaces métriques

Ce chapitre a bien entendu pour objectif de rappeler des définitions et résultats sur les espaces métriques, mais aussi de revoir des types de preuve.

1. Définitions

1.1. Distance et espace métrique.

Definition 1 (Espace métrique). *Soit X un ensemble. Une distance sur X est une fonction $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

- **Positivité** $d(x, y) \geq 0$ pour tous $x, y \in X$, et $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$
- **Symétrie** $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in X$
- **Inégalité triangulaire** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tous $x, y, z \in X$.

On dit alors que (X, d) est un espace métrique

1.2. Exemples classiques.

- Sur $\mathbb{R}$, on prend $d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. C'est bien une distance.
- Plus généralement, si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé (evn), $d_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d_E(x, y) := \|x - y\|_E$ pour $x, y \in E$ est une distance.

1.3. Quelques exemples un peu moins évidents, voire des pièges.

- Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $d(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. C'est aussi une distance sur $\mathbb{R}$.
- On se donne X, Y deux ensembles et d_Y une métrique sur Y . On se donne $\varphi : X \rightarrow Y$ une injection et pour $x, y \in X$, on définit $d_{\varphi}(x, y) = d_Y(\varphi(x), \varphi(y))$. Alors d_{φ} est une distance sur X . Par exemple, pour $x, y \in \mathbb{R}$, on définit $d(x, y) := |\arctan x - \arctan y|$, et c'est bien une distance sur $\mathbb{R}$.
- La distance "à vol d'oiseau", qui marche bien pour les avions et les bateaux tant qu'il n'y a pas trop de vent...
- Le "temps de parcours", ou la "distance par la route" ne sont pas des distances en général!!! Il manque la symétrie. Aller de l'arrêt de tram "Vélodrome" à Nancy à l'arrêt "CHU Brabois" est sensiblement plus long que le trajet inverse, même en prenant la même route. Sur du plat, il peut y avoir des sens interdits qui augmentent la distance à parcourir. Utilisez un logiciel de recherche de trajet pour vous en convaincre. Bref : utiliser les distances au sens mathématiques est une simplification conséquente de la vie courante...

1.4. Boules.

Definition 2 (Boules). Soit (X, d) un espace métrique. Pour $x \in X$ et $r \geq 0$, on définit

$$B_d(x, r) := \{y \in X \text{ tel que } d(x, y) < r\},$$

$$\bar{B}_d(x, r) := \{y \in X \text{ tel que } d(x, y) \leq r\}.$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera souvent $B(x, r)$ et $\bar{B}_d(x, r)$.

1.5. Produit.

Proposition 3 (Produit d'espaces métriques). Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $\delta : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\delta((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y') \text{ pour tous } (x, y), (x', y') \in X \times Y.$$

Alors δ est une distance sur $X \times Y$.

2. Voisinages, ouverts, fermés

2.1. Définitions.

Definition 4 (Voisinage). Soit (X, d) un espace métrique. Soit un ensemble $A \subset X$ et $x \in X$. On dit que A est un voisinage de x si il existe $r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset A$.

Definition 5 (Ensemble ouvert). Soit (X, d) un espace métrique. Un ensemble $A \subset X$ est dit "ouvert pour la distance d " si :

- Soit $A = \emptyset$,
- Soit pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B_d(a, r) \subset A$.

En d'autres termes, A est ouvert s'il est vide ou bien s'il est voisinage de tous ses points.

Definition 6 (Ensemble fermé). Soit (X, d) un espace métrique. Un ensemble est dit fermé si son complémentaire est ouvert.

Remarque : si deux normes sur un evn sont équivalentes, alors elles définissent les mêmes ouverts et les mêmes fermés (ce sera vu en exercice). Du coup, en dimension finie, on parlera d'ouverts et de fermés, étant sous-entendu que ces notions se rapportent à une distance issue d'une norme, et que, les normes étant équivalentes, ces notions sont indépendantes du choix de la norme.

Exercice 1 : On munit $\mathbb{R}$ de la valeur absolue. On munit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la distance produit δ . Montrez que les ouverts de $(\mathbb{R}^2, \delta)$ sont exactement les ouverts de $\mathbb{R}^2$ munie de la norme infinie $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2.2. Des propriétés en lien avec la topologie générale (qui sera vue plus tard).

Proposition 7. Soit (X, d) un espace métrique. Alors

- $\emptyset$ et X sont des ouverts ;
- Toute union d'ouverts est ouverte (c'est-à-dire pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que A_i est un ouvert de X pour tout $i \in I$, alors $\cup_{i \in I} A_i$ est un ouvert de X).
- Toute intersection finie d'ouverts est ouverte (c'est-à-dire pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que A_i est un ouvert de X pour tout $i \in I$, et I est finie, alors $\cap_{i \in I} A_i$ est un ouvert de X).

En passant au complémentaire, on a donc

Proposition 8. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors*

- $\emptyset$ et X sont des fermés ;
- Toute intersection de fermés est fermée (c'est-à-dire pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que A_i est un fermé de X pour tout $i \in I$, alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ est un fermé de X).
- Toute union finie de fermés est fermée (c'est-à-dire pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que A_i est un fermé de X pour tout $i \in I$, et I est finie, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un fermé de X).

Les preuves de ces deux propositions feront l'objet d'un exercice.

2.3. Quelques exemples dans $\mathbb{R}$: • L'ensemble $]0, 1[$ est ouvert.

Preuve : Soit $x \in]0, 1[$. On s'aide d'un dessin pour avoir l'intuition que $B(x, r) =]x - r, x + r[\subset]0, 1[$ avec $r = \min\{x, 1 - x\}/2$. On a bien $r > 0$ car $x > 0$ et $x < 1$. Pour montrer que $]x - r, x + r[\subset]0, 1[$, on se donne Soit $y \in]x - r, x + r[$ arbitraire. On a donc $y > x - r \geq x - x/2 = x/2 > 0$, et $1 - y > 1 - (x + r) = 1 - x - r \geq 1 - x - (1 - x)/2 = (1 - x)/2 > 0$, donc $0 < y < 1$, donc $y \in]0, 1[$. Ceci prouve que $]x - r, x + r[\subset]0, 1[$, et donc $]0, 1[$ est un ouvert. $\square$

- L'ensemble $[2, 3]$ est fermé.

Preuve : On va montrer que $[2, 3]^c =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$ est ouvert. Montrons que $] - \infty, 2[$ est ouvert. Soit $x \in] - \infty, 2[$: en s'aidant d'un dessin pour l'intuition, on va montrer que $]x - r, x + r[\subset] - \infty, 2[$ avec $r = (2 - x)/2 > 0$. En effet, pour $y \in]x - r, x + r[$, on a $y < x + r = (2 + x)/2 < 2$, donc $y \in] - \infty, 2[$. Donc $]x - r, x + r[\subset] - \infty, 2[$, puis $] - \infty, 2[$ est ouvert. De même $]3, +\infty[$ est ouvert et donc $] - \infty, 2[\cup]3, +\infty[$ est ouvert comme union d'ouverts. Et donc $[2, 3]$ est fermé. $\square$

- L'ensemble $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

Preuve : Supposons que $[0, 1[$ est ouvert. On voit sur un dessin que c'est en 0 que ça va clocher. Comme $0 \in [0, 1[$, si c'est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $] - r, r[\subset [0, 1[$, donc $-r/2 \in] - r, r[\subset [0, 1[$, ce qui est absurde car $-r/2 < 0$. Donc $[0, 1[$ n'est pas ouvert.

Supposons que $[0, 1[$ est fermé : on voit que c'est en 1 qu'on aura un problème. Si c'est fermé, alors $[0, 1]^c =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ est ouvert et contient 1, donc il existe $r > 0$ tel que $]1 - r, 1 + r[\subset]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. On s'aide d'un dessin pour prendre $s > 0$ tel que $s < r$ et $s < 1$: on a donc $1 - s \in]1 - r, 1 + r[$, mais $1 - s \notin]-\infty, 0[$ (car $1 - s > 0$) et $1 - s \notin]1, +\infty[$ (car $s > 0$). Donc $1 - s \notin [0, 1]^c$ mais $1 - s \in]1 - r, 1 + r[$, ce qui est une contradiction. Donc $[0, 1[$ n'est pas fermé.

Conclusion : $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

Quelques exemples plus généraux

Proposition 9. *Dans un espace métrique, toute boule ouverte est ouverte (ouf) et toute boule fermée est fermée (ouf encore).*

Preuve en TD ou en devoir.

2.4. Distance induite.

Définition 10. *Soit (X, d) un espace métrique et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble de X . On appelle distance induite par d sur Y la distance $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d_Y(x, y) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in Y$.*

On se trouve alors avec des notions d'ouverts et de fermés du sous-ensemble. Mais attention ! Les notions ne coïncident pas toujours.

Exemple : On considère $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. L'ensemble $]0, 1[$ est ouvert pour $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. On munit $]0, 1[$ de la distance induite : alors $]0, 1[$ est à la fois ouvert et fermé pour la distance induite. De même, en munissant $[0, 1[$ de la distance induite, c'est à la fois un ouvert et un fermé. A retenir :

Les notions d'ouverts et de fermés dépendent de l'ensemble et de la distance ambiants

Proposition 11. Soit (X, d) un espace métrique et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble de X qu'on munit de la distance induite. Soit $A \subset Y$. Alors

- (i) $\{A \text{ ouvert de } Y\} \Leftrightarrow \{A = B \cap Y \text{ avec } B \text{ ouvert de } X\}$.
- (ii) $\{A \text{ fermé de } Y\} \Leftrightarrow \{A = B \cap Y \text{ avec } B \text{ fermé de } X\}$.

Pour simplifier, on n'a pas noté les distances. En toute rigueur, on aurait du noter A ouvert de (Y, d_Y) et B ouvert de (X, d) avec d_Y la distance induite

Preuve : On va commencer par un petit résultat bien utile : pour $x \in Y$ et $r > 0$, on a

$$B_{d_Y}(x, r) = B_d(x, r) \cap Y.$$

On procède par double inclusion :

($\subset$) Soit $y \in B_{d_Y}(x, r) = \{z \in Y / d_Y(x, z) < r\}$. Donc $y \in Y$ et $d(x, y) = d_Y(x, y) < r$, donc $y \in B_d(x, r) \cap Y$. Donc $B_{d_Y}(x, r) = B_d(x, r) \cap Y$.

($\supset$) Soit $y \in B_d(x, r) \cap Y$. Donc $y \in Y$ et $d(x, y) < r$. Comme $x, y \in Y$, on a $d_Y(x, y) = d(x, y) < r$, donc $y \in B_{d_Y}(x, r)$. Donc $B_d(x, r) \cap Y \subset B_{d_Y}(x, r)$.

Conclusion : $B_{d_Y}(x, r) = B_d(x, r) \cap Y$, et le résultat est prouvé.

Prouvons maintenant la proposition. On se donne $A \subset Y$. On va montrer (i) par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose que A ouvert de (Y, d_Y) . Pour $x \in A$, il existe $r_x > 0$ tel que $B_{d_Y}(x, r_x) \subset A$. On pose $B := \bigcup_{x \in A} B_d(x, r_x)$. Comme les boules ouvertes sont ouvertes (voir Proposition 9) et que toute union d'ouverts est un ouvert, alors B est un ouvert de X . De plus,

$$B \cap Y = \left(\bigcup_{x \in A} B_d(x, r_x) \right) \cap Y = \bigcup_{x \in A} (B_d(x, r_x) \cap Y) = \bigcup_{x \in A} B_{d_Y}(x, r_x)$$

Là encore on doit prouver une double inclusion. Comme $B_{d_Y}(x, r_x) \subset A$ pour tout $x \in A$, on a $B \cap Y \subset A$. Pour tout $x \in A$, on a $x \in B_{d_Y}(x, r_x)$, et donc $x \in B \cap Y$, donc $A \subset B \cap Y$. Ceci prouve que $A = B \cap Y$ avec B ouvert de (X, d) .

($\Leftarrow$) On suppose que $A = B \cap Y$ avec B ouvert de X . Si $A = \emptyset$, alors A ouvert de Y . Sinon, soit $x \in A$, donc $x \in Y$ et $x \in B$ ouvert de X . Donc $\exists r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset B$, donc $B_{d_Y}(x, r) = B_d(x, r) \cap Y \subset B \cap Y = A$. Ainsi A ouvert de (Y, d_Y) .

Ceci prouve (i). La preuve de (ii) se fait en passant au complémentaire. Pour tout ensemble $Z \subset X$, on notera $Z^c = X \setminus Z$ le complémentaire dans X . Pour $B \subset X$, on remarque que

$$Y \setminus (B \cap Y) = Y \cap (B \cap Y)^c = Y \cap (B^c \cup Y^c) = (Y \cap B^c) \cup (Y \cap Y^c) = Y \cap B^c.$$

On se donne $A \subset Y$.

($\Rightarrow$). On suppose que A est fermé dans Y , donc $Y \setminus A$ est ouvert dans Y , donc il existe $B \subset X$ ouvert de X tel que $Y \setminus A = B \cap Y$. Du coup,

$$A = Y \setminus (Y \setminus A) = Y \setminus (B \cap Y) = Y \cap B^c = Y \cap F$$

avec $F = B^c$ qui est fermé dans X . Ceci prouve ($\Rightarrow$).

($\Leftarrow$). Supposons que $A = B \cap Y$ avec B fermé de X . Donc $Y \setminus A = Y \setminus (B \cap Y) = Y \cap B^c$, avec B^c ouvert de X , donc $Y \setminus A$ ouvert de Y , puis A fermé de Y . Ceci prouve ($\Leftarrow$).

2.5. Caractérisation des fermés par les suites.

2.5.1. Rappel :

Definition 12. Soit (X, d) un espace métrique et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on note $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$). Soit $l \in X$. On dit que $(x_n)_n$ converge vers l si

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N}, \{n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, l) < \epsilon\}.$$

Dans ce cas, l est unique : on l'appelle "la limite de $(x_n)_n$ lorsque $n \rightarrow \infty$ ", et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n := l$.

Remarque : ici, n_0 dépend de $\epsilon > 0$, et on notera parfois $n_0 = n_0(\epsilon)$ pour insister sur cela. Il faut prendre l'habitude de "pister" la dépendance des diverses constantes utilisées : cela permet de bien comprendre qui dépend de quoi, et surtout d'éviter de très grosses erreurs.

2.5.2. La caractérisation séquentielle.

Proposition 13. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $A \subset X$ un ensemble. On a l'équivalence suivante :

(i) A est fermé

(ii) Pour toute suite $(x_n)_n$ qui converge vers $l \in X$, alors $\{x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow l \in A$.

Preuve : elle se fait par double implication.

(i) $\Rightarrow$ (ii). On suppose que A est fermé. On se donne une suite (x_n) telle que $x_n \in A$ pour tout n et on suppose qu'il existe $l \in X$ tel que (x_n) converge vers l dans X . Supposons par l'absurde que $l \notin A$, donc $l \in A^c$ ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B_d(l, r) \subset A^c$. Comme (x_n) converge vers l , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, l) < r\}$, et donc pour $n \geq n_0$, $x_n \in B_d(l, r) \subset A^c$, ce qui est absurde car $x_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $l \in A$, ce qui termine (i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). On suppose que (ii) a lieu. Là encore, on raisonne par l'absurde en supposant que A n'est pas fermé, donc que A^c n'est pas ouvert. Du coup,

$$\exists x \in A^c \text{ tel que pour tout } r > 0 \text{ on a } B_d(x, r) \not\subset A^c,$$

et du coup, $B_d(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on prend $r = \frac{1}{n+1}$, donc il existe $x_n \in B_d(x, \frac{1}{n+1}) \cap A$, c'est-à-dire $x_n \in A$ et $d(x_n, x) < \frac{1}{n+1}$. Ainsi, on a $(x_n)_n$ qui converge vers x , or $x_n \in A$ pour tout n , il suit alors de l'hypothèse (ii) que $x \in A$, ce qui contredit $x \in A^c$. Donc l'hypothèse initiale est absurde, et donc A est fermé. Ceci termine (ii) $\Rightarrow$ (i).

Ceci prouve l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii). □

2.5.3. *Cette caractérisation est souvent très commode.* Reprenons par exemple la preuve de $[0, 1[$ ni ouvert ni fermé :

Ce n'est pas un fermé : en effet, la suite $(\frac{n}{n+1})_n$ est dans $[0, 1[$ et converge vers $1 \notin [0, 1[$.

Si c'est ouvert, alors $[0, 1[^c] =]1, +\infty[$ est fermé. Or $(\frac{-1}{n+1})_n$ est dans $]1, +\infty[$ et converge vers $0 \notin]1, +\infty[$, donc ce n'est pas un fermé. Donc $[0, 1[$ n'est pas ouvert.

3. Intérieur et adhérence

3.1. Définition et premiers exemples.

Définition 14 (Intérieur). Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. On appelle intérieur de A , et on note $\text{Int}(A)$, l'ensemble des points de X dont A est voisinage. En d'autres termes,

$$\text{Int}(A) = \{x \in X / \exists r > 0 \text{ tel que } B_d(x, r) \subset A\}.$$

Exemple : dans $\mathbb{R}$, $\text{Int}([0, 1]) = \text{Int}([0, 1]) =]0, 1[$. (A traiter en exercice).

3.2. Caractérisation de l'intérieur parmi les ouverts. Propriétés : Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On a alors :

- $\text{Int}(A) \subset A$
- $\text{Int}(A)$ est un ouvert de X
- $\{A \text{ ouvert}\} \Leftrightarrow \{\text{Int}(A) = A\}$
- $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A

• *Preuve de $\text{Int}(A) \subset A$:* soit $x \in \text{Int}(A)$, donc il existe $r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset A$, or $x \in B_d(x, r)$, donc $x \in A$. Donc $\text{Int}(A) \subset A$.

• *Preuve de $\text{Int}(A)$ ouvert de X :* Si $\text{Int}(A)$ est vide, c'est bon. Sinon soit $x \in \text{Int}(A)$, donc il existe $r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset A$. En faisant quelques dessins (pour le moment pas question sur ces notes...), on se dit que $B_d(x, r) \subset \text{Int}(A)$, et c'est ce que nous allons prouver maintenant.

Soit $y \in B_d(x, r)$, donc $d(x, y) < r$. On pose $\epsilon := r - d(x, y)$. Montrons que $B_d(y, \epsilon) \subset A$. En effet, soit $z \in B_d(y, \epsilon)$, donc $d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) < \epsilon + d(x, y) = r$, donc $z \in B_d(x, r) \subset A$, donc $B_d(y, \epsilon) \subset A$, donc $y \in \text{Int}(A)$. Du coup, $B_d(x, r) \subset \text{Int}(A)$. Ainsi $\text{Int}(A)$ est ouvert.

• *Preuve de $\{A \text{ ouvert}\} \Leftrightarrow \{\text{Int}(A) = A\}$.* On va raisonner par double implication. ($\Rightarrow$) On suppose que A est ouvert. On sait déjà que $\text{Int}(A) \subset A$. Soit maintenant $x \in A$: comme A ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset A$, donc $x \in \text{Int}(A)$. Donc $A \subset \text{Int}(A)$, puis $A = \text{Int}(A)$.

($\Leftarrow$) On suppose que $A = \text{Int}(A)$. Comme $\text{Int}(A)$ ouvert (Cf point précédent), on a donc A ouvert.

• *Preuve de $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert inclus dans A .* On va montrer que

$$\text{Int}(A) = \bigcup_{O \subset A \text{ ouvert}} O.$$

Ceci va se faire par double inclusion.

($\subset$) On a vu que $\text{Int}(A) \subset A$ et est ouvert. Donc en prenant $O = \text{Int}(A)$, on a

$$\text{Int}(A) \subset \bigcup_{O \subset A \text{ ouvert}} O.$$

($\supset$) On se donne $O \subset A$ ouvert. Si $O = \emptyset$, alors $O \subset \text{Int}(A)$. Sinon, soit $x \in O$, donc, comme c'est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset O$, et donc $B_d(x, r) \subset A$, donc $x \in \text{Int}(A)$. Ainsi $O \subset \text{Int}(A)$, et donc

$$\bigcup_{O \subset A \text{ ouvert}} O \subset \text{Int}(A).$$

Les deux inclusions ayant lieu, on a donc égalité entre les ensembles et

$$\text{Int}(A) = \bigcup_{O \subset A \text{ ouvert}} O.$$

On a donc prouvé que si $O \subset A$ ouvert, alors $O \subset \text{Int}(A)$, comme $\text{Int}(A)$ ouvert, c'est donc le plus grand ouvert qui contient A (s'il y en a deux, ils sont égaux).

3.3. Définition de l'adhérence.

Definition 15 (Adhérence). Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. Un point $x \in X$ est adhérent à A si pour tout ouvert V de X tel que $x \in V$, alors $V \cap A \neq \emptyset$. On note $\bar{A}$ l'adhérence de A , et donc, en d'autres termes,

$$\bar{A} = \{x \in X \text{ tels que pour tout } V \subset X \text{ ouvert tel que } x \in V, \text{ alors } V \cap A \neq \emptyset\}$$

Exemple : dans $\mathbb{R}^2$

3.4. Formes équivalentes.

Proposition 16. Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. On pose

$$A_1 := \{x \in X \text{ tels que pour tout } V \subset X \text{ voisinage de } x, \text{ alors } V \cap A \neq \emptyset\}$$

$$A_2 := \{x \in X \text{ tels que pour tout } r > 0, \text{ alors } B_d(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Alors $A_1 = A_2 = \bar{A}$.

La preuve fera l'objet d'un exercice.

3.5. Caractérisation de l'adhérence par les suites.

Proposition 17. Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. Alors

$$\bar{A} = \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n / (x_n)_n \text{ suite convergente dans } X \text{ avec } x_n \in A \text{ pour tous } n \in \mathbb{N} \right\}$$

La preuve fera l'objet d'un exercice.

3.6. Propriétés générales.

On a les propriétés duales de celles de l'intérieur : Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On a alors :

- $A \subset \bar{A}$
- $\bar{A}$ est un fermé de X
- $\{A \text{ fermé}\} \Leftrightarrow \{\bar{A} = A\}$
- $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A .

La preuve sera faite en exercice ou en devoir.

4. Fonctions continues

4.1. Définition.

Definition 18. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Soit $x_0 \in X$. On dit que f est continue en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in X, \{d_X(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon\}.$$

On dit que f est continue si elle est continue en tout point.

Important ! Ici $\alpha = \alpha(x_0, \epsilon)$ dépend à la fois de ϵ et $x_0 \in X$.

Notations : On note $C((X, d_X), (Y, d_Y))$ l'ensemble des fonctions continues de (X, d_X) dans (Y, d_Y) . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, et afin d'alléger les notations, on notera simplement $C(X, Y)$. On notera aussi $C(X) = C(X, \mathbb{R})$, avec $\mathbb{R}$ muni de la topologie associée à la valeur absolue.

4.2. Caractérisation par les suites.

Proposition 19. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Soit $x \in X$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue en x ;
- (ii) pour toute suite $(x_n)_n$ de X qui converge vers x , alors $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$ dans Y .

La preuve sera traitée en exercice.

4.3. Structure algébrique.

Proposition 20. Toute composée de fonction continues est continue.

Toute somme, produit, quotient, combinaison linéaire de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue lorsque cela fait sens. C'est un peu plus subtil lorsqu'on est à valeurs dans un evn.

4.4. Homéomorphismes.

Definition 21. Un homéomorphisme entre deux espaces métriques et une bijection continue dont l'inverse est continu. Deux espaces métriques sont homéomorphes lorsqu'il existe un homéomorphisme entre eux.

Exemples et contre-exemples : • La fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \geq 0$ est un homéomorphisme dont l'inverse est $x \mapsto \sqrt{x}$.

- Deux intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes (Exercice).
- La fonction

$$\left\{ \begin{array}{ll} f :]0, 1[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \tan(\frac{\pi}{2}x) \end{array} \right.$$

est une bijection dont l'inverse est

$$\left\{ \begin{array}{ll} f^{-1} : \mathbb{R} & \rightarrow]0, 1[\\ y & \mapsto \frac{2}{\pi} \arctan(y) \end{array} \right.$$

Donc f est un homéomorphisme. Du coup, $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

• Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une bijection continue avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Comme f est injective et $I \subset \mathbb{R}$, il suit du théorème des valeurs intremédiaires que f est strictement monotone. On parvient alors à montrer sans trop de difficultés que f^{-1} est aussi continue. Donc f est un homéomorphisme.

- Cela n'est plus valable en général. Prenons par exemple

$$\begin{cases} f : [0, 2\pi[& \rightarrow & \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{cases}$$

En munissant $\mathbb{S}^1$ de la distance induite par le module sur $\mathbb{C}$, f est continue. Elle est aussi bijective. Mais f^{-1} n'est pas continue ! Le problème ne peut être qu'en 2π et 0 : en effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(2\pi - \frac{1}{n}) = e^{2i\pi} = e^0 = f(0)$, et donc, en posant $y_n := f(2\pi - \frac{1}{n})$ pour $n \geq 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(y_n) = 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1).$$

Donc f^{-1} n'est pas continue.

Exercice 2 : En utilisant l'exponentielle, montrez que $]0, 1[$ est homéomorphe à $]0, +\infty[$. Dédusiez des divers résultats de cette section que les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont tous homéomorphes.

5. Compacité

5.1. Définition.

Définition 22. [Ensemble compact] Un espace métrique (X, d) est compact si de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement fini. En d'autres termes, pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors

$$X = \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } X = \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Proposition 23. Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble de X est compact s'il est compact pour la distance induite. En d'autres termes, un ensemble $K \subset X$ est compact si pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors

$$K \subset \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } K \subset \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Preuve : en exercice.

Remarques :

- On verra que cette définition fait sens dans le cadre de la topologie générale.
- Vous verrez des définitions dans lesquelles on demande en plus qu'un compact soit non-vide. Ici, on a fait le choix de ne pas l'exiger, mais dans la suite, on insistera (lourdement) sur la nécessité de prendre des ensembles non-vides si nécessaire.

5.2. Caractérisation par les suites.

THÉORÈME 24. Soit (X, d) un espace métrique. On a l'équivalence suivante :

- (X, d) est compact ;
- De toute suite à valeurs dans X , on peut extraire une sous-suite convergente dans X .

On renvoie au cours de Licence pour la preuve de ce résultat classique.

Remarque : On verra plus tard que cette caractérisation n'est valable que pour les espaces métriques.

Quelques exemples :

- Il suit du théorème de Bolzano-Weierstraß (toute suite réelle bornée admet une sous-suite qui converge) que les compacts de $\mathbb{R}$ sont exactement les fermés-bornés.
- Plus généralement, dans un evn de dimension finie, les compacts sont exactement les fermés-bornés pour la distance associée à la structure d'evn. C'est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstraß de l'équivalence des normes en dimension finie.
- Si on muni $\mathbb{R}$ de la distance $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$, alors, pour d , $\mathbb{R}$ est fermé-borné. Mais il n'est pas compact car, par exemple, la suite $(n)_n$ n'admet pas de sous-suite convergente.

5.3. Image continue d'un compact.

Proposition 25. *L'image continue d'un compact est un compact. En d'autres termes, pour (X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques avec $f : X \rightarrow Y$ continue, si $K \subset X$ est compact, alors $f(K)$ est compact dans Y .*

Preuve : On va utiliser 2 méthodes.

• Définition par le recouvrement ouvert. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Y tels que $f(X) \subset \cup_{i \in I} O_i$. On a alors $X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(\cup_{i \in I} O_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$. La fonction f étant continue, $f^{-1}(O_i)$ est ouvert pour tout i . Sachant que X est compact, il existe $J \subset I$ fini tel que $X \subset \cup_{i \in J} f^{-1}(O_i)$. Puis $f(X) = f(f^{-1}(f(X))) = \cup_{i \in J} f(f^{-1}(O_i)) \subset \cup_{i \in J} O_i$. Donc $f(X)$ est compact.

• Preuve par les suites. On est dans le cas d'espaces métriques, donc la caractérisation par les suites a lieu. Soit $(y_n)_n$ une suite de $f(X) \subset Y$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in X$ tel que $y_n = f(x_n)$. On a $(x_n)_n$ à valeurs dans X compact, donc il existe une sous-suite $(x_{j(n)})_n$ et $x \in X$ tels que $(x_{j(n)})$ converge vers x . Comme f est continue, alors $(y_{j(n)})_n = (f(x_{j(n)}))_n$ converge vers $f(x) \in f(X)$. Donc $(y_n)_n$ admet une sous-suite qui converge dans $f(X)$, donc $f(X)$ est compact. $\square$

Corollary 26. *Soit (X, d) un espace métrique compact non-vidé. Alors toute fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée et atteint son infimum et son supremum.*

Preuve : D'après la proposition précédente, $f(X)$ est un compact non vide de $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est de dimension finie, $f(X)$ est fermé-borné de $\mathbb{R}$, donc (cours de Licence), il admet un minimum et un maximum. $\square$

Proposition 27. *Pour (X, d_X) compact non vide et (Y, d_Y) espace métrique, on considère $C(X, Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y . Pour $f, g \in C(X, Y)$, on définit*

$$d(f, g) := \sup_{x, y \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

Alors $d(f, g) < +\infty$ pour tout $f, g \in C(X, Y)$ et d est une distance sur $C(X, Y)$

La preuve est en exercice.

5.4. Bijection continue sur un compact.

Proposition 28. *Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction avec (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On suppose que*

- f est continue ;
- f est bijective ;
- (X, d_X) est compact.

Alors f est un homéomorphisme, c'est-à-dire f, f^{-1} sont continues.

La preuve est en devoir ou en exercice.

5.5. Uniforme continuité.

5.5.1. Définition.

Definition 29. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in X, \{d_X(x, y) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon\}$$

Important ! Ici $\alpha = \alpha(\epsilon)$ est indépendant du choix de $x \in X$. C'est en cela qu'on a uniformité. On dit parfois que "le module de continuité est indépendant du point de continuité". C'est la différence avec la définition de la continuité en un point (Définition 18) dans laquelle α dépend du point de continuité choisi.

Contrairement à la plupart des notions précédentes, il est nécessaire de travailler sur des espaces métriques pour parler d'uniforme continuité (voyez pourquoi). On peut quand même se débrouiller avec des espaces vectoriels topologiques.

5.5.2. Exemples et contre-exemples.

- La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.
Preuve : Soient $x, y \in [0, 1]$, on a $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y)| \leq 2|x - y|$. On se donne $\epsilon > 0$. Alors si $|x - y| < \alpha := \epsilon/2$, on a $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Donc f est uniformément continue (α ne dépend que de ϵ).
- La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, on a $|f(n + \alpha/2) - f(n)| \geq \alpha n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

5.5.3. Fonction Lipschitziennes et Hölderiennes.

Definition 30. Soit $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ une fonction. On dit que f est *Lipschitzienne* si $\exists L > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. Pour $\alpha \in]0, 1]$, on dit que f est α -*Hölderienne* si $\exists L > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)^\alpha$ pour tous $x, y \in X$.

Notons qu'une fonction est 1-Hölderienne ssi elle est Lipschitzienne.

Proposition 31. Toute fonction Lipschitzienne ou Hölderienne est uniformément continue.

Proposition 32. Soient E, F deux espaces vectoriels normés, soit $U \subset E$ un ouvert et soit $f : U \rightarrow F$ une fonction. On suppose que f est différentiable et que $df : U \rightarrow L_c(E, F)$ est bornée (c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\|df_x\|_{E \rightarrow F} \leq M$ pour tout $x \in U$). Alors f est uniformément continue.

La preuve utilise l'Inégalité des Accroissements Finis (Théorème 126).

Application : $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \ln x$ pour tout $x \geq 1$ est uniformément continue.

5.5.4. *Théorème de Heine.*

THÉORÈME 33. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espace métriques. On suppose que X est compact. Alors toute fonction continue sur X est uniformément continue.*

La preuve se fait par contradiction : voir cours de Licence.

Exercice 3 : Montrez que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Topologie générale

1. Définition et premières notions associées

Définition 34 (Espace Topologique). Soit X un ensemble. Une topologie sur X est un ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$
- Pour toute famille finie $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$ alors $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

On dit alors que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les ouverts de la topologie. Ainsi, se donner une topologie revient à se donner des ensembles ouverts. Un ensemble est fermé est le complémentaire d'un ouvert.

1.1. Exemples.

- (1) Pour tout ensemble X , $\{\emptyset, X\}$ et $\mathcal{P}(X)$ sont des topologies sur X . En particulier, tout ensemble admet au moins une topologie.
- (2)

Définition 35 (Voisinage). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $x \in X$. Un voisinage de x est un ensemble $A \subset X$ tel qu'il existe U un ouvert tel que $x \in U \subset A$.

Définition 36 (Séparation). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que la topologie est séparée si pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe U, V ouverts tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exemples : sur un ensemble X , la topologie $\{\emptyset, X\}$ n'est pas séparée si $\text{Card}(X) > 1$; mais la topologie $\mathcal{P}(X)$ est séparée.

1.2. Topologie associée à un espace métrique.

1.2.1. La définition.

Proposition 37. Soit (X, d) un espace métrique. L'ensemble des ouverts de la Définition 5 constitue une topologie sur X . C'est la topologie associée à la métrique d , ou encore "topologie d'espace métrique" associée à d .

Preuve : c'est une conséquence directe de la Proposition 8 et de la définition d'une topologie.

1.2.2. Conséquences immédiates.

- Les notions d'ouverts, de fermés et de voisinages coïncident : ouf!
- La topologie d'espace métrique est séparée

2. Construction de nouvelles topologies

2.1. Topologie induite.

Proposition 38. Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique. Soit $Z \subset X$. On dit que A est un ouvert de Z si $A = U \cap Z$ avec U ouvert de X . Ceci définit une topologie, dite topologie induite par $\mathcal{T}_X$ sur Z .

C'est une conséquence de la Proposition 11.

Proposition 39. Soit (X, d) un espace métrique et soit $Z \subset X$. La topologie sur Z induite par la topologie d'espace métrique (X, d) coïncide avec la topologie sur Z associée à la métrique induite $d|_{Z \times Z}$.

Encore une conséquence de la Proposition 11.

2.2. Topologie produit.

Proposition 40 (Topologie Produit). Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. On dit qu'un ensemble $\Omega \subset X \times Y$ est un ouvert de la topologie produit si

- Soit $\Omega = \emptyset$,
- Soit pour tout $(x, y) \in \Omega$, il existe $U \subset X$ et $V \subset Y$ ouverts tels que $(x, y) \in U \times V \subset \Omega$.

Ceci constitue bien une topologie.

La preuve fait l'objet d'un exercice.

Proposition 41. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. La topologie associée à la métrique produit coïncide avec la topologie produit des deux topologies de X et Y induites par les distances d_X et d_Y .

Là encore, la preuve fera l'objet d'un exercice.

3. Suites et fonctions

3.1. Convergence des suites.

Définition 42. Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique. Soit une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in X$. On dit que (x_n) converge vers x (et que x est une limite de (x_n)) lorsque $n \rightarrow \infty$ si

$$\forall U \text{ ouvert tel que } x \in U, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \{n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U\}.$$

Proposition 43. Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique séparé. Si $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$, alors la limite est unique. On note alors $x = \lim_n x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Preuve classique : cours de Licence ou exercice.

3.2. Continuité.

Définition 44. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et soit $f : X \rightarrow Y$. On dit que f est continue si

$$\forall V \text{ ouvert de } Y, \text{ alors } f^{-1}(V) \text{ est ouvert dans } X.$$

Il est sous-entendu qu'on prend les topologies $\mathcal{T}_X$ et $\mathcal{T}_Y$.

Proposition 45. La notion de continuité dans des espaces métriques coïncide avec celle dans les espaces munis des topologies induites par les métriques.

Ce résultat fait l'objet d'un exercice.

3.3. Caractérisation de la continuité par les suites. Dans le cas d'espace métriques, on a vu qu'on peut caractériser la continuité par les suites (Proposition 19). La preuve ne fonctionne pas dans le cas général d'un espace topologique quelconque. Le point essentiel est que, dans le cas d'un espace métrique (X, d) , en tout point $x \in X$, il existe une famille dénombrable $(U_n)_n$ de voisinages de x telle que tout ouvert de X qui contient x contient un des U_n : des espaces qui vérifient cette propriété sont dits à base dénombrable d'ouverts. On peut alors montrer que pour de tels espaces, la caractérisation séquentielle (c'est-à-dire par les suites) a lieu.

4. Espaces compacts

4.1. Définitions. Comme remarqué plus haut, la Définition 22 fait sens pour des espaces topologiques quelconques :

Definition 46. [Ensemble compact, voir Définition 23] *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est compact si de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement fini. En d'autres termes, pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors*

$$X = \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } X = \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Proposition 47. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble de X est compact s'il est compact pour topologie induite. En d'autres termes, un ensemble $K \subset X$ est compact si pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors*

$$K \subset \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } K \subset \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Quelques remarques qui seront utiles dans la suite de ce cours :

- Si une topologie n'a qu'un nombre fini d'ouverts (c'est le cas de la topologie triviale $\{\emptyset, X\}$), alors toute partie de X est compacte!!!!
- Munissons X de deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$. On suppose que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Alors tout compact pour $\mathcal{T}_2$ est compact pour $\mathcal{T}_1$ (preuve immédiate) : la topologie $\mathcal{T}_1$ contient plus de compacts que $\mathcal{T}_2$. Ainsi plus une topologie est petite, plus elle a de compacts.

Il est parfois un peu déstabilisant de travailler sur des compacts généraux. Par exemple le résultat suivant est assez délicat à prouver :

Proposition 48. *Dans un espace topologique séparé, tout compact est fermé.*

La preuve fait l'objet d'un exercice de TD.

4.2. Cas des espaces métriques. Dans la plupart des cas, on sera dans le cadre métrique pour lequel on a la caractérisation par les suites du Théorème 24. On ne revient pas dessus, elle est ultra-classique.

4.3. Image continue d'un compact. Ce qui a été vu dans le cadre des espaces métriques reste vrai ici. En particulier :

- L'image continue d'un compact est compacte ;
- Une fonction continue à valeurs réelles est bornée sur tout compact non vide, et elle atteint ses bornes.

- Si $(X, \mathcal{T}_X)$ est un espace topologique compact non-vidé et (Y, d_Y) est un espace métrique, alors pour $f, g \in C^0(X, Y)$, on définit

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

Le fonction d est alors une distance sur $C^0(X, Y)$.

Vous savez qu'un des intérêts des espaces compacts en Analyse est de pouvoir minimiser des fonctionnelles. Donc plus on a de compacts, plus on pourra minimiser. Et donc, avec ce qu'on a vu plus haut, plus la topologie sera petite, plus on aura de compacts, plus on va pouvoir minimiser. Le petit souci sera qu'il faudra étudier la continuité dans plusieurs topologies.

Espaces complets

1. Complétude (panorama rapide)

1.1. Definition.

Definition 49. Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ such that for all } p, q \in \mathbb{N}, \{p, q \geq n_\epsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon\}.$$

On dit qu'un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans X admet une limite dans X . Un espace de Banach est un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance associée.

1.2. Exemples :

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) et tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet pour l'unique topologie d'evn.
- Soit X un espace topologique et soit (Y, d_Y) un espace métrique. On suppose que X est compact et que (Y, d_Y) est complet. Alors $C^0(X, Y)$ est complet pour la distance complète when endowed with the metric

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) \text{ pour } f, g \in C^0(X, Y).$$

- Soit X un espace topologique et soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach. Alors $C^0(X, F)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_F \text{ pour } f \in C^0(X, F).$$

- Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach. Alors $C^k([0, 1], F)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{C^k([0, 1], F)} := \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_\infty \text{ pour } f \in C^k([0, 1], F).$$

- Les espaces $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

1.3. Propriétés.

Proposition 50. Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $F \subset X$. Alors F est complet (pour la distance induite) si et seulement si F est fermé dans X .

1.4. Théorème des fermés emboîtés.

Proposition 51. Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que

- $F_n \subset X$ est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $F_n \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $F_{n+1} \subset F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Alors il existe $x \in X$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on fixe $x_n \in F_n$. Pour $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq q$, on a $F_p \subset F_q$, donc $x_p, x_q \in F_q$ et donc $d(x_p, x_q) \leq \text{diam}(F_q)$. On fixe $\epsilon > 0$, de sorte qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\text{diam}(F_q) < \epsilon$ pour tout $q \geq q_0$. Par conséquent $d(x_p, x_q) < \epsilon$ pour tout $p \geq q \geq q_0$. Du coup (x_n) est une suite de Cauchy dans X qui est complet, donc elle converge vers un certain $x \in X$. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq n$: on a alors $x_p \in F_p \subset F_n$. Donc $x_p \in F_n$ pour tout $p \geq n$: comme (x_p) converge vers x et F_n est fermé, on a $x \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. On se donne maintenant $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, de sorte que $y \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $x, y \in F_n$ puis $d(x, y) \leq \text{diam}(F_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite, on obtient $d(x, y) \leq 0$, et donc $x = y$. Ceci prouve que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$. $\square$

1.5. Pourquoi les espaces complets sont-ils si utiles ?? Dans le cadre de ce cours, on cherche à développer des outils assez généraux pour résoudre des problèmes d'analyse. "Résoudre" signifie souvent "prouver l'existence d'une solution". Grâce à la complétude, on parviendra à prouver l'existence de "quelque chose" qui, on l'espère, sera une solution de notre problème. Cependant, en général, nous n'aurons aucune idée de la forme de cette solution : pour cela, voyez un cours d'Analyse Numérique.

Il faut garder le slogan suivant en tête :

"Lorsqu'on soit résoudre un problème d'Analyse, il faut toujours commencer par utiliser des théorèmes utilisant la complétude."

Par exemple, pensez à l'énoncé (hyper-classique) suivant : "toute suite réelle croissante bornée est convergente dans $\mathbb{R}$ ". On a alors une limite (pensez à la constante d'Euler), mais on ne sait pas grand chose de sa valeur. Pour prouver cet énoncé, on peut montrer que la suite est de Cauchy, en admettant que $\mathbb{R}$ est complet (après, cela dépend de la construction de $\mathbb{R}$ qu'on adopte), et donc elle converge.

2. Énoncé et preuve du théorème du point fixe

2.1. Définitions. Soit $T : X \rightarrow X$ une fonction d'un ensemble X dans lui-même. Un point fixe de T est un point $x \in X$ tel que $T(x) = x$.

Soit (X, d) un espace métrique. Une application contractante sur X est une application $T : X \rightarrow X$ telle qu'il existe $k \in [0, 1)$ tel que $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. En d'autres termes, T est k -Lipschitzienne avec $k < 1$.

2.2. Énoncé.

THÉORÈME 52 (Théorème du point fixe de Picard). *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $T : X \rightarrow X$ une application contractante de rapport $k \in [0, 1)$. Alors T admet un unique point fixe $x \in X$. De plus, étant donné un point $z \in X$, on définit la suite $x_0 := z$ et $x_{n+1} = T(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(x_n)_n$ converge vers x dans (X, d) et on a le contrôle*

$$(1) \quad d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2.3. Optimalité des hypothèses. Le théorème n'a plus lieu si :

- T n'envoie pas X sur lui-même. Exemple : $T : [0, 1] \rightarrow [1, \frac{3}{2}]$ avec $T(x) = 1 + \frac{x}{2}$ pour tout $x \in [0, 1]$
- X n'est pas complet. Exemple : $T : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ avec $T(x) = \frac{x}{2}$ pour tout $x \in (0, 1)$
- T n'est pas contractante. Exemple : $T : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ avec $T(x) = 2x + 1$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

2.4. Preuve du Théorème 52. On se donne $T : X \rightarrow X$, k et $(x_n)_n$ comme dans l'énoncé du théorème.

Unicité. On suppose que $x, y \in X$ sont des points fixes. Alors $d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$, et donc $(1 - k)d(x, y) \leq 0$. Comme $k < 1$, on obtient $d(x, y) \leq 0$ et donc $x = y$. Ceci prouve l'unicité.

Existence. *Etape 1 :* Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a $d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1})$. Une récurrence immédiate donne alors

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On fixe $p \geq 1$. Avec l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{l=0}^{p-1} d(x_{n+l+1}, x_{n+l}) \leq \sum_{l=0}^{p-1} k^{n+l} d(x_1, x_0) \\ &= k^n d(x_1, x_0) \sum_{l=0}^{p-1} k^l = k^n d(x_1, x_0) \frac{1 - k^p}{1 - k} \text{ since } k \neq 1 \\ (2) \quad &\leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_1, x_0) \text{ car } 0 \leq k < 1. \end{aligned}$$

Etape 2 : Montrons que (x_n) est une suite de Cauchy. On fixe $\epsilon > 0$. Comme $|k| < 1$, alors $k^n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) < \epsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi $d(x_{n+p}, x_n) < \epsilon$ pour tout $n \geq n_0$ et $p \in \mathbb{N}$. Ainsi (x_n) est une suite de Cauchy sequence. Comme X est complet, alors il existe $x \in X$ tel que $x_n \rightarrow x$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Etape 3 : Montrons que x est un point fixe. On a $x_{n+1} = T(x_n)$ for all $n \in \mathbb{N}$. Comme T est Lipschitzienne, elle est continue. En passant à la limite, on a $x = T(x)$ et x est un point fixe. A la limite $p \rightarrow +\infty$ dans (2), on obtient (1). Ceci prouve le Théorème 52.

Exercice 4 : Soit (X, d) un espace métrique complet. On se donne une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que (x_n) converge vers un point $x \in X$. On suppose qu'il existe $l \in X$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $d(x_n, l) \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrez alors que $d(x, l) \leq \alpha$.

Solution : Par l'inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d(x, l) \leq d(x, x_n) + d(x_n, l) \leq d(x, x_n) + \alpha$. On fixe $\epsilon > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, x_n) < \epsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Et donc pour $n \geq n_0$, on a $d(x, l) \leq \epsilon + \alpha$. Ceci étant valide pour tout $\epsilon > 0$, en faisant $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient le résultat. $\square$

3. Applications

3.1. Quelques applications directes.

- Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sqrt{1+x}$.

DÉMONSTRATION. Bien entendu, on ne va pas se ramener à une équation du second degré pour cet exemple. Si une solution existe, alors $x \geq 0$. On pose $T : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ tel que $T(x) = \sqrt{1+x}$ pour tout $x \geq 0$. Cette fonction est bien définie, elle est dérivable et $0 \leq T'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il suit alors de l'Inégalité des Accroissements Finis (see Théorème 126) que $|T(x) - T(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$ pour tous $x, y \in [0, +\infty[$. Il suit alors du théorème du point fixe qu'il existe $x \in \mathbb{R}_+$ unique tel que $x = T(x) = \sqrt{1+x}$. Remarque : en résolvant l'équation du second degré, on trouve $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. $\square$

- Soit $k \in]0, 1[$ et $h \in C^1(\mathbb{R})$ tels que $|h'(x)| \leq k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit

$$\begin{cases} \phi : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x - h(y), y - h(x)) \end{cases}.$$

Alors ϕ est un C^1 -difféomorphisme.

Exercice 5 : Prouvez cet énoncé. Voici quelques indications :

- On fixe $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. Montrez que prouver l'existence de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\phi(x, y) = (X, Y)$ est équivalent à trouver un point fixe d'une applications $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bien choisie.
- Avec une norme sur $\mathbb{R}^2$ bien choisie et l'Inégalité des Accroissements Finis, montrez que T est contractante.
- Utilisez le Théorème d'Inversion Globale (voir Théorème 119) pour conclure.

3.2. Panorama (sélectif) d'applications plus sophistiquées. Le Théorème du point fixe de Picard est utilisé dans d'innombrables contextes. :

- **Preuve du Théorème d'Inversion Locale** (voir Théorème 118). Pour y proche de $f(x_0)$ dans un espace ad-hoc, trouver x proche de x_0 tel que $y = f(x)$ revient à résoudre $x = T(x)$ avec $T(x) = x - f(x) + y$. En supposant que $df_{x_0} = Id$ (ce qui est toujours possible), T est contractante au voisinage de x_0 : ceci donne l'injectivité et la surjectivité locales.
- **Preuve du Théorème de Cauchy-Lipschitz.** Afin de résoudre $x'(t) = f(x(t))$ avec $x(0) = x_0$, on écrit $x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds$ pour tout t . Ainsi la fonction x est solution de $x = T(x)$ avec $T(x)(t) := x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds$ pour tout t . La difficulté est de trouver un espace X bien adapté tel que $T : X \rightarrow X$ soit contractante. Voir l'exercice ci-dessous pour une preuve dans un cas particulier.
- **En Analyse Numérique**, réduire un problème général à un problème de point fixe est souvent une étape préliminaire. La vitesse de convergence est alors explicite, ce qui est un point positif. Malheureusement, ce n'est pas encore suffisant et les spécialistes doivent développer des méthodes plus performantes pour obtenir une meilleure vitesse de convergence.
- **En Sciences Economiques**, on se ramène souvent à des problèmes de points fixes pour des applications contractantes. Mais ceci étant très contraignant, les économistes sont souvent demandeurs de méthodes plus sophistiquées : avis à toutes et tous, il y a du travail dans ce secteur.

Exercice 6 : Le Théorème de Cauchy-Lipschitz dans un cas particulier.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $K > 0$ tel que

$$|f(x)| \leq M \text{ and } |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on cherche à prouver l'existence de $\delta > 0$ et $x \in C^1([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ tels que that

$$(3) \quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) & \text{pour tout } t \in [-\delta, \delta] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Soit $\delta > 0$ qui sera fixé plus tard.

- Soit $x \in C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ une fonction continue. Montrez qu'on a l'équivalence :

$$\{x \text{ est } C^1 \text{ et résoud (3)}\} \Leftrightarrow \left\{ x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds \text{ pour tout } t \in [-\delta, \delta] \right\}.$$

On définit

$$\begin{aligned} T : C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R}) &\rightarrow C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R}) \\ x &\mapsto \left(t \mapsto x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds \right) \end{aligned}$$

- Montrez que T est bien définie et que pour $\delta > 0$ bien choisi, T est contractante en munissant $C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- Montrez l'existence et l'unicité de la solution de (3).

3.3. Continuité par rapport aux paramètres.

Proposition 53. Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $F : E \times X \rightarrow X$ une fonction continue pour la topologie produit. On suppose qu'il existe $k \in [0, 1)$ tel que pour tout $\lambda \in E$, $T(\lambda, \cdot) : X \rightarrow X$ est k -Lipschitzienne. Pour tout $\lambda \in E$, il suit du Théorème de Picard qu'il existe un unique $x_\lambda \in X$ qui est un point fixe de $T(\lambda, \cdot)$. Alors l'application $\lambda \rightarrow x_\lambda$ de $E \rightarrow X$ est continue.

Exercice 7 : Démontrez la Proposition 53. Avant de considérer le cas général, commencez par les cas suivants :

- $(E, \mathcal{T})$ est un espace métrique (E, d_E) et il existe $L > 0$ tel que

$$d(T(\lambda, x), T(\lambda', x')) \leq Ld_E(\lambda, \lambda') + kd(x, x')$$

pour tous $\lambda, \lambda' \in E$ et $x, x' \in X$.

- $(E, \mathcal{T})$ est un espace métrique.
- Cas général.

Exercice 8 : On prend les notations de l'exercice 6. Montrez que l'application $(x_0, t) \mapsto x(t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [-\delta, \delta]$, quitte à réduire $\delta > 0$.

4. Lemme de Baire et premières applications**4.1. Enoncé et versions équivalentes.**

4.1.1. *Enoncé originel.*

THÉORÈME 54 (Lemme de Baire). *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses de X . Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ est dense dans X .*

Remarque : La dénombrabilité est essentielle!!! Par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}$, définissons $I_x := \mathbb{R} \setminus \{x\}$, qui est ouvert et dense dans $\mathbb{R}$, qui est lui-même complet. On a alors $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} I_x = \emptyset$ qui est loin d'être dense dans X .

4.1.2. *Version avec des ensembles fermés.*

THÉORÈME 55 (Lemme de Baire, version 2). *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ensembles fermés de X . On suppose que $\text{Int}(F_n) = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire que chaque intérieur est vide). Alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.*

DÉMONSTRATION. On définit $\mathcal{O}_n := X \setminus F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\overline{\mathcal{O}_n} = \overline{X \setminus F_n} = X \setminus \text{Int}(F_n) = X$. Ainsi $\mathcal{O}_n$ est ouvert et dense dans X pour tout $n \in \mathbb{N}$, et il suit du Lemme de Baire que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ est dense dans X . Du coup

$$X = \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n} = \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus F_n)} = \overline{X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n} = X \setminus \text{Int}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n),$$

et donc $\text{Int}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n) = \emptyset$. $\square$

4.1.3. *Un corollaire très utile.*

Corollary 56. *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de fermés de X telle que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur non-vide. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$.*

4.2. Preuve du Lemme de Baire. Soient (X, d) et $(\mathcal{O}_n)_n$ comme dans l'énoncé du Théorème 54, et définissons $\mathcal{O} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n$. Pour montrer que $\mathcal{O}$ est dense, on se donne $U \in X$ un ouvert et on va montrer que $\mathcal{O} \cap U \neq \emptyset$.

Etape 1 : construction de boules incluses les unes dans les autres. Comme $\mathcal{O}_0$ est dense et U est ouvert, alors $\mathcal{O}_0 \cap U \neq \emptyset$. De plus $\mathcal{O}_0 \cap U$ est ouvert comme intersection finie d'ouverts. Ainsi il existe $x_0 \in X$ et $\rho_0 > 0$ tels que

$$B(x_0, \rho_0) \subset \mathcal{O}_0 \cap U.$$

On définit

$$r_0 := \min \left\{ \frac{\rho_0}{2}, 1 \right\}.$$

Pour construire le point suivant, comme précédemment, on a $\mathcal{O}_1 \cap B(x_0, r_0)$ ouvert non-vide, donc il existe $x_1 \in X$ and $\rho_1 > 0$ tels que

$$B(x_1, \rho_1) \subset \mathcal{O}_1 \cap B(x_0, r_0).$$

On définit alors

$$r_1 := \min \left\{ \frac{\rho_1}{2}, \frac{1}{2} \right\}.$$

Les termes suivants sont construits par récurrence. Pour $k \geq 1$, on pose l'hypothèse

$$\mathbf{H}_k := \left\{ \begin{array}{l} \exists x_1, \dots, x_k \in X, \rho_1, \dots, \rho_k > 0 \text{ s.t.} \\ B(x_i, \rho_i) \subset \mathcal{O}_i \cap B(x_{i-1}, r_{i-1}) \text{ et } r_i := \min \left\{ \frac{\rho_i}{2}, \frac{1}{2^i} \right\} \\ \text{pour } 1 \leq i \leq k \end{array} \right\}$$

Il suit de la construction ci-dessus que $\mathbf{H}_1$ est vraie. Pour $k \geq 1$, on suppose que $\mathbf{H}_k$ est vraie, et on se donne alors $x_1, \dots, x_k$ et $\rho_1, \dots, \rho_k$ comme dans l'hypothèse de récurrence. Comme $\mathcal{O}_{k+1} \cap B(x_k, r_k)$ est ouvert (intersection fini et non-vide (densité), alors il existe $x_{k+1} \in X$ et $\rho_{k+1} > 0$ tels que $B(x_{k+1}, \rho_{k+1}) \subset \mathcal{O}_{k+1} \cap B(x_k, r_k)$. Ainsi $\mathbf{H}_{k+1}$ est vraie. Le procédé de récurrence donne donc que $\mathbf{H}_k$ est vraie pour tout k .

Par conséquent¹, on obtient une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X$ et $(\rho_k)_k > 0$ tels que pour tout k

$$B(x_k, \rho_k) \subset \mathcal{O}_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1}) \text{ et } r_k := \min \left\{ \frac{\rho_k}{2}, \frac{1}{2^k} \right\} \text{ pour tout } k \geq 1$$

Etape 2 : On affirme que $(x_k)_k$ est une suite de Cauchy dans X .

Preuve : Comme $r_k < \rho_k$ pour tout $k \geq 0$, on a $B(x_k, r_k) \subset B(x_{k-1}, r_{k-1})$ pour tout $k \geq 1$. Par récurrence on a $B(x_{k+p}, r_{k+p}) \subset B(x_k, r_k)$ pour tous $k, p \in \mathbb{N}$, et donc $x_{k+p} \in B(x_k, r_k)$ pour tout $k, p \in \mathbb{N}$, ce qui nous donne

$$d(x_{k+p}, x_k) < r_k \leq \frac{1}{2^k} \text{ pour tous } k, p \in \mathbb{N}.$$

Ainsi $(x_k)_k$ est une suite de Cauchy dans (X, d) . □

Comme (X, d) est complet, alors $(x_k)_k$ converge, et on note sa limite $x \in X$.

Etape 3 : On affirme que $x \in B(x_k, \rho_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Preuve : On a déjà remarqué que $x_{k+p} \in B(x_k, r_k)$. A la limite $p \rightarrow +\infty$, on obtient $x \in \overline{B(x_k, r_k)} \subset \overline{B(x_k, \rho_k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (Attention : ces deux derniers ensembles ne sont pas égaux en général). Comme $r_k < \rho_k$, on a $x \in B(x_k, \rho_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

Etape 4 : Conclusion de la preuve. Il suit de la définition des boules que $B(x_k, \rho_k) \subset \mathcal{O}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc $x \in \mathcal{O}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $x \in \mathcal{O}$. De plus, $x \in B(x_0, \rho_0) \subset U$, donc $x \in \mathcal{O} \cap U$ et du coup $\mathcal{O} \cap U \neq \emptyset$. Ceci étant valable pour tout U ouvert non-vide de X , on en déduit que $\mathcal{O}$ est dense dans (X, d) . Ceci conclut la preuve du Lemme de Baire.

4.3. Application : Existence de fonctions continues différentiables nulle-part. Cette section est dédiée au théorème suivant :

THÉORÈME 57. *Il existe des fonctions continues sur $[0, 1]$ dérivables nulle-part. Plus précisément, l'ensemble de ces fonctions est dense dans $C^0([0, 1])$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

La preuve fait l'objet du problème suivant qui sera fait en devoir. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$O_k := \{f \in C([0, 1]) \mid \forall x \in [0, 1], \exists y \in [0, 1] \text{ tel que } |f(x) - f(y)| > k|x - y|\}.$$

1. Montrez que O_k est ouvert dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. *Indication :* on pourra montrer que le complémentaire est fermé.

2. Pour $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi :

$$\bullet f_n\left(\frac{k}{n}\right) = 0 \text{ pour tout } k = 0, \dots, n$$

1. Il y a un point à clarifier à ce niveau : on a prouvé que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_0, \dots, x_k$ qui vérifient notre hypothèse. Cependant, on veut une suite (x_k) définie pour tout k . On s'en sort en prenant une famille maximale et avec un Lemme de Zorn dénombrable, et on a notre suite.

- $f_n(\frac{k+1/2}{n}) = 1$ pour tout $k = 0, \dots, n-1$
- f_n est continue et affine sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1/2}{n}]$ et sur $[\frac{k+1/2}{n}, \frac{k+1}{n}]$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

Dessinez les fonctions f_n . Montrez que pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $y \in [0, 1]$ tel que $|f_n(x) - f_n(y)| > n|x - y|$.

3. En utilisant que les fonctions Lipschitziennes sont denses dans $C([0, 1])$ (Pourquoi au fait ?), montrez que O_k est dense dans $C([0, 1])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. En utilisant le Lemme de Baire, montrez le Théorème 57.

Remarques :

- Ceci prouve l'existence de fonctions continues nulle-part dérivables, mais on n'a pas d'expression explicite. Il y a des exemples explicites, comme le contre-exemple de Weierstraß $\sum_n a^n \sin(b^n x)$ avec $a, b > 0$ bien choisis.
- Lorsque vous devez prouver l'existence d'un objet "exotique", "bizarre" ou "étranges", ayez le réflexe d'utiliser le Lemme de Baire : un ensemble dense est non-vidé.

Deuxième partie

Structure d'espace vectoriel normé

Applications linéaires continues

1. Applications (multi)linéaires : exemples

1.1. Caractérisation classique.

Proposition 58. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn munis des topologies d'evn associées. Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) T est continue ;
- (ii) T est continue en 0 ;
- (iii) Il existe $M > 0$ tel que $\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ pour tout $x \in E$
- (iv) T est Lipschitzienne.

Preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii) : évident... (ii) $\Rightarrow$ (iii) Soit T continue en 0. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour $z \in E$ tel que $\|z\|_E < \alpha$, on a $\|T(z) - T(0)\|_F < 1$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. On a

$$\left\| \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_E} \right\|_E < \alpha \Rightarrow \left\| T \left(\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F < 1,$$

et donc $\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ avec $M := 2/\alpha$ indépendant de $x \neq 0$. Cette inégalité s'étend à 0, ce qui prouve (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Avec T comme dans (iv), en utilisant la linéarité, pour $x, y \in E$, on a $\|T(x) - T(y)\|_F = \|T(x - y)\|_F \leq M\|x - y\|_E$, donc T est Lipschitzienne.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : est conséquence de la continuité d'une fonction Lipschitzienne.

Ceci prouve l'équivalence et donc la proposition. $\square$

Definition 59. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn munis des topologies d'evn associées. On note $L_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F . Pour $T \in L(E, F)$ une application linéaire, on note

$$\|T\|_{E \rightarrow F} := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E \text{ t.q. } \|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F \in [0, +\infty].$$

Par conséquent,

$$L_c(E, F) = \{T \in L(E, F) / \|T\|_{E \rightarrow F} < +\infty\}.$$

1.2. La norme $\|\cdot\|_{E \rightarrow F}$.

Proposition 60. Pour $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn, alors $\|\cdot\|_{E \rightarrow F}$ est une norme sur $L_c(E, F)$.

La preuve est laissée en exercice.

Cette norme passe bien à la composition :

Proposition 61. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois evn. Soient $f \in L_c(E, F)$ et $g \in L_c(F, G)$. Alors $g \circ f \in L_c(E, G)$ et

$$\|g \circ f\|_{E \rightarrow G} \leq \|g\|_{F \rightarrow G} \|f\|_{E \rightarrow F}.$$

1.3. Quelques exemples.

- Si E est de dimension finie, toute application linéaire $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ est continue. En d'autres termes $L_c(E, F) = L(E, F)$ si E est de dimension finie.

Preuve : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $N_\infty(x) := \max\{|x^i|/i = 1, \dots, n\}$ pour $x = \sum_i x^i e_i \in E$. Alors N_∞ est une norme sur E et pour $x = \sum_i x^i e_i \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_F &= \left\| T\left(\sum_i x^i e_i\right) \right\|_F \leq \sum_i |x^i| \|T(e_i)\|_F \\ &\leq \left(\sum_i |x^i| \|T(e_i)\|_F \right) \cdot N_\infty(x) \end{aligned}$$

et donc $T : (E, N_\infty) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ est continue, puis $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ aussi car les normes sont équivalentes en dimension finie.

- Soit $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ une application linéaire. On note $A = (a_{ij})$ sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors, en munissant $\mathbb{R}^n$ de $\|x\|_\infty := \max\{|x_i|/i = 1, \dots, n\}$, on a

$$(4) \quad \|u\|_{\infty \rightarrow \infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Preuve : On se donne $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a

$$u(x) = \sum_j x_j u(e_j) = \sum_j x_j \left(\sum_i a_{ij} e_i \right) = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) e_i.$$

Du coup,

$$\begin{aligned} \|u(x)\|_\infty &= \max_i \left\{ \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \right\} \leq \max_i \left\{ \sum_j |a_{ij}| \cdot |x_j| \right\} \\ &\leq \max_i \left\{ \sum_j |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty \right\} \leq \max_i \left\{ \sum_j |a_{ij}| \right\} \cdot \|x\|_\infty \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Donc

$$\|u\|_{\infty \rightarrow \infty} \leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Montrons l'inégalité inverse. Soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

On définit $\tilde{x}_j := 1$ si $a_{i_0j} \geq 0$, et $\tilde{x}_j := -1$ si $a_{i_0j} < 0$. On pose $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$. On a alors $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$ et

$$\begin{aligned} \frac{\|u(\tilde{x})\|_\infty}{\|\tilde{x}\|_\infty} = \|u(\tilde{x})\|_\infty &\geq \left| \sum_j a_{i_0j} \tilde{x}_j \right| = \left| \sum_j |a_{i_0j}| \right| \\ &= \sum_j |a_{i_0j}| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \end{aligned}$$

Et donc $\|u\|_{\infty \rightarrow \infty} \geq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, ce qui prouve l'inégalité inverse puis (4). $\square$

On déterminera en exercices les valeurs de $\|u\|$ avec d'autres normes sur $\mathbb{R}^n$.

- La fonction

$$\left\{ \begin{array}{ccc} D : & (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) & \rightarrow (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \\ & f & \mapsto f' \end{array} \right.$$

Est linéaire, mais pas continue. En effet, en posant $f_n(x) := x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on a

$$\frac{\|D(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} = n \rightarrow +\infty \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

donc D n'est pas continue. Elle le devient si on munit $C^1([0, 1])$ de $\|\cdot\|_{C^1}$.

- La fonction

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I : & (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) & \rightarrow (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \\ & f & \mapsto (x \mapsto \int_0^x f(t) dt) \end{array} \right.$$

est continue. La linéarité est conséquence de la construction de l'intégrale. Concernant la continuité : pour $x \in [0, 1]$ et $f \in C^0([0, 1])$, on a

$$|I(f)[x]| = \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq |x| \cdot \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Ainsi, $\|I(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, et donc I est continue.

La non-continuité de D et la continuité de I sont de bonnes raisons de mettre les EDOs sous forme intégrale (voir l'exercice 6 plus haut).

- Pour $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} + : & E \times E & \rightarrow E \\ & (x, y) & \mapsto x + y \end{array} \right.$$

est continue, où on a muni $E \times E$ de la norme produit $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_{E \times E} := \|x\|_E + \|y\|_E$. En effet, $+$ est linéaire et pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E = \|(x, y)\|_{E \times E}$ d'après l'inégalité triangulaire.

1.4. Formes linéaires continues. Le résultat suivant est à connaître :

Proposition 62. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn et soit $\varphi \in E^\star := L(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire. Alors

$$\{\varphi : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue}\} \Leftrightarrow \{\text{Ker } \varphi \text{ est fermé}\}.$$

Esquisse de la preuve : Seul le cas $(\Leftarrow)$ est délicat. On se donne donc φ linéaire dont le noyau est fermé. Montrez que si φ n'est pas continue, alors il existe une suite $(y_n)_n$ de E telle que $y_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $f(y_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Concluez en étudiant la suite $(y_n - y_0)_n$.

2. Espaces de Banach et $Gl_c(E)$

2.1. Quand $L_c(E, F)$ est-il un Banach ?

2.1.1. Résultat essentiel.

Proposition 63. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn. On suppose que $E \neq \{0\}$. On munit $L_c(E, F)$ de la norme $\|\cdot\|_{E \rightarrow F}$. Alors on a l'équivalence

$$\{(F, \|\cdot\|_F) \text{ est un Banach}\} \Leftrightarrow \{(L_c(E, F), \|\cdot\|_{E \rightarrow F}) \text{ est un Banach}\}.$$

2.1.2. Remarques.

- Comme on l'a vu dans d'autres situations, c'est l'espace d'arrivée qui transfère sa structure.
- Du coup, $E' = L_c(E, \mathbb{R})$ est un Banach quel que soit l'evn E !

2.1.3. *Preuve de $(\Rightarrow)$:* Elle est assez directe et s'inspire de la preuve de la complétude d'espaces de fonctions. Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L_c(E, F)$.

Etape 1 : Pour tout $x \in E$, montrons que $(T_n(x))_n$ converge dans F .

Preuve de l'étape 1 : on se donne $\epsilon > 0$. Comme (T_n) est de Cauchy, il existe $n_\epsilon > 0$ tel que $p, q \geq n_\epsilon \Rightarrow \|T_p - T_q\|_{E \rightarrow F} < \epsilon/(1 + \|x\|_E)$. Donc $\|T_p(x) - T_q(x)\|_F \leq \|T_p - T_q\|_{E \rightarrow F} \|x\|_E < \epsilon$ pour $p, q \geq n_\epsilon$. Donc $(T_n(x))_n$ est de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_F)$ complet, donc elle converge. On note $T(x)$ sa limite.

Etape 2 : La fonction $T : E \rightarrow F$ est linéaire et continue.

Preuve de l'étape 2 : La linéarité suit de la convergence simple de (T_n) vers T . Soit $\epsilon > 0$, et soit $n_\epsilon > 0$ tel que $p, q \geq n_\epsilon \Rightarrow \|T_p - T_q\|_{E \rightarrow F} < \epsilon$. Du coup pour $x \in E$ et $p, q \geq n_\epsilon$, on a $\|T_p(x) - T_q(x)\|_F \leq \|T_p - T_q\|_{E \rightarrow F} \|x\|_E \leq \epsilon \|x\|_E$. A la limite $q \rightarrow +\infty$, on a donc $\|T_p(x) - T(x)\|_F \leq \epsilon \|x\|_E$ pour tout $x \in E$ et tout $p \geq n_\epsilon$. Donc l'application linéaire $T_p - T$ est continue, or T_p continue, donc T est continue.

Etape 3 : La suite $(T_n)_n$ converge vers T .

Preuve de l'étape 3 : On se donne $\epsilon > 0$. En utilisant les résultats de l'étape 3, on a $\|T_p(x) - T(x)\|_F \leq \epsilon \|x\|_E$ pour tout $x \in E$ et tout $p \geq n_\epsilon$. Donc $\|T_p - T\|_{E \rightarrow F} \leq \epsilon$ pour tout $p \geq n_\epsilon$. Donc $(T_n)_n$ converge vers T dans $L_c(E, F)$, et donc $(L_c(E, F), \|\cdot\|_{E \rightarrow F})$ est complet. $\square$

2.1.4. *Preuve de $(\Leftarrow)$:* cela doit être plus simple... mais on a besoin d'un outil qui n'est pas trivial. On se donne $x_0 \in E \neq \{0\}$ et on se donne $\varphi \in E'$ telle que $\varphi(x_0) \neq 0$: l'existence n'est pas évidente ! Ça marche pour un Hilbert avec le Théorème de projection : dans le cas général, il faut faire appel au Théorème de Hahn-Banach qui sera vu au second semestre.

On suppose que $L_c(E, F)$ est un Banach. Soit $(y_n)_n$ une suite de Cauchy dans F . On définit $f_n \in L_c(E, F)$ par $f_n(x) = \varphi(x)y_n$ pour tous $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. On obtient que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, $\|f_p - f_q\|_F \leq \|\varphi\|_{E'} \|y_p - y_q\|_F$, et donc $(f_n)_n$ est de Cauchy. Comme $L_c(E, F)$ est un Banach, il existe $f \in L_c(E, F)$ telle que $(f_n) \rightarrow f$ dans

$L_c(E, F)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Du coup, on a

$$\begin{aligned} \left\| y_n - \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} \right\|_F &= \frac{\|\varphi(x_0)y_n - f(x_0)\|_F}{|\varphi(x_0)|} \\ &= \frac{\|f_n(x_0) - f(x_0)\|_F}{|\varphi(x_0)|} \leq \frac{\|f_n - f\|_{E \rightarrow F} \|x_0\|_E}{|\varphi(x_0)|} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. Donc $(F, \|\cdot\|_F)$ est un Banach. $\square$

2.2. L'ensemble $Gl_c(E, F)$.

Definition 64. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn. On définit

$$Gl_c(E, F) := \{u \in L_c(E, F) \text{ bijective telle que } u^{-1} \in L_c(F, E)\}.$$

En d'autres termes, $Gl_c(E, F)$ est l'ensemble des homéomorphismes linéaires entre E et F .

Remarques :

- Si E et F sont de dimension finie, la continuité est gratuite.
- Si E et F sont de dimensions finies, mais distinctes, alors $Gl_c(E, F) = \emptyset$.
- Il suit du Corollaire 74 (plus loin...) que lorsque E et F sont des Banachs, la continuité de u^{-1} est automatique si u est continue.

2.3. Un résultat quantitatif important.

Proposition 65. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach. On munit $L_c(E) = L_c(E, E)$ de la norme $\|\cdot\|_{E \rightarrow E}$. Alors $B(Id_E, 1) \subset Gl_c(E)$.

Preuve : On se donne $h \in L_c(E)$ tel que $\|h\|_{E \rightarrow E} < 1$. Déterminons l'inverse de $Id_E - h$. On peut subodorer que, si cela a un sens, l'inverse sera $\sum_n h^n$. Pour $N \in \mathbb{N}$, posons donc $S_N := \sum_{n=0}^N h^n$.

Etape 1 : Montrons que (S_N) converge dans $L_c(E)$.

On va utiliser la convergence absolue. Pour $N \in \mathbb{N}$, on a avec la Proposition 61

$$(5) \quad \sum_{n=0}^N \|h^n\|_{E \rightarrow E} \leq \sum_{n=0}^N \|h\|_{E \rightarrow E}^n < \infty \text{ car } \|h\|_{E \rightarrow E} < 1.$$

Ainsi la série est absolument convergente dans $L_c(E)$ complet, donc elle converge. Si vous n'êtes pas très à l'aise avec ce résultat sur un Banach quelconque, voici la preuve dans notre cas. On pose

$$S_N := \sum_{n=0}^N h^n \text{ pour } N \geq 0.$$

Pour $N, P \in \mathbb{N}$, on a

$$\|S_{N+P} - S_N\|_{E \rightarrow E} = \left\| \sum_{n=N+1}^{N+P} h^n \right\|_{E \rightarrow E} \leq \sum_{n=N+1}^{N+P} \|h^n\|_{E \rightarrow E}.$$

Or la suite $N \mapsto \sum_{n=0}^N \|h^n\|_{E \rightarrow E}$ est réelle, croissante (somme de termes positifs) et bornée (d'après (5)), donc elle converge vers une limite L . Ainsi, pour $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq N_\epsilon$, on a

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \|h^n\|_{E \rightarrow E} = L - \sum_{n=0}^N \|h^n\|_{E \rightarrow E} < \epsilon,$$

et donc pour $N \geq N_\epsilon$, on a $\|S_{N+P} - S_N\|_{E \rightarrow E} < \epsilon$. La suite $(S_N)_N$ est donc de Cauchy dans $L_c(E)$ complet, donc elle converge. $\square$

Soit $S := \lim_N S_N$ la limite dans $L_c(E)$.

Etape 2 : Montrons que $(Id_E - h)S = S(Id_E - h) = Id_E$.

Un calcul direct montre que pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$(Id_E - h)S_N = S_N(Id_E - h) = Id_E - h^{N+1}.$$

De plus, on a

$$\|(Id_E - h)S_N - (Id_E - h)S\|_{E \rightarrow E} = \|(Id_E - h)(S_N - S)\|_{E \rightarrow E} \leq \|Id_E - h\|_{E \rightarrow E} \|S_N - S\|_{E \rightarrow E}.$$

Comme $(S_N) \rightarrow S$ et $h^{N+1} \rightarrow 0$ pour $\|\cdot\|_{E \rightarrow E}$ lorsque $N \rightarrow +\infty$, en passant à la limite, on obtient $(Id_E - h)S = S(Id_E - h) = Id_E$. Donc $Id_E - h$ est bijectif et son inverse est S . Comme S est linéaire continue, on obtient $Id_E - h \in Gl_c(E)$. $\square$

2.4. Deux corollaires.

Corollary 66. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un Banach. Alors $Gl_c(E)$ est un ouvert de $L_c(E)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $u \in Gl_c(E)$, et soit $h \in L_c(E)$. On écrit alors $u + h = u(Id_E + u^{-1}h)$. On suppose que $\|h\|_{E \rightarrow E} < \frac{1}{\|u^{-1}\|_{E \rightarrow E}}$. On a alors

$$\|u^{-1}h\|_{E \rightarrow E} \leq \|u^{-1}\|_{E \rightarrow E} \|h\|_{E \rightarrow E} < 1,$$

et il suit de la Proposition 65 que $Id_E + u^{-1}h \in Gl_c(E)$, or $u \in Gl_c(E)$, donc $u + h = u(Id_E + u^{-1}h) \in Gl_c(E)$ par composition. Ainsi

$$(6) \quad B_{L_c(E)}\left(u, \frac{1}{\|u^{-1}\|_{E \rightarrow E}}\right) \subset Gl_c(E) \text{ pour tout } u \in Gl_c(E).$$

Donc $Gl_c(E)$ est un ouvert de $L_c(E)$. $\square$

Corollary 67. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un Banach. Soit $u \in L_c(E)$ un endomorphisme continu. On appelle spectre de u l'ensemble $Spec(u) := \{\lambda \in \mathbb{R} / u - \lambda Id_E \notin Gl_c(E)\}$. Alors $Spec(u)$ est un compact (éventuellement vide).*

DÉMONSTRATION. On pose $\phi : \mathbb{R} \rightarrow L_c(E)$ définie par $\phi(\lambda) = u - \lambda Id_E$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On a ϕ continue et $Spec(u) = \phi^{-1}(L_c(E) \setminus Gl_c(E))$, donc c'est fermé comme image réciproque du complémentaire d'un ouvert par une application continue. On se donne $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| > \|u\|_{E \rightarrow E}$. On a alors $\|\lambda^{-1}u\|_{E \rightarrow E} < 1$, donc $Id_E - \lambda^{-1}u \in Gl_c(E)$ d'après Proposition 65, et donc $\lambda Id_E - u \in Gl_c(E)$. Ainsi $\lambda \notin Spec(u)$ dès que $|\lambda| > \|u\|_{E \rightarrow E}$. Donc $Spec(u) \subset [-\|u\|_{E \rightarrow E}, \|u\|_{E \rightarrow E}]$ est borné. Comme il est fermé, il est compact. $\square$

3. Apparté : construction et propriétés de l'exponentielle

3.1. Prologue : continuité du carré.

3.2. Convergence absolue et exponentielle.

Proposition 68. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach. Alors la limite*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{u^n}{n!} \text{ existe.}$$

On l'appelle exponentielle de u et on la note $e^u = \exp(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$.

Preuve : Comme $L_c(E) = L_c(E, E)$ est un Banach muni de $\|\cdot\|_{E \rightarrow E}$, on va utiliser la convergence absolue. Pour $N \in \mathbb{N}$, on a avec la Proposition ??

$$(7) \quad \sum_{n=0}^N \left\| \frac{u^n}{n!} \right\|_{E \rightarrow E} = \sum_{n=0}^N \frac{\|u^n\|_{E \rightarrow E}}{n!} \leq \sum_{n=0}^N \frac{\|u\|_{E \rightarrow E}^n}{n!} \leq e^{\|u\|_{E \rightarrow E}} < \infty.$$

Ainsi la série est absolument convergente dans $L_c(E)$ complet, donc elle converge (Cf preuve de l'inversibilité de $Id_E - h$ plus haut). $\square$

3.3. Régularité de l'exponentielle.

Proposition 69. *On se donne $(E, \|\cdot\|_E)$ un Banach. Alors $\exp : L_c(E) \rightarrow L_c(E)$ est continue.*

Attention : On sait que pour tout $u \in L^c(E)$, alors $\exp(u) \in L_c(E)$, et donc $x \mapsto \exp(u)[x]$ est continue. Ici, on va prouver que $u \mapsto \exp(u)$ est continue.

1er essai (pas concluant) de preuve : Pour montrer qu'une limite est continue, on est naturellement tenté de montrer que c'est une limite uniforme de fonctions continues. Pour $N \in \mathbb{N}$, on va poser

$$\left\{ \begin{array}{ccc} S_N : L_c(E) & \rightarrow & L_c(E) \\ u & \mapsto & \sum_{n=0}^N \frac{u^n}{n!} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} S_\infty : L_c(E) & \rightarrow & L_c(E) \\ u & \mapsto & \sum_{n=0}^\infty \frac{u^n}{n!} \end{array} \right.$$

(en fait $S_\infty = \exp$). Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, la fonction S_N est continue (pas évident : il faut d'abord montrer par récurrence que $u \mapsto u^n$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$). On se donne ensuite $u \in L_c(E)$: en utilisant les calculs précédents, on a pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\|(S_\infty - S_N)(u)\|_{E \rightarrow E} \leq \sum_{n=N+1}^\infty \frac{\|u\|_{E \rightarrow E}^n}{n!}$$

mais

$$\sup_{u \in L_c(E)} \sum_{n=N+1}^\infty \frac{\|u\|_{E \rightarrow E}^n}{n!} \geq \sup_{u \in L_c(E)} \frac{\|u\|_{E \rightarrow E}^{N+1}}{(N+1)!} = +\infty \dots$$

Donc on ne va pas pouvoir rendre cela petit. En fait, la suite $(S_N)_N$ ne converge pas uniformément sur $L_c(E)$ tout entier. En revanche, ça va marcher sur les bornés.

Preuve (qui fonctionne) : On prend les mêmes notations que pour le premier essai. On fixe $R > 0$ et on prend la boule

$$B_{L_c(E)}(0, R) = \{u \in L_c(E) / \|u\|_{E \rightarrow E} < R\}.$$

Avec les calculs précédents, on a alors pour $u \in B_{L_c(E)}(0, R)$ et $N \in \mathbb{N}$,

$$\|(S_\infty - S_N)(u)\|_{E \rightarrow E} \leq \sum_{n=N+1}^\infty \frac{\|u\|_{E \rightarrow E}^n}{n!} \leq \sum_{n=N+1}^\infty \frac{R^n}{n!}.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sum_n R^n/n!$ est une série convergente, il existe $N_\epsilon > 0$ tel que $\sum_{n=N+1}^\infty \frac{R^n}{n!} < \epsilon$ pour tout $N \geq N_\epsilon$, et donc

$$\|(S_\infty - S_N)(u)\|_{E \rightarrow E} < \epsilon \text{ pour tout } u \in B_{L_c(E)}(0, R) \text{ et } N \geq N_\epsilon.$$

Ainsi, $(S_N)_n$ converge uniformément vers S_∞ sur $B_{L_c(E)}(0, R)$. Comme S_N est continue pour tout N , alors $\exp = S_\infty$ est continue sur $B_{L_c(E)}(0, R)$ pour tout $R > 0$.

Montrons que S_∞ est continue sur $L_c(E)$. On peut y aller avec des images réciproques d'ouverts, mais on va procéder ici avec les suites. Soit une suite $(u_k)_k$ telle que $u_k \in L_c(E)$ pour tout k et $\lim_k u_k = u \in L_c(E)$ pour la norme $\|\cdot\|_{E \rightarrow E}$. Donc la suite $(u_k)_k$ est bornée et il existe $R > 0$ tel que $\|u_k\|_{E \rightarrow E} < R$ pour tout k et $\|u\|_{E \rightarrow E} < R$. Or S_∞ est continue sur $B_{L_c(E)}(0, R)$, donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_\infty(u_k) = S_\infty(u)$ dans $L_c(E)$. ceci étant valable pour toute suite convergente, on en déduit que $S_\infty = \exp$ est continue sur $L_c(E)$. $\square$

$$\frac{\|(S_{N+P} - S_N)(u)\|_{E \rightarrow E}}{\|u\|} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\|u\|_{E \rightarrow E}^n}{n!}$$

Quelques conséquences du Lemme de Baire

1. Application 1 : Théorème de Banach-Steinhaus

1.1. Énoncé.

THÉORÈME 70 (Théorème de Banach-Steinhaus, ou "Uniform Boundedness Théorème"). Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille telle que $T_i : E \rightarrow F$ est linéaire et continue pour tout $i \in I$ ($T_i \in L_c(E, F)$ pour tout $i \in I$). On suppose que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach et que

pour tout $x \in E$, alors $\{T_i(x)/i \in I\}$ est bornée dans F .

Alors il existe $M > 0$ tel que

$$\|T_i(x)\|_F \leq M\|x\|_E \text{ pour tout } x \in E \text{ et tout } i \in I.$$

En terme de normes sur les applications linéaires continues, la conclusion peut se traduire par $\|T_i\|_{E \rightarrow F} \leq M$ pour tout $i \in I$, et on a une borne uniforme sur les normes de tous les T_i s.

1.2. Preuve du Théorème de Banach-Steinhaus. On se donne $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(T_i)_{i \in I}$ comme dans l'énoncé du Théorème. Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit

$$F_N := \{x \in E / \|T_i(x)\|_F \leq N \text{ pour tout } i \in I\} = \bigcap_{i \in I} T_i^{-1}(\overline{B_F(0, N)}).$$

Etape 1 : On affirme que $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} F_N = E$.

Preuve : Soit $x \in E$. Comme $\{T_i(x)/i \in I\}$ est bornée dans F , il existe $M_x > 0$ tel que $\|T_i(x)\|_F \leq M_x$ pour tout $i \in I$. Donc, en prenant $N_x \in \mathbb{N}$ tel que $N_x > M_x$, on a $\|T_i(x)\|_F \leq N_x$ pour tout $i \in I$, et donc $x \in F_{N_x} \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} F_N$. Donc $E \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} F_N$. L'inclusion réciproque est claire. $\square$

Etape 2 : On affirme que F_N est fermé pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Preuve : Comme T_i est continue pour tout i , alors F_N est l'intersection d'images réciproques de fermés par des fonctions continues, donc F_N est fermé. $\square$

Etape 3 : Application du Lemme de Baire et conclusion.

Comme $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet et $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} F_N = E$ est d'intérieur non-vidé, alors la version "fermée" du Lemme de Baire (Théorème 55) donne l'existence de $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Int}(F_{N_0}) \neq \emptyset$. Donc il existe $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que

$$B(x_0, r) \subset F_{N_0}.$$

Soit $z \in E$ tel que $\|z\|_E = 1$. On a

$$x_0 + \frac{r}{2}z \in B(x_0, r) \subset F_{N_0} \Rightarrow \left\|T_i\left(x_0 + \frac{r}{2}z\right)\right\|_F \leq N_0 \text{ pour tout } i.$$

Du coup, comme $x_0 \in F_{N_0}$, on a

$$\|T_i(z)\|_F \leq \frac{2}{r} (\|T_i(x_0)\|_F + N_0) \leq \frac{4N_0}{r} \text{ pour tout } i \in I.$$

Ainsi, avec $M := \frac{4N_0}{r}$, on obtient $\|T_i(z)\|_F \leq M$ pour tout $\|z\|_E = 1$, puis $\|T_i(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ pour tout $x \in E$ et tout $i \in I$. Ceci conclut la preuve du Théorème de Banach-Steinhaus.

1.3. Un corollaire intéressant. Vous savez que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. On vous a martelé (à juste titre) que cela n'a pas lieu lorsque la convergence est seulement ponctuelle. Et bien ça marche quand même avec des applications linéaires sur des espaces de Banach :

Corollary 71. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn tels que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $T : E \rightarrow F$ telles que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est linéaire et continue ;
- $(T_n)_n$ converge simplement vers T .

Alors $T : E \rightarrow F$ est linéaire et continue.

Exercice 9 : Prouvez ce corollaire.

DÉMONSTRATION. La linéarité de T est une conséquence directe de la convergence simple. Soit $x \in E$. Comme $(T_n(x))_n$ converge, elle est bornée dans F . Il suit donc du Théorème 70 qu'il existe $M > 0$ tel que $\|T_n(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$. En passant à la limite $n \rightarrow +\infty$, on obtient $\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ pour tout $x \in E$. Ceci donne la continuité de l'application linéaire T . $\square$

Exercice 10 : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. On munit le produit $E \times F$ de la norme $\|(x, y)\| := \|x\|_E + \|y\|_F$ pour $(x, y) \in E \times F$. Soit $B : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

- En raisonnant comme dans la caractérisation de la continuité des applications linéaires continues, montrez que B est continue si et seulement si il existe $M > 0$ tel que

$$|B(x, y)| \leq M\|x\|_E\|y\|_F \text{ pour tous } x \in E \text{ et } y \in F.$$

- En raisonnant comme pour le corollaire, montrez que B est continue si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{ccc} B(x_0, \cdot) : & F & \rightarrow \mathbb{R} \\ & y & \mapsto B(x_0, y) \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} B(\cdot, y_0) : & E & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto B(x, y_0) \end{array} \right\}$$

sont continues pour tous $x_0 \in E$ et $y_0 \in F$.

2. Application 2 : Le Théorème de l'Application Ouverte

2.1. Enoncé.

THÉORÈME 72 (Théorème de l'Application Ouverte). Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. Soit $T : E \rightarrow F$ une fonction telle que

- T est linéaire ;
- T est continue ;
- T est surjective (c'est-à-dire $T(E) = F$).

Alors il existe $c > 0$ tel que $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$.

2.2. Corollaires.

Corollary 73. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue surjective ($T(E) = F$). Alors l'image de tout ouvert de E par T est un ouvert de F .*

Exercice 11 : Prouvez ce corollaire.

Corollary 74. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. Soit $T : E \rightarrow F$ une bijection linéaire. On suppose que T est continue. Alors T^{-1} est continue. En d'autres termes, T is an homéomorphisme.*

Exercice 12 : Prouvez ce corollaire en utilisant le Corollaire 73.

Preuve : Soit $\mathcal{O} \subset E$ un ouvert de E . Pour prouver que $T^{-1} : F \rightarrow E$ est continue, il suffit de montrer que $(T^{-1})^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert dans F . Comme $(T^{-1})^{-1}(\mathcal{O}) = T(\mathcal{O})$ est ouvert d'après le Corollaire 73, on obtient que T^{-1} est continue. $\square$

2.3. Preuve du Théorème de l'Application Ouverte : elle fera l'objet d'un devoir maison.

3. Application 3 : Le Théorème du Graphe Fermé

THÉORÈME 75. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*

- (1) T est continue
- (2) $G(T) := \{(x, T(x)) / x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$ (pour la topologie produit).

Preuve : Comme T est continue, on obtient facilement que $G(T)$ est fermé en utilisant la caractérisation par les suites. On suppose maintenant que $G(T)$ est fermé et on prouve que T est continue. La preuve procède en plusieurs étapes, chacune étant laissée en exercice.

- On définit $\|x\| := \|x\|_E + \|T(x)\|_F$ pour tout $x \in E$.
- On montre que $\|\cdot\|$ est une norme sur E et que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.
- On montre que $Id_E : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|_E)$ est linéaire et continue.
- On montre que l'application Id_E ci-dessus est un homéomorphisme et on en déduit que T est continue.

La méthode de continuité

Ce chapitre est fortement inspiré de l'exercice 9, chapitre 2, partie 2 de l'ouvrage de Gonnord et Tosel [3].

1. Théorème principal et description de la méthode

1.1. Enoncé du théorème.

THÉORÈME 76. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des Banach. Soit $A \in C^0([0, 1], L_c(E, F))$ continue telle que

- (1) Il existe $c > 0$ tel que $\|A(\lambda)[x]\|_F \geq c\|x\|_E$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in [0, 1]$;
- (2) $A(0) \in Gl_c(E, F)$ (i.e. $A(0)$ est bijective continue, d'inverse continu).

Alors $A(\lambda) \in Gl_c(E, F)$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$. C'est un homéomorphisme pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

En d'autres termes : l'inversibilité est préservée le long de l'intervalle $[0, 1]$.

1.2. Comment appliquer ce théorème ? On peut résumer le théorème ainsi :

- Si on peut passer continuellement d'un problème à un autre,
- Si on a un bon contrôle des solutions éventuelles sur le continuum de problèmes,

alors si on peut résoudre le premier problème, on peut résoudre l'autre.

1.3. Esquisse de la preuve. Pour simplifier, on suppose que $E = F$ et que $A(0) = Id_E$.

- En utilisant la Proposition 65, on montre qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $A(\lambda) \in Gl_c(E)$ pour tout $\lambda \in [0, \epsilon_0]$.
- En utilisant la Proposition 65 et (6), on montre qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\lambda \in [0, 1]$ tel que $A(\lambda) \in Gl_c(E)$, alors $A(\mu) \in Gl_c(E)$ pour tout $\mu \in [0, 1]$ tel que $|\lambda - \mu| < \alpha$. La difficulté est que α doit être indépendant de λ et μ .
- On définit

$$\lambda_0 := \sup\{\lambda \in [0, 1] \text{ tel que } A(\mu) \in Gl_c(E) \text{ pour tout } \mu \in [0, \lambda]\}.$$

En utilisant les deux étapes précédentes, on montre que $\lambda_0 > 0$, puis que $\lambda_0 = 1$ par l'absurde.

- On conclut.

Il faut ensuite traiter le cas général $E \neq F$.

2. Application à un problème de type Dirichlet

Soient $a, \omega \in C^0([0, 1])$. On suppose que $\omega(t) > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. On se donne $y \in C^0([0, 1])$. Le but de ce problème est de montrer qu'il existe une unique fonction $x \in C^2([0, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -x''(t) + a(t)x'(t) + \omega(t)x(t) = y(t) & \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (E)$$

Pour cela, on va introduire un paramètre qui permet de transformer (E) en une équation à coefficients constants, qui elle est résoluble. Pour $\lambda \in [0, 1]$, on considère l'équation

$$\begin{cases} -x''(t) + a(\lambda t)x'(t) + \omega(\lambda t)x(t) = y(t) & \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (E_\lambda)$$

et, on définit $A(\lambda) : C^2([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1])$ telle que pour $x \in C^2([0, 1])$, on a $A(\lambda)(x) := \varphi$ où

$$\varphi(t) := -x''(t) + a(\lambda t)x'(t) + \omega(\lambda t)x(t) \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

Sur $C^2([0, 1])$, on définit la norme

$$\|u\|_{C^2} := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty \text{ pour tout } u \in C^2([0, 1]).$$

Etape 1 : Etude de $A(\lambda)$: 1. Montrez que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $A(\lambda) : (C^2([0, 1]), \|\cdot\|_{C^2}) \rightarrow (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ est continue.

2. Montrez que $A : [0, 1] \rightarrow L_c(C^2([0, 1]), C^0([0, 1]))$ est continue (avec les bonnes normes).

3. On pose $X := \{u \in C^2([0, 1]) \text{ tel que } u(0) = u(1) = 0\}$. Montrez que $(X, \|\cdot\|_{C^2})$ est un espace de Banach.

Dorénavant, on considère $A : [0, 1] \rightarrow L_c(X, C^0([0, 1]))$.

Etape 2 : Contrôle des solutions de (E_λ) . On se donne $x \in C^2([0, 1])$ qui est une solution de (E_λ) .

3. On suppose qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que x est maximum en t_0 sur $[0, 1]$. Que peut-on dire de $x'(t_0)$ et $x''(t_0)$? Déduisez-en qu'il existe $\gamma > 0$ indépendant de x, y, λ tel que $\|x\|_\infty \leq \gamma\|y\|_\infty$.

4. On pose $u := x'$. Montrez qu'il existe $t_1 \in]0, 1[$ tel que $u'(t_1) = 0$. Soit $\mathcal{A}$ une primitive de $t \mapsto -a(\lambda t)$ sur $[0, 1]$. Que vaut la dérivée de $t \mapsto (u(t)e^{\mathcal{A}(t)})$? Déduisez-en une constante $B > 0$ indépendante de x, y, λ telle que $\|x'\|_\infty \leq B\|y\|_\infty$.

5. Montrez qu'il existe $M > 0$ indépendante de x, y, λ telle que $\|x\|_{C^2} \leq M\|y\|_\infty$.

6. Montrez que pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et tout $x \in X$, alors $\|A(\lambda)(x)\|_\infty \geq M^{-1}\|x\|_{C^2}$.

Etape 3 : Etude de $A(0)$: On pose $a_0 := a(0)$ et $\omega_0 := \omega(0) > 0$. On considère le système

$$\begin{cases} -x''(t) + a_0 x'(t) + \omega_0 x(t) = y(t) & \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (E_0)$$

7. On suppose que $y \equiv 0$. Déterminez $r_1 > 0 > r_2$ tels que $t \mapsto e^{rt}$ est solutions de (E_0) si et seulement si $r \in \{r_1, r_2\}$.

8. On admet que la fonction $x_0 \in C^2([0, 1])$ définie par

$$x_0(t) := -e^{r_1 t} \int_0^t \frac{y(s)e^{-r_1 s}}{r_1 - r_2} ds + e^{r_2 t} \int_0^t \frac{y(s)e^{-r_2 s}}{r_1 - r_2} ds$$

est solution de $-x'' + a_0x' + \omega_0x = y$ lorsque $y \equiv 0$.

9. Déterminez l'unique solution de (E_0)

10. Montrez que $A(0) : (X, \|\cdot\|_{C^2}) \rightarrow (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ est un homéomorphisme.

11. Montrez que $A(\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Déduisez-en l'existence d'une unique solution de (E) .

On a donc montré le théorème suivant :

THÉORÈME 77. Soient $a, \omega \in C^0([0, 1])$. On suppose que $\omega(t) > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors pour tout $y \in C^0([0, 1])$, il existe une unique fonction $x \in C^2([0, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -x''(t) + a(t)x'(t) + \omega(t)x(t) = y(t) & \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

3. Quelques remarques

3.1. Variation de la constante : L'expression de la question 8. provient de la méthode de la variation de la constante. Voici la méthode en dimension > 1

- Ecrire $-x'' + a_0x' + \omega_0x = y$ comme un système 2×2 $X'(t) = AX(t) + B(t)$;
- Déterminer deux solutions linéairement indépendantes X_1, X_2 de $X' = AX$ (en utilisant la résolution d'une équation linéaire d'ordre 2) ;
- Poser $X(t) = \lambda(t)X_1(t) + \mu(t)X_2(t)$ pour $t \in [0, 1]$ et montrer que $X' = AX + B$ si et seulement si $\dot{\lambda}X_1 + \dot{\mu}X_2 = B$
- Déterminer $\dot{\lambda}$ et $\dot{\mu}$

3.2. A propos de la positivité de ω dans le Théorème 77. L'hypothèse $\omega(t) > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ n'est pas accessoire. On se donne $\alpha > 0$ et, pour $y \in C^0([0, 1])$, on considère le problème :

$$\begin{cases} x'' + \alpha^2 x = y(t) & \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (E(y))$$

Equation homogène : $y \equiv 0$. Soit $x \in C^2([0, 1])$ solution de $(E(0))$. On a alors $x'' + \alpha^2 x = 0$, et donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $x(t) = A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. On a du coup $0 = x(0) = A$ et donc $x(t) = B \sin(\alpha t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Si on avait une condition sur $x'(0)$, on pourrait déterminer tout de suite B . Mais ici, on a $0 = x(1) = B \sin(\alpha)$. On distingue alors deux cas :

Si $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, on a $\sin(\alpha) \neq 0$, et donc $B = 0$, puis $x \equiv 0$. On a alors existence et unicité des solutions de $(E(0))$. Avec un peu plus de travail, on peut alors montrer que pour tout $y \in C^0([0, 1])$, on a existence et unicité des solutions de $(E(y))$.

Si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$, on a $\sin(\alpha) = 0$, en posant $x_\alpha(t) = \sin(\alpha t)$ pour tout $t \in [0, 1]$, on a $x_\alpha \not\equiv 0$ solution de $(E(0))$ et $x = B \cdot x_\alpha$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 1. On n'a donc pas unicité des solutions de $(E(0))$.

Equation avec second membre dans le cas $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$ On n'a pas non plus toujours existence. On garde notre solution x_α et on se donne $y \in C^0([0, 1])$ telle qu'il existe $x \in C^2([0, 1])$ solution de $(E(y))$. En multipliant $(E(y))$ par x_α et en

intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x_\alpha(t)y(t) dt &= \int_0^1 x_\alpha(x'' + \alpha^2 x) dt = \int_0^1 x_\alpha x'' dt + \alpha^2 \int_0^1 x_\alpha x dt \\
 &= [x'_\alpha x_\alpha]_0^1 - \int_0^1 x'_\alpha x' dt + \alpha^2 \int_0^1 x_\alpha x dt \\
 &= - \int_0^1 x'_\alpha x' dt + \alpha^2 \int_0^1 x_\alpha x dt \\
 &= -[x'_\alpha x]_0^1 + \int_0^1 (x''_\alpha + \alpha^2 x_\alpha)x dt = \int_0^1 0 \times x dt = 0
 \end{aligned}$$

et donc $\int_0^1 x_\alpha y dt = 0$. Par exemple, si $y = x_\alpha$, il n'y a donc pas de solution de

$$\begin{cases} x'' + \alpha^2 x = x_\alpha(t) & \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

Comparaison avec l'algèbre linéaire. L'analyse ci-dessus est en fait très naturelle. Le problème $(E(y))$ est en fait du type $f(x) - \lambda x = y$ avec f linéaire. En dimension finie, on sait qu'il existe un ensemble fini Λ (le spectre) tel que si $\lambda \notin \Lambda$, $f - \lambda Id$ est inversible, c'est -à-dire que le noyau est trivial. Dans le cas de $(E(y))$, on a prouvé que si $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, alors il y a une seule solution de $(E(0))$, ce qui revient à un noyau trivial.

Maintenant si $\lambda \in \Lambda$, la fonction $g = f - \lambda Id$ a un noyau et est alors inversible (en dimension finie). Si de plus on a une structure Euclidienne et que g est auto-adjoint, c'est un exercice classique de montrer que si on a une solution de $g(x) = y$, alors $y \perp \text{Ker } g$. Dans les calculs ci-dessus, on a mis le produit scalaire L^2 sur X et on a montré que $x \mapsto x'' + \alpha^2 x$ est auto-adjoint, et que y est orthogonal à x_α , ce qui est une condition d'orthogonalité au noyau.

Troisième partie

Structure Hilbertienne

Espaces de Hilbert

1. Panorama succinct de définitions et résultats classiques

1.1. Définition.

Définition 78. *Un produit scalaire sur un espace vectoriel H est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique
- Pour tout $x \in H$, on a $\langle x, x \rangle \geq 0$, et $= 0$ si et seulement si $x = 0$

Dans ce cas, $x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur H . Un espace vectoriel $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ muni d'un tel produit scalaire est appelé espace pré-Hilbertien. Un espace de Hilbert est un pré-Hilbertien complet pour la norme $\|\cdot\|$.

Voici quelques exemples :

- $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, muni du produit scalaire canonique $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} := \sum_{i=1}^n x_i y_i$. C'est un espace de Hilbert (la complétude est immédiate en dimension finie).
- $l^2(\mathbb{N}) = \{(x_n)_n / \sum_n x_n^2 < \infty\}$ et $\langle x, y \rangle_{l^2} := \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$: c'est aussi un espace de Hilbert.
- Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non-vidé, on définit le produit scalaire L^2 par $\langle u, v \rangle_{L^2} := \int_{\Omega} uv \, dx$ pour $u, v \in L^2(\Omega)$. Alors $(L^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ est un espace de Hilbert.
- $(C^0([0, 1]), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ est un pré-Hilbertien, mais pas un Hilbert.

1.2. Inégalités et égalités.

Proposition 79. *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un pré-Hilbertien. Alors pour tout $x, y \in H$, on a*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont liés.

DÉMONSTRATION. Un petit rappel avant de commencer : deux vecteurs $x, y \in H$ sont liés s'il existe un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\lambda x + \mu y = 0$ et $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. On laisse au lecteur le soin de prouver que

$$\{x, y \text{ liés}\} \Leftrightarrow \{\exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } y = tx \text{ ou } x = ty\}.$$

Traisons l'inégalité : comme elle est claire pour $x = 0$, on suppose $x \neq 0$. On se donne $t \in \mathbb{R}$ et on définit $P(t) := \|tx + y\|^2$. En développant, on a $P(t) = t^2\|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + \|y\|^2$. Comme P est un polynôme du second degré et que $P(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors son discriminant est ≤ 0 . Donc $\Delta = (2\langle x, y \rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$, ce qui implique $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, et donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Traisons le cas d'égalité. On suppose toujours $x \neq 0$. On a l'égalité $\Delta = 0$ si et seulement si P admet un unique zéro noté $t_0 \in \mathbb{R}$, donc $\|t_0x + y\|^2 = P(t_0) = 0$, donc $t_0x + y = 0$ puis $y = -t_0x$ et donc x, y sont liés. Dans le cas $x = 0$, on a à la fois l'égalité et x, y liés. Inversement, dans tous les cas, si x, y sont liés, on vérifie que l'égalité à lieu. $\square$

Proposition 80. *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace pré-Hilbertien. Alors pour tous $x, y \in H$, on a*

$$(8) \quad \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$$

La preuve est un calcul direct. La réciproque est plus délicate :

Proposition 81. *Soit $(H, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On suppose que (8) a lieu pour tous $x, y \in H$. Alors H est un pré-Hilbertien et $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire.*

DÉMONSTRATION. Si la norme $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on calcul direct donne

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{4} \text{ pour tous } x, y \in H.$$

On va donc alors définir

$$B(x, y) := \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{4} \text{ pour tous } x, y \in H.$$

On va montrer que

- B est bilinéaire (difficile!)
- B est symétrique (facile)
- B est définie positive (facile)
- $\|x\| = \sqrt{B(x, x)}$ pour tout $x \in H$ (facile).

On laisse le lecteur écrire les preuves de trois points faciles. On va prouver la bilinearité. Soient $x, y, z \in H$. Montrons que

$$B(x+y, z) = B(x, z) + B(y, z).$$

Pour ce faire, écrivons

$$\begin{aligned} & 4(B(x+y, z) - B(x, z) - B(y, z)) \\ &= \|x+y+z\|^2 - \|x+y\|^2 - \|z\|^2 - (\|x+z\|^2 - \|x\|^2 - \|z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2) \\ &= \|x+y+z\|^2 - \|x+y\|^2 - \|x+z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 \end{aligned}$$

L'inégalité (8) s'écrit :

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) \text{ pour tous } a, b \in H.$$

On obtient donc via (8) :

$$\|x+y\|^2 + \|z\|^2 = \frac{\|x+y+z\|^2 + \|x+y-z\|^2}{2} \text{ et } \|x+z\|^2 + \|y\|^2 = \frac{\|x+y+z\|^2 + \|x+z-y\|^2}{2}$$

en injectant ces égalités dans le calcul précédent, il vient alors

$$\begin{aligned}
& 4(B(x+y, z) - B(x, z) - B(y, z)) \\
&= \|x+y+z\|^2 - \|x+y\|^2 - \|z\|^2 - (\|x+z\|^2 - \|x\|^2 - \|z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2) \\
&= \|x+y+z\|^2 - (\|x+y\|^2 + \|z\|^2 + \|x+z\|^2 + \|y\|^2 + \|y+z\|^2) + \|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 2\|z\|^2 \\
&= \|x+y+z\|^2 - \left(\frac{\|x+y+z\|^2 + \|x+y-z\|^2 + \|x+y+z\|^2 + \|x+z-y\|^2}{2} + \|y+z\|^2 \right) \\
&\quad + \|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 2\|z\|^2 \\
&= -\left(\frac{\|x+y-z\|^2 + \|x+z-y\|^2}{2} + \|y+z\|^2 \right) + \|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 2\|z\|^2
\end{aligned}$$

En utilisant encore une fois (8), on a

$$\frac{\|x+y-z\|^2 + \|x+z-y\|^2}{2} = \|x\|^2 + \|y-z\|^2$$

et donc

$$\begin{aligned}
& 4(B(x+y, z) - B(x, z) - B(y, z)) \\
&= -(\|x\|^2 + \|y-z\|^2 + \|y+z\|^2) + \|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 2\|z\|^2 \\
&= -(\|y-z\|^2 + \|y+z\|^2) + 2\|y\|^2 + 2\|z\|^2 = 0 \text{ par (8)}
\end{aligned}$$

Ceci prouve (??). De la même manière, on a

$$(9) \quad B(x, y+z) = B(x, y) + B(x, z) \text{ pour tous } x, y, z \in H.$$

On va maintenant montrer que B est bilinéaire : manque juste $B(\lambda x, y) = B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y)$ pour tous $x, y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Là, il faut s'inspirer de la preuve de "tout morphisme de groupe continu $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une homothétie". On procède ainsi :

- En utilisant (??), on montre que $B(n \cdot x, y) = nB(x, y)$ pour tous $x, y \in H$ et $n \in \mathbb{N}$;
- En utilisant (??), on montre que $B(n \cdot x, y) = nB(x, y)$ pour tous $x, y \in H$ et $n \in \mathbb{Z}$;
- Pour $x, y \in H$ et $q \in \mathbb{N}^*$, en écrivant $q \cdot (x/q) = x$, on montre que $B(\frac{1}{q}x, y) = \frac{1}{q}B(x, y)$;
- On montre que $B(r \cdot x, y) = rB(x, y)$ pour tous $x, y \in H$ et $r \in \mathbb{Q}$;

Ensuite, il faut de la continuité. On procède ainsi :

- Montrez qu'il existe $M > 0$ tel que $|B(x, y)| \leq M(\|x\| + \|y\|) \cdot \|x\|$ pour tous $x, y \in H$;
- En écrivant $B(x + x_0, y_0) = B(x_0, y_0)$ pour $x, x_0, y_0 \in H$, montrez alors que B est continue par rapport à la première variable.
- En utilisant $B(r \cdot x, y) = rB(x, y)$ pour tous $x, y \in H$ et $r \in \mathbb{Q}$, la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et la continuité en la première variable, on montre que $B(\alpha \cdot x, y) = \alpha B(x, y)$ pour tous $x, y \in H$ et $\alpha \in \mathbb{R}$;
- On en déduit que B est bilinéaire.

□

1.3. Orthogonalité.

Définition 82. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un pré-Hilbertien. Pour $A \subset H$, on définit

$$A^\perp := \{x \in H \text{ tel que } \langle x, a \rangle = 0 \text{ pour tout } a \in A\}.$$

Proposition 83. *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un pré-Hilbertien. Pour $A \subset H$, L'ensemble $A^\perp$ est alors un sous-espace vectoriel fermé de H et $A \cap A^\perp = \{0\}$.*

Preuve : On écrit $A^\perp = \bigcap_{a \in A} i_a^{-1}(\{0\})$ avec $i_a : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $i_a(x) = \langle x, a \rangle$ pour tous $a, x \in H$. Comme i_a est linéaire pour tout $a \in A$, on a immédiatement que $A^\perp$ est un espace vectoriel.

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|i_a(x)| \leq \|a\| \cdot \|x\|$ pour tous $a, x \in E$, donc i_a est continue pour tout $a \in A$. Donc pour tout $a \in A$, $i_a^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Puis $A^\perp$ est fermé comme intersection quelconque de fermés.

Enfin soit $a \in A^\perp \cap A$. On a donc $\langle a, a \rangle = 0$, donc $\|a\| = 0$, puis $a = 0$. Donc $A \cap A^\perp \subset \{0\}$, l'inclusion réciproque étant claire.

2. Le théorème de projection et conséquences

2.1. Enoncés.

THÉORÈME 84 (Théorème de Projection). *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un pré-Hilbertien. Soit $C \subset H$ un convexe complet non-vide. Alors pour tout $x \in H$, il existe $x_C \in C$ unique tel que*

$$(10) \quad \|x - x_C\| = \inf\{\|x - y\| / y \in C\}.$$

On dit alors que x_C est le projeté orthogonal de x sur C . De plus, pour $z \in C$, on a l'équivalence :

- $z = x_C$
- $\langle x - z, y - z \rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$.

Proposition 85. *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un pré-Hilbertien. Soit $C \subset H$ un convexe fermé non-vide. Pour $x \in C$, on note $\pi_C(x)$ son projeté orthogonal. Alors $\pi_C : H \rightarrow H$ est 1-Lipschitzienne.*

THÉORÈME 86 (Théorème de Projection dans les Hilbert). *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $C \subset H$ un convexe fermé non-vide. Alors pour tout $x \in H$, il existe $x_C \in C$ unique tel que*

$$(11) \quad \|x - x_C\| = \inf\{\|x - y\| / y \in C\}.$$

On dit alors que x_C est le projeté orthogonal de x sur C . De plus, pour $z \in C$, on a l'équivalence :

- $z = x_C$
- $\langle x - z, y - z \rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$.

2.2. Preuve : Voir le cours de Licence.

2.3. Conséquences.

Corollary 87. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Alors $H = F \oplus F^\perp$. En particulier F admet un supplémentaire et π_F est linéaire et symétrique.*

DÉMONSTRATION. On se donne $x \in E$ et on note $x_F = \pi_F(x)$ son projeté orthogonal sur F . On fixe $y \in F$. Alors $\lambda y + x_F \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc $\lambda \langle x - x_F, y \rangle = \langle x - x_F, (x_F + \lambda y) - x_F \rangle \leq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in F$, et donc, en

prenant $\lambda = -1$ puis $\lambda = +1$, on obtient $\langle x - x_F, y \rangle = 0$ pour tout $y \in F$, de sorte que $x - x_F \in F^\perp$. Par conséquent $x \in F \oplus F^\perp$, et donc $H = F \oplus F^\perp$.

On se donne $z \in F$. Montrons l'équivalence

$$\{z = \pi_F(x)\} \Leftrightarrow \{x - z \in F^\perp\}.$$

On a déjà montré ($\Rightarrow$). Montrons ($\Leftarrow$) et supposons que $x - z \in F^\perp$. On a alors $x_F - z = (x - z) - (x - x_F) \in F^\perp$ car c'est un espace vectoriel. Or $x_F, z \in F$, donc $x_F - z \in F^\perp \cap F = \{0\}$, puis $z = x_F$, ce qui termine la preuve de ($\Leftarrow$).

Pour la linéarité, on se donne $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x_1, x_2 \in H$. On écrit alors

$$(\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha \pi_F(x_1) + \beta \pi_F(x_2)) = \alpha(x_1 - \pi_F(x_1)) + \beta(x_2 - \pi_F(x_2)) \in F^\perp,$$

or $\alpha \pi_F(x_1) + \beta \pi_F(x_2) \in F$, il suit donc de la caractérisation ci-dessus que $\pi_F(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \pi_F(x_1) + \beta \pi_F(x_2)$. Ceci prouve la linéarité.

Montrons la symétrie. Soient $x_1, x_2 \in H$. On pose $\{y_1 = \pi_F(x_1), z_1 := x_1 - \pi_F(x_1) \in F^\perp\}$ et $\{y_2 = \pi_F(x_2), z_2 := x_2 - \pi_F(x_2) \in F^\perp\}$. On a donc

$$\begin{aligned} \langle \pi_F(x_1), x_2 \rangle &= \langle y_1, y_2 + z_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle \text{ car } y_1 \perp z_2 \\ &= \langle y_1 + z_1, y_2 \rangle = \langle x_1, \pi_F(x_2) \rangle \text{ avec } z_1 \perp y_2 \end{aligned}$$

Et donc π_F est symétrique. $\square$

Une conséquence hyper-classique est :

Corollary 88. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Alors $H = \overline{F}$ si et seulement si $F^\perp = \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. On a $\overline{F}$ qui est un sous-ev fermé, donc $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^\perp$. Or $\overline{F}^\perp = F^\perp$, donc $H = \overline{F} \oplus F^\perp$. Donc si $F^\perp = \{0\}$, on a $H = \overline{F}$. Si $H = \overline{F}$, on obtient rapidement que $F^\perp = \{0\}$. $\square$

THÉORÈME 89 (Théorème de représentation de Riesz). *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Alors pour tout $\varphi \in H'$ (c'est-à-dire $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et continue pour $\|\cdot\|$), il existe un unique $x_\varphi \in H$ tel que $\varphi(z) = \langle x_\varphi, z \rangle$ pour tout $z \in H$. En d'autres termes, l'application*

$$\begin{cases} i : H & \rightarrow & H' \\ x & \mapsto & (z \mapsto \langle x, z \rangle) \end{cases}$$

est une bijection. De plus, elle est linéaire et c'est une isométrie : $\|i(x)\|_{H \rightarrow \mathbb{R}} = \|x\|_H$ pour tout $x \in H$.

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi \in H'$ avec $\varphi \neq 0$ (sinon on prend $x_\varphi = 0$). Comme $\text{Ker } \varphi$ est fermé, alors $H = \text{Ker } \varphi \oplus (\text{Ker } \varphi)^\perp$. Comme $\text{Ker } \varphi$ est un hyperplan, alors le supplémentaire $(\text{Ker } \varphi)^\perp$ est de dimension 1. Soit $x_0 \in H$ tel que $(\text{Ker } \varphi)^\perp = \mathbb{R}x_0$, $x_0 \neq 0$ et $\varphi(x_0) \neq 0$ (ça existe ??). Pour $u \in H$ on définit $u' = u - \frac{\langle u, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0$. Alors $\langle u', x_0 \rangle = 0$ et donc $u' \in (\text{Ker } \varphi)^\perp = \text{Ker } \varphi$, et donc $\varphi(u') = 0$, puis $\varphi(u) - \frac{\langle u, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} \varphi(x_0) = 0$. On pose alors $x_\varphi := \frac{\varphi(x_0)}{\|x_0\|^2} x_0$, de sorte que $\varphi(u) = \langle u, x_\varphi \rangle$ for all $u \in H$. Ceci prouve que i est surjective.

Montrons que i est une isométrie. On se donne $x \in H$. Il suite de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $|i(x)[y]| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_H \|y\|_H$ pour tout $y \in H$, donc $\|i(x)\|_{H \rightarrow \mathbb{R}} \leq \|x\|_H$. Si $x \neq 0$, on a $\|i(x)\|_{H \rightarrow \mathbb{R}} \geq \frac{|i(x)[x]|}{\|x\|_H} = \|x\|_H$, et donc

$\|i(x)\|_{H \rightarrow \mathbb{R}} = \|x\|_H$ si $x \neq 0$, le cas $x = 0$ étant clair. La fonction i étant linéaire, alors on en déduit qu'elle est injective, puis une isométrie bijective. $\square$

2.4. Le théorème de Lax-Milgram.

2.4.1. Enoncés.

THÉORÈME 90. [Lax-Milgram] Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue (non nécessairement symétrique). On suppose que a est coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\exists \alpha > 0$ tel que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \text{ pour tout } u \in H.$$

Soit $f \in H'$ une forme linéaire continue et soit $C \subset H$ un convexe fermé non-vide. Alors il existe un unique élément $u_C \in C$ tel que

$$a(u_C, v - u_C) \geq f(v - u_C) \text{ pour tout } v \in C. \quad (E_C)$$

Lorsque C est l'espace entier H , le théorème est semblable au théorème de représentation :

THÉORÈME 91. [Lax-Milgram, version $C = H$] Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue (non nécessairement symétrique). On suppose que a est coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\exists \alpha > 0$ tel que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \text{ pour tout } u \in H.$$

Soit $f \in H'$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique élément $u_H \in C$ tel que

$$a(u_H, v) = f(v) \text{ pour tout } v \in H. \quad (E_H)$$

Les applications seront faites dans la partie consacrée aux espaces de Sobolev.

2.4.2. Esquisse de la preuve du Théorème 91 : le cas $C = H$. On se place dans les cadre des hypothèses du Théorème 91. La preuve est en 5 étapes :

Etape 1 : Il existe $A : H \rightarrow H$ tel que

$$a(u, v) = \langle A(u), v \rangle \text{ pour tout } u, v \in H.$$

Etape 2 : La fonction $A : H \rightarrow H$ est linéaire et continue. Etape 3 : Il existe $x_0 \in H$

tel que résoudre (E_H) revient à trouver $u_H \in H$ tel que $A(u_H) = x_0$. Pour $\rho > 0$ (qui sera fixé ultérieurement), on définit

$$\begin{aligned} T : H &\rightarrow H \\ u &\mapsto u - \rho(A(u) - x_0) \end{aligned}$$

Etape 4 : Avec $\rho > 0$, T est une application contractante. Etape 5 : Il existe $u_H \in H$ tel que $A(u_H) = x_0$. L'existence d'un tel élément u_H étant équivalent à la résolution de (E_H) , on obtient l'existence. L'unicité provient de l'unicité dans le théorème du point fixe. $\square$

2.4.3. *Esquisse de la preuve du cas général (Théorème 90).* On se donne a, f, C comme dans l'énoncé du théorème et on s'inspire de la preuve du cas $C = H$.

Etape 1 : Il existe $x_0 \in H$ tel que pour tout $\rho > 0$, résoudre (E_C) revient à montrer l'existence et l'unicité de $u_C \in H$ tel que

$$u_C = \pi_C(u_C - \rho(A(u_C) - x_0)),$$

où π_C est la projection orthogonale sur C .

Etape 2 : On conclut en utilisant le théorème du point fixe de Picard.

3. Compacité faible de la boule unité

3.1. Une nouvelle topologie sur les espace de Hilbert.

Proposition 92. *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Alors il existe une topologie sur H , dite "topologie faible", telle que pour toute suite $(x_n)_n$ dans H et $x \in H$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $(x_n)_n$ converge vers x pour la topologie faible
- Pour tout $\varphi \in H'$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$

Vocabulaire et notations : La topologie d'évn de $(H, \|\cdot\|)$ est appelée topologie forte. Etant donné une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \in H$ pour tout n et $x \in H$, on notera

- $x_n \rightarrow x$ quand $n \rightarrow +\infty$ lorsque $(x_n)_n$ tend vers x pour la topologie forte, c'est-à-dire $\lim_n \|x_n - x\| = 0$. On dit alors que " $(x_n)_n$ converge fortement vers x "
- $x_n \rightharpoonup x$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ lorsque $(x_n)_n$ tend vers x pour la topologie faible (on dit que " $(x_n)_n$ converge faiblement vers x "

Il suit du Théorème 89 de représentation de Riesz que pour $(x_n)_n \in H$ et $x \in H$,

$$(12) \quad \{x_n \rightharpoonup x \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty\} \Leftrightarrow \{ \text{pour tout } z \in H, \langle x_n, z \rangle \rightarrow \langle x, z \rangle \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty \}$$

3.2. Propriétés.

Proposition 93. *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $(x_n)_n$ une suite telle que $x_n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in H$. Alors*

- *Lorsqu'elle existe, la limite faible est unique*
- *Convergence forte $\Rightarrow$ Convergence faible : c'est-à-dire $\{x_n \rightarrow x\} \Rightarrow \{x_n \rightharpoonup x\}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$*
- *Si $x_n \rightharpoonup x$, alors $(\|x_n\|)_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$*
- *Si $x_n \rightharpoonup x$, alors $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|$*
- *Si $x_n \rightharpoonup x$ et $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, alors $x_n \rightarrow x$ fortement lorsque $n \rightarrow +\infty$*
- *En dimension finie, les convergences forte et faible sont équivalentes (les deux topologies coïncident).*

DÉMONSTRATION.

- On suppose que $(x_n)_n$ converge vers x et $x' \in H$. Soit $z \in H$. Alors $\langle x_n, z \rangle \rightarrow \langle x, z \rangle$ et $\langle x', z \rangle$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, et donc $\langle x, z \rangle = \langle x', z \rangle$ pour tout $z \in H$. Avec $z = x - x'$, on obtient $x = x'$. ceci prouve l'unicité.
- Soit $(x_n)_n$ qui converge fortement vers x . Soit $\varphi \in H'$. Comme φ est continue pour la topologie forte, alors $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$, et donc $x_n \rightharpoonup x$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- On va utiliser le Théorème de Banach-Steinhaus. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n : H \rightarrow \mathbb{R}$ et $T : H \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $T_n(y) = \langle x_n, y \rangle$ et $T(y) = \langle x, y \rangle$ pour tout $y \in H$. La convergence faible se traduit par la convergence simple de (T_n) vers T , et pour tout $y \in H$, $\{T_n(y)/n \in \mathbb{N}\}$ est bornée car convergente. Comme T_n linéaire continue pour tout n et H complet, il suit du Théorème 70 de Banach-Steinhaus qu'il existe $M > 0$ tel que $|\langle x_n, y \rangle| = |T_n(y)| \leq M\|y\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in H$. Avec $y := x_n$, on a donc $\|x_n\|^2 \leq M\|x_n\|$ pour tout n , puis $\|x_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite est bornée.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, et $y \in H$, il suit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $|\langle x_n, y \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|y\|$. Avec $y = x$, on a donc $|\langle x_n, x \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|x\|$. Comme $\langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ via la convergence faible, en passant à la liminf, on a $\|x\|^2 = \liminf_n |\langle x_n, x \rangle| \leq \liminf_n \|x_n\| \cdot \|x\|$. En distinguant $x = 0$ et $x \neq 0$, on obtient le résultat cherché.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\theta_n := x_n - x$. On a alors

$$\|x_n\|^2 = \|x + \theta_n\|^2 = \|\theta_n\|^2 + 2\langle \theta_n, x \rangle + \|x\|^2.$$

Et donc

$$\|x_n - x\|^2 = \|\theta_n\|^2 = \|x_n\|^2 - \|x\|^2 - 2\langle \theta_n, x \rangle.$$

Comme $x_n \rightharpoonup x$, then $\theta_n \rightarrow 0$ et $\langle \theta_n, x \rangle \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Comme on a convergence des normes, on obtient $\|x_n - x\|^2 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, puis (x_n) converge fortement vers x .

- Soit $\{e_1, \dots, e_N\}$ une base orthonormale de H . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n = \sum_{i=1}^N \langle x_n, e_i \rangle e_i$. Si $x_n \rightharpoonup x$, alors $\langle x_n, e_i \rangle \rightarrow \langle x, e_i \rangle$ pour tout $i = 1, \dots, N$, et donc $x_n \rightarrow \sum_{i=1}^N \langle x, e_i \rangle e_i = x$ fortement.

□

3.3. Un exemple de suite qui converge faiblement mais pas fortement. Il suit de ce qu'on vient de montrer qu'il faut se placer en dimension infinie. On va travailler sur l'espace de Hilbert $(L^2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$.

Fixons $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\theta \not\equiv 0$. On définit

$$\theta_n(x) := \sqrt{n}\theta(nx) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Nous allons montrer que

$$\theta_n \rightharpoonup 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty \text{ mais ne converge pas pour la topologie forte.}$$

Prouvons cette affirmation. La première remarque est que pour tout $n \geq 1$, via un changement de variables, on a

$$(13) \quad \|\theta_n\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \theta_n^2(x) dx = \int_{\mathbb{R}} n\theta^2(nx) dx = \int_{\mathbb{R}} \theta^2(x) dx = \|\theta\|_2^2$$

Montrons que $\theta_n \rightharpoonup 0$ faiblement lorsque $n \rightarrow \infty$. Soit $R > 0$ tel que $\theta(x) = 0$ pour tout $|x| \geq R$. Fixons $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} |\langle \theta_n, f \rangle_{L^2}| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \theta_n(x) f(x) dx \right| = \left| \int_{-R/n}^{R/n} \theta_n(x) f(x) dx \right| \\ &\leq \sqrt{\int_{-R/n}^{R/n} \theta_n(x)^2 dx} \sqrt{\int_{-R/n}^{R/n} f(x)^2 dx} \\ &\leq \|\theta_n\|_2 \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-R/n, R/n]} f(x)^2 dx} = \|\theta\|_2 \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-R/n, R/n]} f(x)^2 dx} \end{aligned}$$

Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, il suit du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \theta_n, f \rangle_{L^2} = 0.$$

Il suit donc du théorème 89 de représentation de Riesz que $\theta_n \rightharpoonup 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Montrons que $(\theta_n)_n$ ne converge pas fortement. On va faire (un peu) mieux et montrer qu'aucune sous-suite ne converge fortement. On raisonne pas l'absurde et on va supposer qu'une sous-suite $(\theta_{j(n)})_n$ admet une limite forte notée $\Theta \in L^2(\mathbb{R})$. Il suit la Proposition 93 que $(\theta_{j(n)})$ converge faiblement vers Θ . Comme $\theta_n \rightharpoonup 0$, on en déduit facilement que $\theta_{j(n)} \rightharpoonup 0$. Par unicité (encore Proposition 93), on a donc $\Theta \equiv 0$, et donc $\theta_n \rightarrow 0$ fortement lorsque $n \rightarrow \infty$, et donc $\|\theta_{j(n)}\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, ce qui contredit (13) car $\theta \not\equiv 0$. Donc (θ_n) n'admet aucune sous-suite qui converge fortement.

3.4. Théorème principal.

3.4.1. Énoncé.

THÉORÈME 94. *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Alors $\overline{B_H(0, 1)} = \{x \in H \text{ such that } \|x\| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie faible. En particulier, pour toute suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \in H$ et $\|x_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($M \geq 0$ indépendant de n), il existe $x \in H$ et une sous-suite $(x_{j(n)})_n$ tels que*

$$x_{j(n)} \rightharpoonup x \text{ faiblement lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

3.4.2. Proof. La preuve abstraite du théorème est dans Brezis [1]. Ici, on va se contenter de prouver que d'une suite bornée, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans H séparable (c'est-à-dire qui admet une partie dense dénombrable). Ceci est équivalent à la compacité seulement si la topologie faible est métrisable (égale à la topologie d'un espace métrique) : c'est le cas lorsque l'espace est séparable. Ce sera discuté dans la suite.

Pour celles et ceux qui connaissent, la preuve est très proche de celle du théorème d'Ascoli, et même plus simple car on n'a pas à prouver de convergence uniforme. Les étapes sont les suivantes :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(z) = \langle x_n, z \rangle$ pour tout $z \in H$. Montrez la convergence faible reviendra à montrer la convergence simple de (f_n) à extraction près.
2. En s'inspirant de la preuve du théorème d'Ascoli, on montrera qu'il existe $f \in H'$ et une sous-suite $(f_{j(n)})$ telles que $(f_{j(n)})$ converge simplement vers f . Il y aura un petit procédé diagonal de Cantor. Ce sera plus simple qu'Ascoli en fait.
3. On repassera à H via le théorème de représentation.

La preuve fera l'objet d'un devoir.

3.5. Applications.

Proposition 95 (Le théorème de Riesz revisité). *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $f \in H'$. Alors il existe $x \in H$ tel que $f(z) = \langle x, z \rangle$ pour tout $z \in H$.*

C'est le théorème 89 classique. Cependant, il est intéressant de l'écrire dans un contexte variationnel et de le démontrer par un argument de minimisation. On définit

$$J(z) := \frac{\|z\|^2}{2} - f(z) \text{ pour tout } z \in H.$$

Etape 0 : Formulation variationnelle. Montrons que $J \in C^1(H)$. Soit $z_0 \in H$ et $h \in H$. On a

$$\begin{aligned} J(z_0 + h) &= \frac{\|z_0 + h\|^2}{2} - f(z_0 + h) = \frac{\|z_0\|^2 + 2\langle z_0, h \rangle + \|h\|^2}{2} - f(z_0) - f(h) \\ &= J(z_0) + \langle z_0, h \rangle - f(h) + \frac{\|h\|^2}{2} \end{aligned}$$

Comme $h \mapsto \langle z_0, h \rangle - f(h)$ est linéaire continue et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = 0$, alors J est différentiable en z_0 et $dJ_{z_0}[h] = \langle z_0, h \rangle - f(h)$ pour tout $h \in H$.

Montrons que dJ est C^0 avec

$$\begin{cases} dJ : H & \rightarrow H' \\ z & \mapsto dJ_z \end{cases}$$

On se donne $z_1, z_2 \in H$ et $h \in H$. On a

$$|(dJ_{z_1} - dJ_{z_2})[h]| = |\langle z_1, h \rangle - f(h) - (\langle z_2, h \rangle - f(h))| = |\langle z_1 - z_2, h \rangle| \leq \|z_1 - z_2\| \cdot \|h\|,$$

et donc

$$\|dJ_{z_1} - dJ_{z_2}\|_{H \rightarrow \mathbb{R}} = \sup_{h \neq 0} \frac{|(dJ_{z_1} - dJ_{z_2})[h]|}{\|h\|} \leq \|z_1 - z_2\|.$$

Donc dJ est Lipschitzienne, donc continue. Finalement $J \in C^1(H)$.

Ainsi on a le résultat suivant : pour tout $x \in H$, on a

$$dJ_x = 0 \Leftrightarrow \langle x, h \rangle = f(h) \text{ pour tout } h \in H.$$

Du coup notre problème a une *formulation variationnelle*, c'est-à-dire $dJ_x = 0$. Pour trouver un point critique, on va minimiser J .

Etape 1 : On affirme que J a un minorant.

Prouvons-le. Comme f est continue, on a

$$(14) \quad J(z) \geq \frac{\|z\|^2}{2} - \|f\|_{H \rightarrow \mathbb{R}} \|z\| = \frac{1}{2} (\|z\| - \|f\|_{H \rightarrow \mathbb{R}})^2 - \frac{\|f\|_{H \rightarrow \mathbb{R}}^2}{2} \geq -\frac{\|f\|_{H \rightarrow \mathbb{R}}^2}{2}$$

pour tout $z \in H$. Donc J a un minorant.

On définit

$$m := \inf \{J(z) / z \in H\} \in \mathbb{R}.$$

C'est bien défini car $\{J(z) / z \in H\}$ est non-vide (contient $J(0)$) et minoré d'après ce qu'on vient de montrer. Soit alors $(x_n)_n \in H$ une suite minimisante, à savoir

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = m.$$

Etape 2 : On affirme que $(x_n)_n$ est bornée.

Prouvons-le. Il suit de (14) que

$$m + o(1) = J(x_n) \geq \frac{1}{2} (\|x_n\| - \|f\|_{H \rightarrow \mathbb{R}})^2 - \frac{\|f\|_{H \rightarrow \mathbb{R}}^2}{2},$$

et donc $(\|x_n\|)_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$, donc $(x_n)_n$ est bornée dans H .

Etape 3 : Il existe $x \in H$ et une sous-suite tels que $x_{j(n)} \rightharpoonup x$ faiblement in H .

Comme $(x_n)_n$ est bornée, c'est une conséquence de la compacité faible de la boule unité fermée du Théorème 94.

Etape 4 : On affirme que x minimise J .

Prouvons-le. On pose $\theta_n := x_{j(n)} - x$ de sorte que $\theta_n \rightharpoonup 0$. On a

$$J(x_{j(n)}) = J(x + \theta_n) = J(x) + \frac{\|\theta_n\|^2}{2} + \langle \theta_n, x \rangle - f(\theta_n).$$

Avec (15) et $\theta_n \rightharpoonup 0$, on obtient

$$(16) \quad m + o(1) = J(x) + \frac{\|\theta_n\|^2}{2} \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Et donc $m + o(1) \geq J(x)$, puis $m \geq J(x)$. Comme $J(x) \geq m$ (définition de l'infimum), il vient $J(x) = m$. Donc l'infimum est atteint au point $x \in H$. De plus, avec (16), on obtient que $\|x_{j(n)} - x\| = \|\theta_n\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, et donc $x_{j(n)} \rightarrow x$ fortement lorsque $n \rightarrow +\infty$. $\square$

Etape 5 : On affirme que $f(z) = \langle x, z \rangle$ pour tout $z \in H$.

En fait, comme $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ atteint son minimum en x intérieur à H et J est C^1 , on a $dJ_x = 0$, ce qui, on l'a déjà vu, est équivalent au résultat recherché. $\square$

Remarque : Cette preuve est une illustration. En vérité, on a démontré le théorème de représentation en utilisant la compacité faible de la boule unité... dont la preuve passe par le théorème de représentation !

Quatrième partie

La transformée de Fourier

Jusqu'ici, nous avons essentiellement développé des méthodes pour résoudre des EDO sur des domaines bornés comme $[0, 1]$. On peut utiliser des théorèmes des prolongement d'EDO, du type "théorème des bouts", mais le cœur reste l'étude sur des intervalles compacts. Dans le cas de l'intervalle $\mathbb{R}$ qui est non-borné, il y a deux difficultés supplémentaires.

Premièrement, il faut remplacer la notion de condition au bord. Un exemple simple est l'équation $u'' = 0$ sur $\mathbb{R}$. Les solutions C^2 sont exactement les fonctions affines, et donc on n'a pas unicité. Cependant, si on impose que les limites en $\pm\infty$ existent et sont nulles, alors la fonction nulle est l'unique solution. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0 \end{array} \quad \text{dans } \mathbb{R} \right\} \Rightarrow u \equiv 0.$$

Et donc on récupère existence et unicité. Un autre type de condition au bord est une condition d'intégrabilité : demander $u \in L^1(\mathbb{R})$ implique que u n'est pas trop grand en $\pm\infty$. On vérifie aisément que

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'' = 0 \\ u \in L^1(\mathbb{R}) \end{array} \quad \text{dans } \mathbb{R} \right\} \Rightarrow u \equiv 0.$$

C'est ce type de condition d'intégrabilité qu'on demandera à partir de maintenant.

La seconde difficulté est que nous avons intensivement utilisé la compacité d'intervalles comme $[0, 1]$ pour obtenir des résultats d'existence. Ceci ne fonctionnera pas sur $\mathbb{R}$. Cependant, $\mathbb{R}$ a une structure de groupe, et même de groupe topologique (la somme et l'inverse sont continus). Ceci va nous permettre de définir la transformée de Fourier via la théorie de l'intégration.

Un aspect particulièrement remarquable de la transformée de Fourier est qu'elle transforme la dérivation en multiplication, et inversement. Donc, d'un certain point de vue, les problèmes d'EDOs seront simplifiés, mais il faudra être très vigilant aux éventuels pièges. Quoi qu'il en soit, on aura une méthode efficace de résolution de certaines EDOs sur $\mathbb{R}$.

La transformée de Fourier L^1 –Fourier

1. C’est quoi ? Ça sert à quoi ?

Cette section est de la Science-Fiction : tout y est formel...

1.1. Définition formelle.

Definition 96. Lorsque cela fait sense, pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on définit la Transformée de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ comme

$$(18) \quad \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

1.2. Si les calculs ci-dessous sont justifiés... (et ce sera la question essentielle), la Transformation de Fourier ”transforme” :

1.2.1. *Le produit de convolution en un produit classique.* Quand cela fait sense, pour $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on définit

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \widehat{f \star g}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in \mathbb{R}} (f \star g)(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_{t \in \mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt \right) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{t \in \mathbb{R}} f(x-t)g(t) e^{-i\xi x} dx dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y \in \mathbb{R}} \int_{t \in \mathbb{R}} f(y)g(t) e^{-i\xi(y+t)} dy dt \text{ with } x \rightarrow y = x-t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{y \in \mathbb{R}} f(y) e^{-i\xi y} dy \right) \left(\int_{t \in \mathbb{R}} g(t) e^{-i\xi t} dt \right) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

et donc

$$(19) \quad \boxed{\widehat{f \star g} = \sqrt{2\pi} \hat{f} \cdot \hat{g}.}$$

1.2.2. *La dérivée en un produit par $i\xi$.*

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{df}{dx}(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left([f(x) e^{-i\xi x}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{d}{dx} (e^{-i\xi x}) dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx = i\xi \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\hat{f}'(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)}$$

1.2.3. *Le produit par x en une dérivée.*

$$\begin{aligned}\widehat{xf(x)}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{-i} \frac{d}{d\xi} (e^{-i\xi x}) dx \\ &= i \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x} dx \right) = i (\hat{f})'(\xi)\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\widehat{xf(x)} = i (\hat{f})'(\xi)}.$$

1.3. Application à une EDO. Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(20) **(Q1)** : Existe-t'il $u \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $-u'' + u = f$?

La réponse est "oui" : c'est une conséquence directe du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire 122 qui nous donne que les solutions de (20) forment un espace affine de dimension deux.

Résolvons ce problème formellement en utilisant la transformation de Fourier. Si u est une solution de (20), on a

$$-\widehat{u''} + \hat{u} = \hat{f} \Rightarrow -(i\xi)^2 \hat{u} + \hat{u} = \hat{f} \Rightarrow (1 + |\xi|^2) \hat{u} = \hat{f}$$

et donc

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2}$$

Par conséquent, si on peut inverser la transformée de Fourier (et on le pourra!), on récupère une solution u , et elle sera unique.

A propos de l'unicité. Donc, si tous les calculs ci-dessus sont justifiés, on aura existence et unicité des solutions. Cependant, pour toute fonction $u \in C^2(\mathbb{R})$ solution de (20), alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $x \mapsto u(x) + \lambda e^x + \mu e^{-x}$ qui est aussi une solution de (20) : donc on n'a pas unicité.

Qu'est-ce qui cloche ici ? Définir la transformée de Fourier comme dans (18) impose une condition d'intégrabilité qui force l'unicité, comme par exemple dans l'exemple (17). Nous prouverons que lorsque $f \in L^1(\mathbb{R})$, il y a une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R})$ de (20) qui vérifie $u \in L^1(\mathbb{R})$.

Remarquons quand même que lorsque $u \in L^1(\mathbb{R})$, ajouter $x \mapsto e^x$ "tue" l'intégrabilité en $+\infty$, et $x \mapsto e^{-x}$ "tue" l'intégrabilité en $-\infty$: donc la seule façon de conserver l'intégrabilité en ajoutant $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$ est d'avoir $\lambda = \mu = 0$. C'est ainsi que la condition d'intégrabilité assurera l'unicité.

Rendons maintenant tout ceci mathématiquement rigoureux.

2. Définition et quelques propriétés classiques

2.1. Définition.

Définition 97 (Transformée de Fourier L^1). Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction intégrable. On définit sa transformée de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ comme

$$(21) \quad \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x} dx \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

Notons que cette définition fait sens car pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a $x \mapsto |f(x)e^{-i\xi x}| = |f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$.

2.2. Premiers exemples.

- Déterminons la transformée de $\mathbf{1}_{[0,1]}$. Ceci fait sens car $\mathbf{1}_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R})$.

Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{1}_{[0,1]}}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \int_0^1 dx = 1 & \text{si } \xi = 0 \\ \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right) dx = \frac{e^{-i\xi} - 1}{-i\xi} = e^{-i\frac{\xi}{2}} \frac{e^{i\frac{\xi}{2}} - e^{-i\frac{\xi}{2}}}{i\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

et ainsi

$$(22) \quad \widehat{\mathbf{1}_{[0,1]}}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{si } \xi = 0 \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{\xi}{2}} \frac{2 \sin(\frac{\xi}{2})}{\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \end{cases}$$

Puisque $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$, on note que $\widehat{\mathbf{1}_{[0,1]}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par abus d'écriture, on notera souvent

$$\widehat{\mathbf{1}_{[0,1]}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{\xi}{2}} \frac{2 \sin(\frac{\xi}{2})}{\xi}$$

en considérant que cette expression est valide pour $\xi \neq 0$ et se prolonge par continuité en $\xi = 0$.

- Déterminons maintenant la transformée de $x \mapsto e^{-a|x|}$ pour $a > 0$. Ceci fait sens car $x \mapsto e^{-a|x|} \in L^1(\mathbb{R})$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{f_a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{ax-i\xi x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-ax-i\xi x} dx \right)$$

Il est toujours dangereux de faire des calculs avec $\int^\infty$, car ceci implique une limite en l'infini. Jouons plutôt la sécurité et écrivons la limite explicitement :

$$\widehat{f_a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-R}^0 e^{(a-i\xi)x} dx + \int_0^R e^{-(a+i\xi)x} dx \right),$$

ce qui fait sens car $f_a \in L^1(\mathbb{R})$. On a donc

$$\begin{aligned}\widehat{f_a}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\left[\frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi} \right]_{-R}^0 + \left[\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-a-i\xi} \right]_0^R \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - e^{-R(a-i\xi)}}{a-i\xi} + \frac{e^{-(a+i\xi)R} - 1}{-a-i\xi} \right)\end{aligned}$$

Comme $|e^{-R(a-i\xi)}| = |e^{-R(a+i\xi)}| = e^{-aR} \rightarrow 0$ lorsque $R \rightarrow +\infty$ car $a > 0$, on obtient

$$\widehat{f_a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-i\xi} + \frac{-1}{-a-i\xi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a+i\xi + a-i\xi}{(a-i\xi)(a+i\xi)}$$

et donc

$$\widehat{f_a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \xi^2}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Notation : Afin d'éviter des notations inutilement lourdes, au lieu d'écrire rigoureusement

$$x \mapsto \widehat{f(x)}(\xi) = \hat{f}(\xi),$$

on notera souvent la transformée de Fourier d'une façon (abusivement) plus compacte comme

$$\widehat{f(x)} = \hat{f}(\xi) \text{ for } \xi \in \mathbb{R}.$$

Par exemple, on écrira

$$(23) \quad \widehat{\mathbf{1}_{[0,1]}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi \frac{1}{2}} \frac{2 \sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\xi} \text{ et } \widehat{e^{-a|x|}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \xi^2}.$$

S'il y a la moindre ambiguïté, ou bien si vous ne vous sentez pas à l'aise avec cette notation, revenez immédiatement à la formulation rigoureuse.

Dans la mesure du possible, on notera x la variable de la fonction dont on prend la transformée de Fourier ($\widehat{f(x)}$), et ξ la variable de la transformée de Fourier ($\hat{f}(\xi)$). Ceci aura ses limites lorsqu'on verra la formule d'inversion. Même si c'est une convention largement (=universellement) utilisée, il n'y a cependant aucune obligation de la suivre : écrire $\hat{f}(z) = \widehat{f(t)}$ pour $z \in \mathbb{R}$ est parfaitement correct !

Exercice 13 : Pour $a < b$ deux réels quelconques, déterminez $\widehat{\mathbf{1}_{[a,b]}}$. Quelle est la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-1,1]}$?

Exercice 14 : On définit la fonction triangle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminez sa transformée de Fourier si elle est définie.

2.3. Régularité et comportement à l'infini. Dans les exemples ci-dessus, on a vu que les deux transformées de Fourier sont continues, et que

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \widehat{\mathbf{1}_{[0,1]}}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \widehat{e^{-a|x|}}(\xi) = 0.$$

C'est un fait général :

THÉORÈME 98. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction intégrable. Alors $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0$. De plus

$$\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \frac{\|f\|_1}{\sqrt{2\pi}}.$$

DÉMONSTRATION. On commence par la continuité en utilisant le théorème de continuité pour les intégrales dépendant d'un paramètre. On définit $F(\xi, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\xi x}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et p.p. $x \in \mathbb{R}$, de sorte que

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} F(\xi, x) dx \text{ for all } \xi \in \mathbb{R}.$$

On a

- Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $F(\xi, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$
- Pour p.p. $x \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto F(\xi, x) = f(x) e^{-i\xi x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (comme x est fixé, ce n'est qu'une exponentielle)

- Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et p.p. $x \in \mathbb{R}$, on a $|F(\xi, x)| \leq g(x)$ avec $g \in L^1(\mathbb{R})$ (ici, il suffit de prendre $g(x) = |f(x)|$ pour p.p. $x \in \mathbb{R}$)

Il suit alors du théorème de continuité 124 que $\hat{f}$ est continue.

Traisons maintenant les limites en $\pm\infty$. En fait, ce n'est rien d'autre que le Lemme de Riemann-Lebesgue Lemma qu'on va prouver ici. Dans un premier temps, on suppose que $f \in C_c^1(\mathbb{R})$, et on se donne $R > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $|x| \geq R$. Pour $\xi \neq 0$, en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x} dx = \int_{-R}^R f(x)e^{-i\xi x} dx = \int_{-R}^R f(x) \left(\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right)' dx \\ &= \left[f(x) \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_{-R}^R - \frac{1}{-i\xi} \int_{-R}^R f'(x)e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{i\xi} \int_{-R}^R f'(x)e^{-i\xi x} dx\end{aligned}$$

et donc

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{2R \max_{x \in [-R, R]} |f'(x)|}{\sqrt{2\pi}|\xi|} \text{ pour tout } \xi \neq 0.$$

Par conséquent, $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0$ lorsque $f \in C_c^1(\mathbb{R})$.

Dans un second temps, considérons le cas général. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et fixons $\epsilon > 0$. Comme $C_c^1(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ pour la norme L^1 , il existe $g \in C_c^1(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_1 < \sqrt{2\pi}\frac{\epsilon}{2}$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on écrit

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \leq \frac{\|f - g\|_1}{\sqrt{2\pi}} + |\hat{g}(\xi)| < \frac{\epsilon}{2} + |\hat{g}(\xi)|.$$

Comme $g \in C_c^1(\mathbb{R})$, on a vu que $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \hat{g}(\xi) = 0$. On pose donc $R_\epsilon > 0$ tel que $|\hat{g}(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}$ pour $|\xi| > R_\epsilon$. On obtient ainsi

$$|\hat{f}(\xi)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ for } |\xi| > R_\epsilon,$$

et donc $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0$, ce qui conclut la preuve. $\square$

2.4. Opérations algébriques.

2.4.1. *Linéarité et continuité de $f \mapsto \hat{f}$.* On munit $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ t.q. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0\}$ de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ pour $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Exercice 15 : Montrez que $\|f\|_\infty < \infty$ pour tout $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Proposition 99. Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{\lambda f + \mu g} = \lambda \hat{f} + \mu \hat{g}.$$

De plus l'application

$$\begin{cases} \wedge : (L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_1) & \rightarrow (C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty) \\ f & \mapsto \hat{f} \end{cases}$$

est linéaire et continue.

DÉMONSTRATION. La linéarité est immédiate et la continuité vient de l'inégalité $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 / \sqrt{2\pi}$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. $\square$

2.4.2. Multiplication par une exponentielle, translation, dilatation.

Proposition 100. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors

- $\widehat{f(x)e^{i\alpha x}} = \hat{f}(\xi - \alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\widehat{f(x - \alpha)} = \hat{f}(\xi)e^{-i\alpha\xi}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\widehat{f(\lambda x)} = \frac{1}{\lambda}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$ pour tout $\lambda > 0$

Exercice 16 : Démontrez la Proposition 100. Donnez une expression générale de $\widehat{f(\lambda x)}$ pour $\lambda \neq 0$ (expression qui doit inclure le cas $\lambda < 0$).

Exercice 17 : Ecrivez $\mathbf{1}_{[a,b]}$ comme une composée de $\mathbf{1}_{[0,1]}$ avec une dilatation et une translation. En utilisant (23) et la Proposition 100, donnez une preuve alternative de $\widehat{\mathbf{1}_{[a,b]}}$.

2.5. Produit de convolution.

Proposition 101. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors $f \star g(x)$ est définie p.p. $x \in \mathbb{R}$ et $f \star g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. De plus, $\widehat{f \star g} = \sqrt{2\pi}\hat{f} \cdot \hat{g}$.

DÉMONSTRATION. Les fonctions suivantes étant positives, il suit du Théorème de Fubini (ou bien Fubini-Tonelli, suivant les goûts) que

$$\begin{aligned} \int_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_{t \in \mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| dt \right) dx &= \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{x \in \mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| dt dx = \int_{t \in \mathbb{R}} |g(t)| \left(\int_{x \in \mathbb{R}} |f(x-t)| dx \right) dt \\ &= \int_{t \in \mathbb{R}} |g(t)| \left(\int_{y \in \mathbb{R}} |f(y)| dy \right) dt \text{ avec } y = x - t \\ (24) \quad &= \int_{t \in \mathbb{R}} |g(t)| \|f\|_1 dt = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty \end{aligned}$$

Donc $\int_{t \in \mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| dt < +\infty$ pour p.p. $x \in \mathbb{R}$, et donc $f \star g(x)$ est définie pour p.p. $x \in \mathbb{R}$. Les estimées ci-dessus donnent directement $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$, et donc $f \star g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Puis, en utilisant le théorème de Fubini pour les fonctions intégrables et un changement de variables, on rend rigoureuse la preuve de (19).

Exercice 18 : Ecrivez rigoureusement la preuve de (19). $\square$

3. Dérivation

3.1. Un Lemme utile.

Lemma 102. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existent.

DÉMONSTRATION. Comme nous n'avons aucune idée de la valeur des limites, il faut penser à utiliser la complétude et les suites de Cauchy. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. La clé est l'inégalité

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq \int_x^y |f'(t)| dt \leq \int_x^\infty |f'(t)| dt.$$

Comme $f' \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^\infty |f'(t)| dt = 0$. Par conséquent, on a

$$(25) \quad \forall \epsilon > 0, \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \mathbb{R}, \{x, y > A \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon\}$$

ce qui est version "continue" des suites de Cauchy. On va montrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe.

- Etape 1 : pour toute suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \in \mathbb{R}$ et $x_n \rightarrow +\infty$, alors $(f(x_n))_n$ a une limite lorsque $n \rightarrow \infty$.
- Etape 2 : Il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que pour toute suite $(x_n) \rightarrow +\infty$, alors $f(x_n) \rightarrow l$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- Etape 3 : il s'agit de l'Etape 2 et des la caractérisation des limites par les suites que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe et vaut l . En prenant la fonction $x \mapsto f(-x)$, on obtient l'existence d'une limite lorsque $x \rightarrow -\infty$.

□

3.2. Transformée de Fourier de la dérivée.

Proposition 103. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f, f' \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

DÉMONSTRATION. On commence par prouver que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

En effet, il suit du Lemme 102 qu'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$. Supposons que $l \neq 0$. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = |l| > |l|/2$, donc il existe $A > 0$ tel que $|f(x)| > |l|/2$ pour tout $x > A$, et donc $\int_A^M |f(x)| dx \geq (M - A)|l|/2$ pour tout $M > A$. En faisant tendre $M \rightarrow \infty$, on obtient $\int_A^\infty |f(x)| dx = \infty$, ce qui contredit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Donc $l = 0$. Le résultat pour $x \rightarrow -\infty$ suit en utilisant l'application $x \mapsto f(-x)$. Ceci termine la preuve de la limite en $\pm\infty$.

Prouvons maintenant la proposition. Tout comme pour le produit de convolution, nous allons rendre rigoureuse la preuve formelle effectuée dans la première section. On se donne $\xi \in \mathbb{R}$. En prenant les intégrales sur $] -R, R[$ pour plus de sécurité (ceci est justifié car $f' \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$), on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f'(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left([f(x) e^{-i\xi x}]_{-R}^R - \int_{-R}^R f(x) (e^{-i\xi x})' dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left([f(x) e^{-i\xi x}]_{-R}^R + i\xi \int_{-R}^R f(x) e^{-i\xi x} dx \right) \end{aligned}$$

Comme $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, on obtient donc

$$\widehat{f'}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = i\xi \widehat{f}(\xi).$$

Ce qui prouve la proposition. □

3.3. Dérivée de la transformée de Fourier.

Proposition 104. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et

$$(26) \quad (\widehat{f})'(\xi) = -i \widehat{xf(x)}(\xi) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

D'une façon plus compacte, on écrit

$$(27) \quad (\hat{f})' = -i\widehat{xf(x)}$$

DÉMONSTRATION. On prend les notations du Théorème 98. On définit $F(\xi, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-i\xi x}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et p.p. $x \in \mathbb{R}$, de sorte que

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} F(\xi, x) dx \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

On a :

- Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $F(\xi, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$
- Pour p.p. $x \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto F(\xi, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-i\xi x}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ (là encore, comme x est fixé, c'est juste le produit d'une constante par une exponentielle)
- Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et p.p. $x \in \mathbb{R}$, on a $|\frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi, x)| \leq h(x)$ avec $h \in L^1(\mathbb{R})$. Ici, on prend $h(x) = |xf(x)|$ pour p.p. $x \in \mathbb{R}$, et on a bien $h \in L^1(\mathbb{R})$ avec nos hypothèses.

Il suit du Théorème différentiabilité 125 que $\hat{f}$ est dérivable et que

$$\begin{aligned} (\hat{f})'(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi, x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \times (-ix) \times e^{-i\xi x} dx \\ &= -i(x \mapsto \widehat{xf(x)})(\xi) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De plus, comme $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, sa transformée de Fourier est continue (Théorème 98), et donc $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$. $\square$

3.4. Dérivées d'ordres supérieurs. En itérant les propositions ci-dessus, on obtient

Proposition 105. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$x \mapsto (1 + |x|^n)f(x) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Rightarrow \hat{f} \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

De plus, pour tout $k = \{0, \dots, n\}$, on a

$$(\hat{f})^{(k)} = (-i)^k \widehat{x^k f(x)}.$$

Proposition 106. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad \forall 0 \leq k \leq n \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{f^{(k)}} = (i\xi)^k \hat{f}(\xi) \quad \forall 0 \leq k \leq n \text{ et } \xi \in \mathbb{R}.$$

Exercice 19 : Démontrez ces propositions.

Remarque importante : Il suit de la Proposition 106 que si $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ avec $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, alors

$$(28) \quad (1 + |\xi|^n)|\hat{f}(\xi)| = |\hat{f}(\xi)| + |\widehat{f^{(n)}}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1} + \|f^{(n)}\|_{L^1}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Cette inégalité et la Proposition 105 montre qu'il y a (presque) une correspondance entre régularité (c'est-à-dire l'ordre de dérivation) et comportement à l'infini via la transformée de Fourier. Par exemple, en combinant ces deux propositions et le Théorème 98, en prenant $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$x \mapsto (1 + |x|^n)f(x) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Rightarrow f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

et (28) donne

$$f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad (\text{et } f^{(k)} \in L^1 \forall k \leq n) \Rightarrow (1 + |\xi|^n) \hat{f}(\xi) = o(1) \text{ as } \xi \rightarrow \pm\infty.$$

Ce n'est pas vraiment une correspondance, vu qu'on doit mettre des hypothèses supplémentaires pour passer de $o(1)$ à L^1 , mais c'est l'idée à garder en tête :

Via la transformée de Fourier, plus on a de régularité, plus on a d'intégrabilité, et inversement.

3.5. Application : transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-ax^2}$.

Proposition 107. *Pour $a > 0$, on a*

$$\widehat{e^{-ax^2}} = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}.$$

En particulier, en prenant $a = 1/2$, on a $\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}} = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$: la fonction $x \mapsto e^{-x^2/2}$ est invariante par la transformée de Fourier.

On prouve ce résultat e plusieurs étapes. On définit $f(x) := e^{-ax^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Notons que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que

$$f'(x) = -2axf(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Prenons la transformée de Fourier : ceci fait sens car $f, f' \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, ce qui implique que $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Il suit des Propositions 103 et 104 que

$$i\xi \hat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi) = -\widehat{2axf(x)} = -2a\widehat{xf(x)} = -2ai(\hat{f})'(\xi) \Rightarrow (\hat{f})'(\xi) = \frac{-\xi}{2a}\hat{f}(\xi)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. La résolution de cette EDO donne

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}(0)e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

De plus,

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Et du coup, on obtient

$$\boxed{\widehat{e^{-ax^2}} = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}}.$$

La formule d'inversion et application à quelques EDOs

La question centrale de ce chapitre est la suivante :

*Q : Une fonction est-elle uniquement déterminée par sa transformée de Fourier ?
Si oui, peut-on reconstruire une fonction à partir de sa transformée de Fourier ?*

1. Le théorème d'inversion

1.1. La réponse. La réponse à la question posée est très simple :

THÉORÈME 108. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors

$$(29) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \text{ pour p.p. } x \in \mathbb{R}.$$

Cependant... Attention, il y a des hypothèses!!! Cette formule d'inversion n'est valide que si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Et elle n'est pas valable partout : seulement p.p....

Important ! La puissance est $e^{ix\xi}$, pas $e^{-ix\xi}$.

1.2. Quelques conséquences.

Proposition 109. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\hat{f} \equiv 0$ p.p. Alors $f(x) = 0$ p.p. $x \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Dans ce cas, on a $0 = \hat{f}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($\hat{f}$ est continue). Donc $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et la formule d'inversion (29) donne $f(x) = 0$ pour p.p. $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Proposition 110. La transformée de Fourier est injective de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vers $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

DÉMONSTRATION. La transformée est linéaire, et son noyau est $\{0\}$ d'après la proposition précédente. Donc elle est injective. $\square$

2. Preuve du théorème d'inversion

2.1. Un théorème classique très utile.

THÉORÈME 111 (Approximation de l'unité). Soit $(g_\epsilon)_{\epsilon>0}$ telle que $g_\epsilon \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $\epsilon > 0$. On suppose que

- $g_\epsilon \geq 0$ pour tout $\epsilon > 0$;
- $\int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(x) dx = 1$ pour tout $\epsilon > 0$;
- Pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>\delta} g_\epsilon(x) dx = 0.$$

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ où $1 \leq p < +\infty$. Alors $g_\epsilon \star f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon \star f = f \text{ in } L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

2.2. Un lemme intermédiaire. Soient $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ deux fonctions intégrables. On définit

$$F(y, z) = \varphi(y)\psi(z)e^{-iyz} \text{ pour p.p. } (y, z) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrez que $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

2. Montrez que

$$(30) \quad \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(z)\psi(z) dz = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\hat{\psi}(y) dy$$

et que ces deux intégrales font sens.

2.3. Preuve du Théorème 108 (exercice). Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On définit $h(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Il suit de 107 que

- $h \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
- $\hat{h} = h$ and $\int_{\mathbb{R}} h(z) dz = 1$

Pour $\epsilon > 0$, on définit $h_\epsilon(z) := h(\epsilon z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. On pose $g_\epsilon = \hat{h}_\epsilon$.

3. Montrez que $g_\epsilon(\xi) = \frac{1}{\epsilon}h\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

4. Montrez que g_ϵ vérifie les hypothèses du Théorème 111.

On fixe $x \in \mathbb{R}$.

5. On définit $\varphi(y) := f(x - y)$ pour p.p. $y \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$\hat{\varphi}(z) = e^{-ixz}\hat{f}(-z) \text{ pour p.p. } z \in \mathbb{R}.$$

6. En utilisant (30) et la parité de h_ϵ , montrez que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{f}(z)h_\epsilon(z) dz = f \star g_\epsilon(x)$$

7. Montrez que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{ixz}\hat{f}(z)h_\epsilon(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixz}\hat{f}(z) dz$$

8. Montrez le Théorème 108 en utilisant le Théorème 111. .

3. Application à la résolution de quelques EDOs

On se donne $f \in C^0(\mathbb{R})$. Existe-t'il $u \in C^2(\mathbb{R})$ telle que

$$(31) \quad -u'' + u = f \text{ dans } \mathbb{R}?$$

On va raisonner comme au début du Chapitre 8.

3.1. Etape 1 : Etude formelle. Ici, tous les calculs sont effectués sans justification (c'est formel). On a alors

$$-\widehat{u''} + u = \hat{f} \Rightarrow -(i\xi)^2 \hat{u} + \hat{u} = \hat{f} \Rightarrow (1 + |\xi|^2) \hat{u} = \hat{f}$$

et donc

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2}.$$

Avec la formule d'inversion, on trouve

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2} e^{ix\xi} d\xi.$$

Et ceci va être un bon candidat pour être solution de notre problème.

3.2. Etape 2 : Construction rigoureuse de u . On suppose que

$$f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad (H_1)$$

et on définit

$$u(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2} e^{ix\xi} d\xi \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ceci fait sens : définissons $g : \xi \mapsto g(\xi) := \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2}$, alors

$$|g(\xi)| \leq \frac{\|\hat{f}\|_{\infty}}{1 + |\xi|^2} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ car } 2 > 1 \text{ et } \hat{f} \in L^{\infty}.$$

Donc $u(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Définissons

$$F(x, \xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2} e^{ix\xi} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et p.p. } \xi \in \mathbb{R}$$

de sorte que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x, \xi) d\xi \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Montrons que u est continue. On a

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$
- Pour p.p. $\xi \in X$, $x \mapsto F(x, \xi)$ est continue
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et p.p. $\xi \in \mathbb{R}$, on a $|F(x, \xi)| \leq |g(\xi)|$, avec $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ indépendante de x

Par conséquent, il suit du Théorème 124 que $u \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Remarque : comme g est paire, avec le changement de variables $\xi \mapsto -\xi$, on a $u = \hat{g}$, et donc u est continue comme transformée de Fourier d'une fonction L^1 .

3.3. Etape 3 : Dérivées de u . Ici, on utilise le Théorème 125. Notons que pour p.p. $\xi \in \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x, \xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2} i\xi e^{ix\xi} \text{ et } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2} (i\xi)^2 e^{ix\xi}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et p.p. $\xi \in \mathbb{R}$. Trouvons des bornes supérieures :

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, \xi) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{|\hat{f}(\xi)|}{1 + |\xi|^2} |\xi| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\hat{f}(\xi)| \frac{|\xi|}{1 + |\xi|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\hat{f}(\xi)|$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et p.p. $\xi \in \mathbb{R}$, et cette borne supérieures est indépendante de x . De même,

$$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \xi) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{|\hat{f}(\xi)|}{1 + |\xi|^2} |\xi|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\hat{f}(\xi)| \frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\hat{f}(\xi)|$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et p.p. $\xi \in \mathbb{R}$, et cette borne supérieures est indépendante de x . Afin d'appliquer le théorème de dérivation, on va supposer que

$$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad (H_2)$$

Alors, en appliquant deux fois le Théorème 125 que $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que

$$u'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial F}{\partial x}(x, \xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2} i\xi e^{ix\xi} d\xi \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

$$u''(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2} (i\xi)^2 e^{ix\xi} d\xi \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

3.4. Etape 4 : u est une solution de (31). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2} (-(i\xi)^2 + 1) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2} (|\xi|^2 + 1) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \end{aligned}$$

Et comme $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la formule d'inversion donne

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \text{ pour p.p. } x \in \mathbb{R}.$$

Comme $-u'' + u$ et f sont continues, on obtient que l'égalité a lieu pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc u est solution de (31).

3.5. Etape 5 : à propos de l'unicité. Dans notre construction, $u = \hat{g}$ où $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0.$$

On affirme que u est l'unique solution de (31) qui tend vers 0 en $\pm\infty$. En fait, soit $v \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une autre telle solution. Alors $w := u - v \in C^2$ vérifie

$$-w'' + w = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} w(x) = 0.$$

Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $w(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} |w(x)| = +\infty$, ce qui contredit la limite nulle. Donc $\lambda = 0$. Si $\mu \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} |w(x)| = +\infty$, ce qui est une nouvelle contradiction. Donc $w = 0$ puis $u = v$ ce qui prouve l'unicité.

Finalement, on a démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 112. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors il existe $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} -u'' + u = f \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0 \end{array} \quad \text{dans } \mathbb{R} \right\}.$$

De plus une telle solution est unique.

Exercice 20 : Utilisez la méthode ci-dessus pour montrer qu'il existe une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R})$ de

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'' + 2u' + u = e^{-|x|} \quad \text{dans } \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

4. Application à l'équation de la chaleur

4.1. Le contexte. Soit $u_0 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On cherche à prouver l'existence de d'une fonction $u \in C^2([0, +\infty[\times \mathbb{R}) \cap C^0([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ qui est solution de l'équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \quad (Heat)$$

Il est plus standard de résoudre l'équation de la chaleur sur le cercle via les séries de Fourier. Ici, on présente une méthode sur $\mathbb{R}$. Nous verrons que la non-compacité induit des différences quantitatives.

On a ici deux variables, donc c'est une Equation aux Dérivées Partielle (EDP). On va effectuer la transformée de Fourier par rapport à la variable x (la variable d'espace), en gelant la variable de temps t . Ainsi l'EDP (de deux variables) va devenir une EDO (en la variable de temps).

4.2. Résolution de (Heat). *Etape 1 : Résolution formelle.* On effectue la transformée de Fourier en la variable d'espace, c'est-à-dire on pose

$$(33) \quad \hat{u}(t, \xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-ix\xi} dx = \widehat{u(t, \cdot)}(\xi) \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Formellement, on a alors

$$\partial_{xx}^2 \widehat{u(t, \cdot)} = (i\xi)^2 \widehat{u(t, \cdot)} = -\xi^2 \hat{u}(t, \xi).$$

En dérivant (33) par rapport à t , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, \xi) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-ix\xi} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(t, x) e^{-ix\xi} dx = \widehat{\partial_t u(t, \cdot)}(\xi)$$

On réécrit alors (Heat) comme

$$0 = \hat{0} = \partial_t \widehat{u} - \partial_{xx}^2 \widehat{u} = \partial_t \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u}$$

de sorte que

$$\partial_t \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} = 0 \text{ for } t \geq 0 \text{ and } \xi \in \mathbb{R}.$$

En gelant la variable d'espace ξ , c'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. On peut la résoudre et on obtient

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}(0, \xi) e^{-|\xi|^2 t}$$

Avec la condition initiale $u(0, x) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\hat{u}(0, \xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(0, x) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u_0(x) e^{-ix\xi} dx = \widehat{u_0}(\xi)$$

et donc

$$\hat{u}(t, \xi) = \widehat{u_0}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}.$$

Avec le théorème d'inversion, on obtient l'expression

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(t, \xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{u_0}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{i\xi x} d\xi.$$

Et ceci va être notre candidat.

Etape 2 : Définition rigoureuse de $u(t, x)$ On suppose que

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ et } \widehat{u_0} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

On définit

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{u_0}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{i\xi x} d\xi \text{ pour tous } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Cette fonction est bien définie, car en posant

$$F(t, x, \xi) := \widehat{u_0}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{i\xi x} \text{ pour } t, x, \xi \in \mathbb{R},$$

on a $|F(t, x\xi)| \leq |\widehat{u_0}(\xi)|$ for $t \geq 0, x, \xi \in \mathbb{R}$, et comme $\widehat{u_0} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, il vient que

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} F(t, x, \xi) d\xi$$

est définie pour tous $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

Etape 3 : Continuité de u sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ Ici encore, c'est une application immédiate du Théorème 124. On a :

- Pour pp $\xi \in \mathbb{R}$ (en fait $\forall$), $(t, x) \mapsto F(t, x, \xi) = \widehat{u_0}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{i\xi x}$ est continue sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.
- Pour tous $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$, $\xi \mapsto F(t, x, \xi)$ is integrable on $\mathbb{R}$
- Pour tous $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et pp (en fait $\forall$ ici) $\xi \in \mathbb{R}$, on a $|F(t, x\xi)| \leq |\widehat{u_0}(\xi)|$, avec $\widehat{u_0} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et cette domination est indépendante de t, x .

Il suit alors du Théorème 124 que

$$u \in C^0([0, +\infty[\times \mathbb{R}).$$

Etape 4 : Différentiabilité de u sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ C'est là qu'on va devoir exclure $t = 0$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a $(t, \xi) \mapsto F(t, x, \xi)$ qui est C^2 (et même C^∞) sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, \xi) &= (i\xi) \widehat{u_0}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{i\xi x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x, \xi) &= (i\xi)^2 \widehat{u_0}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{i\xi x} \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t, x, \xi) &= -|\xi|^2 \widehat{u_0}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{i\xi x} \\ \frac{\partial F^2}{\partial t^2}(t, x, \xi) &= |\xi|^4 \widehat{u_0}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{i\xi x} \end{aligned}$$

pour tous $t, x, \xi \in \mathbb{R}$. Par conséquent, on multiplie par un polynôme qui brise l'intégrabilité. Cependant, ceci eut être compensé par l'exponentielle pour des $t > 0$.

Fixons $a > 0$. Alors pour $t > a$, $x, \xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, \xi) \right| &= |\xi| \cdot |\widehat{u_0}(\xi)| e^{-|\xi|^2 t} \leq |\xi| e^{-a|\xi|^2} |\widehat{u_0}(\xi)| \\ \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x, \xi) \right| &= |\xi|^2 |\widehat{u_0}(\xi)| e^{-|\xi|^2 t} \leq |\xi|^2 e^{-a|\xi|^2} |\widehat{u_0}(\xi)| \\ \left| \frac{\partial F}{\partial t}(t, x, \xi) \right| &= |\xi|^2 |\widehat{u_0}(\xi)| e^{-|\xi|^2 t} \leq |\xi|^2 e^{-a|\xi|^2} |\widehat{u_0}(\xi)| \\ \left| \frac{\partial F^2}{\partial t^2}(t, x, \xi) \right| &= |\xi|^4 |\widehat{u_0}(\xi)| e^{-|\xi|^2 t} \leq |\xi|^4 e^{-a|\xi|^2} |\widehat{u_0}(\xi)| \end{aligned}$$

Comme $a > 0$, on a

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} |X|^k e^{-aX^2} = 0 \text{ for all } k \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, il existe $M > 0$ tel que

$$|X|^k e^{-aX^2} \leq M \text{ pour tous } k = 0, \dots, 4 \text{ et } X \in \mathbb{R}.$$

Et donc, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, \xi) \right| &\leq M |\widehat{u_0}(\xi)| ; \quad \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x, \xi) \right| \leq M |\widehat{u_0}(\xi)| \\ \left| \frac{\partial F}{\partial t}(t, x, \xi) \right| &\leq M |\widehat{u_0}(\xi)| ; \quad \left| \frac{\partial F^2}{\partial t^2}(t, x, \xi) \right| \leq M |\widehat{u_0}(\xi)| \end{aligned}$$

pour tous $t > a$ et $x, \xi \in \mathbb{R}$.

On va maintenant pouvoir prouver la différentiabilité de u . Pour $a > 0$, on a :

- Pour tout $t > a$ et tous $x \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto F(t, x, \xi)$ est intégrable
- Pour pp (tous...) $\xi \in \mathbb{R}$, alors $(t, x) \mapsto F(t, x, \xi)$ est C^2 sur $]a, +\infty[\times \mathbb{R}$
- Toutes les dérivées partielles d'ordre ≤ 2 en les variables (t, x) sont contrôlées indépendamment de (t, x) par une fonction de L^1

Il suit alors d'une double application du Théorème 125 que $u \in C^2([a, +\infty[\times \mathbb{R})$ pour tout $a > 0$. Et donc $u \in C^2([0, +\infty[\times \mathbb{R})$.

Etape 5 : solution de (Heat) Pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, il suit de l'étape précédente que

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \partial_{xx} u(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t F(t, x, \xi) - \partial_{xx} F(t, x, \xi)) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-|\xi|^2 + |\xi|^2) \widehat{u_0}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{i\xi x} d\xi = 0 \end{aligned}$$

pour tous $t > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u(0, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} F(0, x, \xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{u_0}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Comme $u_0, \widehat{u_0} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, il suit de la formule d'inversion que $u(0, x) = u_0(x)$ pour p.p. $x \in \mathbb{R}$. Comme $u(0, \cdot)$ est continue (Etape 3) et u_0 aussi, il vient que $u(0, x) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc trouvé une solution de (Heat) :

THÉORÈME 113. Soit $u_0 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ et } \widehat{u_0} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Alors il existe $u \in C^2([0, +\infty[\times \mathbb{R}) \cap C^0([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ qui est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (\text{Heat})$$

Pour prouver l'unicité, il faudrait imposer un comportement asymptotique, ou bien une condition d'intégrabilité.

4.3. Dispersion de la chaleur. Il y a un phénomène particulier ici. On considère la solution obtenue ci-dessus. Alors on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x)| = 0.$$

Prouvons-le. Il suffit d'écrire

$$|u(t, x)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{u_0}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{i\xi x} d\xi \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u_0}(\xi)| e^{-|\xi|^2 t} d\xi,$$

et donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} G(t, \xi) d\xi,$$

pour tout $t > 0$ et avec $F(t, \xi) = |\widehat{u_0}(\xi)| e^{-|\xi|^2 t}$ de sorte que $0 \leq G(t, \xi) \leq |\widehat{u_0}(\xi)|$ pour tous $t > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$. Comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t, \xi) = 0 \text{ pour tous } \xi \neq 0,$$

il suit alors du Théorème 123 de convergence dominée (il suffit de prendre toutes les suites $t_n \rightarrow \infty$) que $\sup_x |u(t, x)| \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Qu'est-ce que cela signifie ? Et bien quelle que soit la répartition initiale de température (u_0), la température en tout point va décroître vers 0. L'énergie mise initialement (via u_0) va se disperser sur la totalité de la droite réelle $\mathbb{R}$. C'est une différence essentielle avec l'équation de la chaleur sur un anneau (ou un cercle) : en passant par les séries de Fourier, on prouve que la chaleur se répartit uniformément sur tout l'anneau et sera asymptotiquement la même partout. Elle vaudra la moyenne de u_0 sur l'anneau. Pour résumer :

domaine compact $\Rightarrow$ la température est moyennée avec le temps

domaine non-compact $\Rightarrow$ la température disparaît partout

4.4. A propos de la régularité. Il y a une remarque importante qui est réminiscente dans les équations d'évolution : bien que u_0 ne soit que continue (et cela peut ne pas être joli : voyez les exemples de fonctions continues nulle-part dérivables), la solution de l'équation de la chaleur devient C^2 dès que $t > 0$. On dit que l'équation de la chaleur est régularisante, quelle que soit la condition initiale.

On peut même aller plus loin : on a juste besoin de $\widehat{u_0} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour prouver la régularité C^2 avec $t > 0$. Donc si on peut définir la transformée de Fourier pour quelque chose qui n'est pas L^1 , on devrait parvenir à montrer que la solution qui en résulte est C^2 dès que $t > 0$. On peut définir la transformée de Fourier pour des fonctions L^2 (Chapitre suivant), et même pour des distributions : dans ces cas, on peut encore montrer que l'équation de la chaleur est régularisante.

Il y a quand même moyen de prolonger les dérivées partielles de u jusqu'en $t = 0$. Par exemple, prenons les dérivées en la variable x : on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, \xi) = (i\xi) \widehat{u_0}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{i\xi x},$$

et donc

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, \xi) \right| \leq |\xi \widehat{u_0}(\xi)|$$

pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$. Du coup, si $\xi \mapsto \widehat{\xi u_0}(\xi)$ est dans L^1 , on récupère un contrôle uniforme pour $t \geq 0$, et on peut appliquer le théorème de dérivation en x pour $t \geq 0$. Avec la Proposition 103, si $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et est dans L^1 , alors

$$\widehat{u'_0}(\xi) = i\xi \widehat{u_0}(\xi)$$

et donc

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, \xi) \right| \leq |\widehat{u'_0}(\xi)| \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } x, \xi \in \mathbb{R}.$$

Et donc, on applique les théorèmes de continuité et de dérivation. Au final, on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 114. *Soit $u_0 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que*

$$u_0 \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \widehat{u_0^{(k)}} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ pour } k = 0, \dots, 4.$$

Alors il existe une fonction $u \in C^2([0, +\infty[\times \mathbb{R}) \cap C^0([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ qui est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (\text{Heat})$$

De plus, les dérivées partielles d'ordres ≤ 2 se prolongent continuellement à $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Exercice 21 : Démontrez ce théorème.

5. Application à l'équation des ondes

5.1. Le contexte. Soient $u_0, u_1 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On s'intéresse à l'existence de $u \in C^2([0, +\infty[\times \mathbb{R}) \cap C^0([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ avec $(t, x) \mapsto \partial_t u(t, x)$ qui se prolonge continuellement à $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ qui est solution de l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0, x) = u_1(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (\text{Wave})$$

C'est une autre EDP classique, et c'est le modèle des équations hyperboliques. La différence avec l'équation de la chaleur est qu'on a deux dérivées temporelles : cela suffit à induire d'énormes changements. En faisant une analyse semblable à la preuve du Théorème 114, on montre que

THÉORÈME 115. *soit $u_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que*

$$u_0^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ et } \widehat{u_0^{(k)}} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ pour tous } k = 0, 1, 2.$$

Alors il existe $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ qui est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour tous } x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0, x) = 0 & \text{pour tous } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{Wave})$$

Exercice 22 : Montrez ce résultat. Puis un résultat semblable dans le cas général $u_1 \neq 0$.

La transformée de Fourier L^2

Une chose ennuyante dans la transformée de Fourier est qu'elle n'envoie pas l'espace sur lequel elle est définie (L^1) dans lui-même. Quand on pense à des Théorèmes de Point Fixe, à des endomorphismes, ou à de la réduction (diagonalisation, trigonalisation), cela pose problème : dans tous ces situations, il faut travailler sur un espace qui s'envoie sur lui-même. La clé ici est une structure L^2 qui est cachée dans la transformée de Fourier.

1. Énoncés et exemples

1.1. Le théorème d'extension.

THÉORÈME 116 (Plancherel). *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et*

$$(34) \quad \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Par conséquent, la transformée de Fourier se prolonge en une isométrie bijective $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. De plus, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \widehat{f_R} \text{ in } L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

et

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \widehat{G(f_R)} \text{ in } L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

où $f_R := \mathbf{1}_{[-R, R]} f$, $G(f_R)(x) = f_R(-x)$ pour p.p. $x \in \mathbb{R}$ et

$$\widehat{f_R}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R f(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \text{ pour p.p. } \xi \in \mathbb{R}$$

et

$$\widehat{G(f_R)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R f(\xi) e^{+ix\xi} d\xi \text{ pour p.p. } \xi \in \mathbb{R}$$

1.2. Quelques exemple. On sait que $\widehat{e^{-|x|}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+|\xi|^2}$. Comme $x \mapsto e^{-|x|} \in L^2$, alors

$$\mathcal{F}\left(x \mapsto e^{-|x|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+|\xi|^2} \text{ pour p.p. } \xi \in \mathbb{R},$$

et comme le membre de droite est dans L^2 , on obtient

$$\mathcal{F}^{-1}\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+|\xi|^2}\right) = e^{-|x|} \text{ pour p.p. } x \in \mathbb{R}$$

Calculons maintenant la transformée de Fourier de $x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+|\xi|^2}$. Comme $x \mapsto e^{-|x|}$ et $f = \widehat{x \mapsto e^{-|x|}}$ sont toutes deux dans L^1 , la formule d'inversion nous donne

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{ix\xi} d\xi \text{ pour p.p. } x \in \mathbb{R}$$

Avec le changement de variable $\xi \rightarrow -\xi$, comme f est paire, on a

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ix\xi} d\xi = \hat{f}(x) \text{ pour p.p. } x \in \mathbb{R},$$

et donc $\hat{f} = (x \mapsto e^{-|x|})$ et comme toutes ces fonctions sont dans L^2 , on obtient

$$\mathcal{F}\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+|x|^2}\right) = e^{-|\xi|}.$$

Les fonctions en jeu étant toutes à la fois dans L^1 et dans L^2 , le calcul ci-dessus a un intérêt modéré...

Intéressons-nous maintenant à $\mathbf{1}_{[-1,1]}$. On sait que $\widehat{\mathbf{1}_{[-1,1]}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \sin \xi}{\xi}$. Toutes ces fonctions étant dans L^2 , on obtient

$$\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-1,1]}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \sin \xi}{\xi} \text{ pour p.p. } \xi \in \mathbb{R}.$$

Déterminons maintenant la transformée de Fourier L^2 de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$: c'est une fonction dans L^2 , mais pas dans L^1 . Notons ici que la transformée de Fourier est "presque" son propre inverse.

On affirme que si $f \in L^1$ est paire et que $\hat{f} \in L^1$, alors $\hat{f}$ est paire et que $\widehat{\hat{f}} = f$.

Prouvons-le. Pour la parité de $\hat{f}$, un simple changement de variable donne que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\hat{f}(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(-\xi)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(-x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx = \hat{f}(\xi).$$

Donc $\hat{f}$ est paire. Avec la formule d'inversion et un changement de variable, on a p.p. $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(-\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \widehat{\hat{f}}(x),$$

et l'affirmation est prouvée.

Supposons que $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est paire. On affirme que $\mathcal{F}(f)$ est aussi paire et que $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = f$.

On commence par les fonctions à support compact. Pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, il suit de (28) qu'il existe $C > 0$ tel que $|\hat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|^2)^{-1}$, et donc $\hat{f} \in L^1$. Donc, si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est paire, le résultat ci-dessus nous donne bien

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = \widehat{\hat{f}} = f.$$

On raisonne maintenant par densité. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction paire (en fait paire p.p.) et L^2 . Soit $(f_n)_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f_n \rightarrow f$ in L^2 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Comme f est paire, on a aussi $f_n := x \mapsto (f_n(x) + f_n(-x))/2 \rightarrow f$ dans L^2 et $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est paire (p.p.). Donc $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f_n) = f_n$ pour tout n , et donc en faisant $n \rightarrow \infty$ ($\mathcal{F}$ est continue), on obtient le résultat souhaité.

On peut maintenant conclure. Comme $\mathbf{1}_{[-1,1]}$ est paire, on a

$$\mathbf{1}_{[-1,1]} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-1,1]}) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \sin \xi}{\xi}\right)$$

et donc

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbf{1}_{[-1,1]}$$

Remarquons que la transformée de Fourier de $x \mapsto \sin(x)/x$ n'est pas continue : rien d'étonnant car nous avons une fonction qui est dans L^2 , mais pas dans L^1 , et on ne peut pas appliquer le Théorème 98.

Appendix : definitions, notations, index

2. Topologie

THÉORÈME 117. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $D \subset X$ et une fonction $f : D \rightarrow Y$. On suppose que

- D est dense dans X
- $f : D \rightarrow Y$ est uniformément continue pour la distance induite par X
- (Y, d_Y) est complet.

Alors f se prolonge par continuité de façon unique en une fonction $X \rightarrow Y$ continue.

3. Calcul Différentiel

THÉORÈME 118 (Théorème d'Inversion Locale). Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts de E et F respectivement. On se donne $f : U \rightarrow V$ et on suppose que

- $f \in C^1(U, V)$
- Il existe $x_0 \in U$ tel que $df_{x_0} \in GL_c(E, F)$.

Alors il existe $U_0 \subset U$, $V_0 \subset V$ des ouverts tels que $x_0 \in U_0$, $f(x_0) \in V_0$ et $f : U_0 \rightarrow V_0$ est un C^1 -difféomorphisme. De plus, s'il existe $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, tel que $f \in C^k(U, V)$, alors $f : U_0 \rightarrow V_0$ est un C^k -difféomorphisme.

THÉORÈME 119 (Théorème d'Inversion Globale). Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts de E et F respectivement. On se donne $f : U \rightarrow V$ et on suppose que

- $f \in C^1(U, V)$
- Pour tout $x \in U$, on a $df_x \in GL_c(E, F)$
- La fonction f est injective.

Alors $W = f(U)$ est un ouvert de V et $f : U \rightarrow W$ est un C^1 -difféomorphisme. De plus, s'il existe $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, tel que $f \in C^k(U, V)$, alors $f : U \rightarrow W$ est un C^k -difféomorphisme.

4. Théorème de Cauchy-Lipschitz et conséquences

Definition 120. Soient (X, d_X) , (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques. Soit $f \in C^0(X \times Y, Z)$ où $X \times Y$ est muni de la distance produit. On dit que f est localement Lipschitzienne en la seconde variable si pour tout $(x_0, y_0) \in X \times Y$, il existe $r > 0$ et $K > 0$ tels que

$$d_Z(f(x, y), f(x, y')) \leq K d_Y(y, y') \text{ pour tout } x \in B_X(x_0, r) \text{ et } y, y' \in B_Y(y_0, r).$$

THÉORÈME 121. [Théorème de Cauchy-Lipschitz] Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$. Soit $f \in C^0(I \times U, \mathbb{R}^n)$. On suppose que f est localement Lipschitzienne en la seconde variable. On fixe $t_0 \in I$ et $x_0 \in U$. Alors il existe $\delta > 0$ et $x \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I, U)$ tels que

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \text{dans }]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap I \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

De plus, une telle solution est unique.

THÉORÈME 122. [Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire] Soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$, soient $A \in C^0(I, M_n(\mathbb{R}))$ et $B \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ deux fonctions continues

à valeurs matricielles ou vectorielles. On fixe $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique fonction $X \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) & \text{dans } I \\ X(t_0) = x_0. \end{cases}$$

5. Integrales dépendant d'un paramètre

THÉORÈME 123. [Théorème de convergence dominée de Lebesgue] Soit (X, μ) un espace mesuré. Soit $(f_n)_n$ une suite telle que $f_n \in L^1(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie p.p. telle que

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ p.p. $x \in X$
- Il existe $g \in L^1(X)$ tel que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et p.p. $x \in X$.

Alors $f \in L^1(X)$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

THÉORÈME 124. Soit (Ω, d) un espace métrique et soit (X, μ) un espace mesuré. Soit $F : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- Pour tout $\xi \in \Omega$, $F(\xi, \cdot) \in L^1(X)$
- Pour p.p. $x \in X$, $\xi \mapsto F(\xi, x)$ est continue sur Ω
- Il existe $g \in L^1(X)$ tel que $|F(\xi, x)| \leq g(x)$ pour tout $\xi \in \Omega$ et p.p. $x \in X$.

Alors la fonction $\xi \mapsto \varphi(\xi) := \int_X F(\xi, x) d\mu(x)$ est définie sur Ω . De plus, elle est continue sur Ω .

THÉORÈME 125. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ et soit (X, μ) un espace métrique mesuré. Soit $F : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- Pour tout $\xi \in \Omega$, $F(\xi, \cdot) \in L^1(X)$
- Pour p.p. $x \in X$, $\xi \mapsto F(\xi, x)$ est différentiable sur Ω
- Pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe $g_i \in L^1(X)$ telle que $|\partial_i F(\xi, x)| \leq g_i(x)$ pour tout $\xi \in \Omega$ et p.p. $x \in X$

Alors la fonction $\xi \mapsto \varphi(\xi) := \int_X F(\xi, x) d\mu(x)$ est définie sur Ω . De plus, elle est différentiable sur Ω et pour tout $i = 1, \dots, n$, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}(x) = \int_X \frac{\partial F}{\partial \xi_i}(\xi, x) d\mu(x) \text{ pour tout } \xi \in \Omega.$$

De plus, si $\xi \mapsto F(\xi, x)$ est C^1 pour p.p. $x \in X$, alors $\varphi \in C^1(\Omega)$.

6. Divers

THÉORÈME 126 (Inégalité des Accroissements Finis). Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn (non nécessairement complet). Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction dérivable telle qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\|f'(x)\|_E \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors

$$\|f(b) - f(a)\|_E \leq M|b - a|.$$

Bibliographie

- [1] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.
- [2] Jacques Dixmier, *General topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1984. Translated from the French by Sterling K. Berberian.
- [3] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel, *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation : Topologie et Analyse Fonctionnelles*, Ellipses, 1996.
- [4] N. G. Lloyd, *Degree theory*, Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1978. Cambridge Tracts in Mathematics, No. 73.
- [5] Walter Rudin, *Functional analysis*, 2nd ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [6] ———, *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
- [7] Michael Struwe, *Variational methods*, 4th ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 2008. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.