

1 Notation Sigma

1.1 Définition de la notation Sigma

La notation mathématique symbolique d'une somme est un moyen concis et utile de représenter une longue somme ou une somme dont le nombre de termes dépendent d'une variable (voire est infini). Il est envisageable d'utiliser cette notation dans le cas où les termes de la somme sont représentables par une expression algébrique dépendant d'un entier.

Le symbole $\sum$ est alors utilisé. Il s'agit de la lettre grecque majuscule Sigma correspondant à notre lettre S, faisant référence au mot Somme.

Une somme de forme générale $a_M + a_{M+1} + \dots + a_{N-1} + a_N$ s'écrit en notation Sigma :

$$\sum_{i=M}^N a_i$$

où M et N représentent deux nombres entiers (éventuellement négatifs) tels que $M \leq N$.

Dans cette notation, i représente **l'indice de sommation**, le nombre M est la **valeur initiale** de l'indice, le nombre N est la **valeur finale** de l'indice, et a_i représente l'expression algébrique, dépendant de i , d'un terme générique de la somme. Il est alors sous-entendu que l'indice de sommation **prend toutes les valeurs entières comprises entre la valeur initiale et la valeur finale**.

La somme comporte alors $N - M + 1$ termes.

1.2 Exemples

— La somme des 10 premiers entiers non nuls, égale à $1 + 2 + \dots + 9 + 10$, peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^{10} i.$$

— Lorsque n représente un entier naturel quelconque, la somme des n premiers entiers

non nuls, égale à $1 + 2 + \dots + (n-1) + n$, peut s'écrire : $\sum_{i=1}^n i.$

— Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique, la somme des 10 premiers termes de la suite,

égale à $u_0 + u_1 + \dots + u_8 + u_9$, peut s'écrire : $\sum_{i=0}^9 u_i.$

— Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique, la somme des n premiers termes de la suite,

égale à $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1}$, peut s'écrire : $\sum_{i=0}^{n-1} u_i.$

1.3 Choix de la lettre représentant l'indice

Question : Est-ce que $\sum_{i=1}^{10} i$ et $\sum_{n=1}^{10} n$ représentent la même somme ?

La réponse est oui !

La lettre représentant l'indice dans la sommation est une lettre arbitraire, usuellement choisie parmi les lettres i, j, k, n, m car ces dernières font très souvent référence à des entiers.

L'indice de sommation est une **variable muette** : on peut choisir de remplacer la lettre représentant l'indice par une autre lettre, sans changer la valeur de la somme.
Les sommes suivantes sont égales :

$$\sum_{i=M}^N a_i = \sum_{j=M}^N a_j = \sum_{n=M}^N a_n$$

Toutefois, si la valeur initiale ou finale de l'indice de sommation, ou le terme générique de la somme dépendent d'une variable, **il sera interdit d'employer la même lettre pour cette variable et l'indice de sommation.**

Par exemple, la somme $\sum_{i=0}^{n-1} u_i$ est égale à $\sum_{j=0}^{n-1} u_j$, mais il sera incorrect de l'écrire sous la

forme $\sum_{n=0}^{n-1} u_n$.

Questions :

Supposons que m et n sont des entiers naturels tels que $m \leq n$, et que $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ sont des nombres réels.

Proposez une écriture de la somme $a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n$ en notation Sigma.

Quelle lettre choisissez-vous pour l'indice de sommation ? Pouvez-vous en choisir une autre ? Quelles sont les lettres que vous n'avez pas le droit d'utiliser ?

1.4 Autre écriture

Pour indiquer que l'indice de sommation varie entre la valeur initiale et la valeur finale au niveau du symbole Sigma, il est possible de l'écrire en dessous, sous la forme d'une inégalité.

Les sommes suivantes sont égales :

$$\sum_{i=M}^N a_i = \sum_{M \leq i \leq N} a_i$$

Cette écriture permet également de rajouter des conditions sur l'indice de sommation.

Par exemple, la somme des nombres entiers naturels impairs strictement plus petits que 100 peut s'écrire : $\sum_{\substack{1 \leq i \leq 99 \\ i \text{ impair}}} i$.

Bien entendu, cette somme peut aussi s'écrire sous la forme $\sum_{i=0}^{49} (2i+1)$, car tout nombre impair s'écrit sous la forme $2i+1$.

2 Propriétés

Nous répertorions ici quelques propriétés simples permettant de manipuler aisément des sommes écrites en notation Sigma.

2.1 Valeur finale égale à la valeur initiale

Lorsque la valeur finale de l'indice est égale à sa valeur initiale, la somme ne comporte qu'un seul terme :

$$\sum_{i=N}^N a_i = a_N$$

Par exemple, lorsque $n = 1$, la somme $\sum_{i=1}^n 2^i$ est égale à $\sum_{i=1}^1 2^i = 2$.

2.2 Terme général constant

Lorsque le terme général de la somme est une valeur constante ne dépendant pas de l'indice de sommation, la somme est égale à cette valeur multipliée par le nombre de termes de la somme. Ainsi :

Soit C un nombre réel (une constante), alors :

$$\sum_{i=M}^N C = (N - M + 1) \times C$$

Par exemple, $\sum_{k=1}^5 3 = 5 \times 3 = 15$.

Ou encore, si n est un entier naturel donné, $\sum_{i=0}^9 2^n = 10 \times 2^n$. En effet, dans ce cas, le terme général de la somme ne dépend pas de l'indice i .

2.3 Terme général multiplié par une constante

Lorsque le terme général de la somme peut s'écrire sous la forme d'une valeur constante multipliée par un terme dépendant de l'indice de sommation, cette constante peut être mise en facteur. Ainsi :

Soit C un nombre réel (une constante), alors :

$$\sum_{i=M}^N C a_i = C \times \left(\sum_{i=M}^N a_i \right)$$

Par exemple, $\sum_{k=1}^5 3k = 3 \times \left(\sum_{k=1}^5 k \right) = 3 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3 \times 15 = 45$.

2.4 Terme général somme de deux termes

Lorsque le terme général de la somme peut s'écrire sous la forme d'une somme de deux expressions dépendant chacune de l'indice, nous pouvons séparer la somme en deux. Ainsi :

$$\sum_{i=M}^N (a_i + b_i) = \sum_{i=M}^N a_i + \sum_{i=M}^N b_i$$

Par exemple, $\sum_{i=0}^3 (2^i + i) = \sum_{i=0}^3 2^i + \sum_{i=0}^3 i = (1 + 2 + 4 + 8) + (0 + 1 + 2 + 3) = 21$.

2.5 Subdivision en deux sommes

En faisant intervenir une valeur intermédiaire entre la valeur initiale et finale de l'indice de sommation, nous pouvons décomposer une somme en deux parties. Ainsi :

Soit L un entier tel que $M \leq L < N$. Alors :

$$\sum_{i=M}^N a_i = \sum_{i=M}^L a_i + \sum_{i=L+1}^N a_i$$

Par exemple, $\sum_{n=-3}^5 n = \sum_{n=-3}^{-1} n + \sum_{n=0}^5 n = (-3 - 2 - 1) + (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 9$.

3 Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique

3.1 Cas d'une suite arithmétique

Tout d'abord, nous avons le résultat suivant (pouvant se démontrer par récurrence), concernant la suite des entiers naturels, qui est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 0 :

Soit n un entier naturel non nul. La somme des n premiers entiers naturels est égale à :

$$\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

Nous avons alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$ avec $m \leq k$: $u_k = u_m + (k - m)r$.

Calculons la somme de termes consécutifs de cette suite.

Soit m et n deux entiers tels que $m \leq n$. On a, d'après les propriétés sur les sommes :

$2 \sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^n u_k + \sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^n u_k + \sum_{k=m}^n u_{n+m-k}$ (avec un changement d'indice de type inversion, voir cours niveau 2).

On obtient alors :

$$2 \sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^n (u_k + u_{n+m-k}) = \sum_{k=m}^n (u_m + (k - m)r + u_m + (n + m - k - m)r)$$

Et ainsi, $2 \sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^n (u_m + u_m + (n-m)r) = \sum_{k=m}^n (u_m + u_n) = (u_m + u_n)(n-m+1)$.

On en déduit :

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite **arithmétique**. Soit m et n deux entiers tels que $m \leq n$.
La somme de termes consécutifs de la suite, du rang m au rang n , est égale à :

$$\sum_{k=m}^n u_k = \frac{(u_m + u_n)(n-m+1)}{2} = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times (\text{nombre de termes})}{2}$$

Exemple :

On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(1 + (2n-1))n}{2} = n^2$.

En effet, la suite $(2k-1)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.

3.2 Cas d'une suite géométrique

Tout d'abord, considérons la suite $(q^k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui est une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Lorsque $q = 1$, nous avons : $\sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$.

Lorsque $q \neq 1$, nous avons :

$(1-q) \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^n q^{k+1} = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k$ (changement d'indice de type décalage, vu en niveau 2).

D'où : $(1-q) \sum_{k=0}^n q^k = 1 + \sum_{k=1}^n q^k - \sum_{k=1}^n q^k - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$. Ainsi : $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Soit $q \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et soit n un entier naturel. La somme des n premiers termes de la suite (q^k) est égale à :

— Si $q = 1$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = n+1$$

— Si $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Soit maintenant $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

Nous avons alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$ avec $m \leq k$: $u_k = u_m \times q^{k-m}$

Calculons la somme de termes consécutifs de cette suite.

Soit m et n deux entiers tels que $m \leq n$. On a, d'après les propriétés sur les sommes :

$$\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^n u_m \times q^{k-m} = u_m \times \left(\sum_{k=m}^n q^{k-m} \right) = u_m \times \left(\sum_{k=0}^{n-m} q^k \right).$$

Ainsi, d'après le résultat précédent :

Soit $q \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite **géométrique** de raison q . Soit m et n deux entiers tels que $m \leq n$.

La somme de termes consécutifs de la suite, du rang m au rang n , est égale à :

— Si $q = 1$:

$$\sum_{k=m}^n u_k = u_m(n - m + 1)$$

— Si $q \neq 1$:

$$\sum_{k=m}^n u_k = u_m \times \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q} = u_m \times \frac{q^{n-m+1} - 1}{q - 1}$$

ou encore

$$\sum_{k=m}^n u_k = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Exemple :

On a, pour $n \geq 4$:

$$\sum_{k=3}^{n-1} 2^k = 2^3 \times \frac{1 - 2^{n-1-3+1}}{1 - 2} = 2^3 \times \frac{2^{n-1-3+1} - 1}{2 - 1} = 2^3 \times (2^{n-3} - 1) = 2^n - 8.$$

En effet, la suite $(2^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.

1 Changement d'indice

Une manipulation courante lors de calculs algébriques faisant intervenir des sommes est d'effectuer une ré-indexation dans la/les somme(s) présente(s). Il s'agit alors d'effectuer un changement d'indice, ou encore un changement de variable, afin de pouvoir simplifier une expression ou aboutir à une forme plus adéquate.

1.1 Décalage d'indice

Une ré-indexation simple est de décaler (ou translater) l'indice. Examinons trois cas : un décalage de 1, de -1, puis d'un entier quelconque.

Soit la somme $\sum_{i=M}^N a_i = a_M + a_{M+1} + \dots + a_{N-1} + a_N$.
 Effectuer le décalage d'indice défini par la relation $j = i + 1$ revient à écrire l'égalité :

$$\sum_{i=M}^N a_i = \sum_{j=M+1}^{N+1} a_{j-1}$$

Par exemple, $\sum_{i=0}^9 2^{i+1} = \sum_{j=1}^{10} 2^j = 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}$, en posant $j = i + 1$.

Soit la somme $\sum_{i=M}^N a_i = a_M + a_{M+1} + \dots + a_{N-1} + a_N$.
 Effectuer le décalage d'indice défini par la relation $j = i - 1$ revient à écrire l'égalité :

$$\sum_{i=M}^N a_i = \sum_{j=M-1}^{N-1} a_{j+1}$$

Par exemple, $\sum_{i=1}^{10} 3(i-1) = \sum_{j=0}^9 3j = 3 \times 0 + 3 \times 1 + \dots + 3 \times 9$, en posant $j = i - 1$.

Soit la somme $\sum_{i=M}^N a_i = a_M + a_{M+1} + \dots + a_{N-1} + a_N$, et soit K un entier relatif.
 Effectuer le décalage d'indice défini par la relation $j = i + K$ revient à écrire l'égalité :

$$\sum_{i=M}^N a_i = \sum_{j=M+K}^{N+K} a_{j-K}$$

Par exemple, $\sum_{i=4}^8 u_i = \sum_{j=1}^5 u_{j+3} = u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8$, en ayant posé $j = i - 3$.

1.2 Inversion d'indice

Une autre manipulation consiste à effectuer une inversion d'indice (ou retournement d'indice). Cela revient à inverser l'ordre de sommation des termes.

Nous allons voir tout d'abord un cas simple, l'indice variant de 0 à N , puis le cas général.

Soit la somme $\sum_{i=0}^N a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_{N-1} + a_N$.

Effectuer une inversion d'indice, définie par la relation $j = N - i$, revient à écrire l'égalité :

$$\sum_{i=0}^N a_i = \sum_{j=0}^N a_{N-j} = a_N + a_{N-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

Par exemple, $\sum_{i=0}^n (n-i)^2 = \sum_{j=0}^n j^2 = 0^2 + 1^2 + \cdots + n^2$, en posant $j = n - i$.

Soit la somme $\sum_{i=M}^N a_i = a_M + a_{M+1} + \cdots + a_{N-1} + a_N$.

Effectuer une inversion d'indice, définie par la relation $j = N + M - i$, revient à écrire l'égalité :

$$\sum_{i=M}^N a_i = \sum_{j=M}^N a_{N+M-j} = a_N + a_{N-1} + \cdots + a_{M+1} + a_M$$

Par exemple, $\sum_{i=2}^{10} 2^{12-i} = \sum_{j=2}^{10} 2^j = 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$, en posant $j = 12 - i$.

1.3 Méthodologie dans un changement d'indice

Supposons que l'on effectue un changement d'indice dans une somme, par décalage ou inversion.

Quelques conseils pour ne pas se tromper, et/ou comprendre la manipulation :

- Repérer quelle est la lettre désignant l'indice de la somme de départ, et celle de la somme d'arrivée. Eviter, dans un premier temps, de désigner ces deux indices par la même lettre (même si l'indice est une variable muette).
- Ecrire, si elle n'est pas donnée, la relation algébrique liant les deux indices.
Par exemple, $j = i + 2$, ou $j = n + 1 - i$.
- Changer les bornes de sommation en fonction de cette relation. Attention à bien ordonner dans l'ordre croissant les bornes dans le cas d'une inversion.
- Changer le terme général de la somme en n'utilisant que le nouvel indice choisi. En général, il faudra exprimer l'indice initial en fonction du deuxième.
Dans les exemples ci-dessus, cela donne $i = j - 2$ et $i = n + 1 - j$.
- Les deux sommes doivent contenir le même nombre total de termes.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Effectuer le changement d'indice $\ell = n + 1 - k$ dans la somme $\sum_{k=1}^n \frac{n-k}{(n+1-k)^2}$.

L'indice de départ est désigné par la lettre k , et celui de la somme à obtenir est désigné par ℓ .

La borne initiale $k = 1$ devient $\ell = n$ et la borne finale $k = n$ devient $\ell = 1$. Ainsi, le nouvel indice ℓ variera de 1 à n (attention à l'ordre!).

Le terme général $\frac{n-k}{(n+1-k)^2}$ devient $\frac{\ell-1}{\ell^2}$ (on a $n-k = \ell-1$).

D'où,
$$\sum_{k=1}^n \frac{n-k}{(n+1-k)^2} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\ell-1}{\ell^2}.$$

2 Sommes télescopiques

Nous allons considérer ici un cas particulier de sommes pour lesquelles une simplification de type "télescopage" va pouvoir s'effectuer : nous allons pouvoir réduire le nombre de termes par l'annulation (le télescopage) de termes deux à deux.

2.1 Définition

Une somme $\sum_{i=M}^N a_i$ est dite **télescopique** si elle peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{i=M}^N (b_{i+1} - b_i) \quad \text{ou} \quad \sum_{i=M}^N (b_i - b_{i+1})$$

Exemples :

— La somme $S_1 = \sum_{i=1}^{15} (\ln(i+1) - \ln(i))$ est directement donnée sous une forme télescopique.

— La somme $S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ est en réalité télescopique.

En effet, on peut la réécrire sous la forme : $S_2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$

2.2 Simplification

Soit $S = \sum_{i=M}^N (b_{i+1} - b_i)$ une somme télescopique.

Il est aisé de voir que la somme va se simplifier, les termes s'annulant de proche en proche. En effet, on a :

$$S = \sum_{i=M}^N (b_{i+1} - b_i) = (b_{M+1} - b_M) + (b_{M+2} - b_{M+1}) + (b_{M+3} - b_{M+2}) + \cdots + (b_{N-1} - b_{N-2}) + (b_N - b_{N-1}) + (b_{N+1} - b_N)$$

En réorganisant les termes, on a :

$$S = -b_M + (b_{M+1} - b_{M+1}) + (b_{M+2} - b_{M+2}) + \cdots + (b_{N-1} - b_{N-1}) + (b_N - b_N) + b_{N+1}$$

Et donc :

$$S = -b_M + b_{N+1}$$

De façon plus rigoureuse, détaillons cette simplification en utilisant les propriétés vues concernant les sommes. On a :

$$S = \sum_{i=M}^N (b_{i+1} - b_i) = \sum_{i=M}^N b_{i+1} - \sum_{i=M}^N b_i, \text{ par linéarité de la somme.}$$

Ainsi, $S = \sum_{j=M+1}^{N+1} b_j - \sum_{i=M}^N b_i$, en posant $j = i + 1$ dans la première somme.

$$\text{D'où, } S = \left(\sum_{j=M+1}^N b_j \right) + b_{N+1} - \left(b_M + \sum_{i=M+1}^N b_i \right), \text{ en subdivisant les sommes.}$$

$$\text{Et donc, } S = b_{N+1} - b_M + \sum_{j=M+1}^N b_j - \sum_{i=M+1}^N b_i$$

En remarquant que les deux dernières sommes sont égales (les variables i et j étant des variables muettes), on obtient finalement :

$$S = b_{N+1} - b_M$$

Lorsque la somme télescopique est du type $\sum_{i=M}^N (b_i - b_{i+1})$, on obtient, de la même façon

$$\text{ou en prenant l'opposé du résultat précédent : } \sum_{i=M}^N (b_i - b_{i+1}) = b_M - b_{N+1}.$$

On peut donc retenir, ou encore mieux savoir retrouver, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{La somme télescopique } \sum_{i=M}^N (b_{i+1} - b_i) \text{ est égale à : } & \sum_{i=M}^N (b_{i+1} - b_i) = b_{N+1} - b_M. \\ \text{La somme télescopique } \sum_{i=M}^N (b_i - b_{i+1}) \text{ est égale à : } & \sum_{i=M}^N (b_i - b_{i+1}) = b_M - b_{N+1}. \end{aligned}$$

Exemples :

— La somme $S_1 = \sum_{i=1}^{15} (\ln(i+1) - \ln(i))$ est égale à $S_1 = \ln(16) - \ln(1) = \ln(16)$.

— Pour $n \geq 1$, la somme $S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ est égale à :

$$S_2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

1 Somme double

Considérons un ensemble de nombres réels (ou complexes) dont les termes, notés $a_{i,j}$, sont indexés par les deux indices distincts i et j , prenant tous deux des valeurs entières. Nous pouvons alors considérer ces nombres comme des éléments d'un tableau à double entrée, i représentant l'indice des lignes et j celui des colonnes.

Si i parcourt un ensemble d'entiers noté I et j un ensemble J , alors le couple d'indices (i, j) parcourt l'ensemble produit $I \times J$.

La somme double $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$ représente la somme de tous les termes $a_{i,j}$, obtenue en faisant parcourir (i, j) l'ensemble produit $I \times J$.

Par exemple, $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket \times \llbracket 0,1 \rrbracket} i \times 2^j = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 2 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^0 + 3 \times 2^1$.

On remarquera que les indices sont toujours des variables muettes, et donc que les lettres les désignant peuvent être modifiées. Mais, attention, il conviendra de choisir des lettres distinctes pour les deux indices !

2 Sommes "rectangulaires" - Cas des indices indépendants

Nous allons considérer ici le cas le plus simple de sommes doubles, dont l'exemple ci-dessus est représentatif.

Il s'agit du cas où les deux indices i et j sont indépendants, c'est-à-dire ne sont pas liés par une relation ou une contrainte.

2.1 Ecriture et représentation

Soit M et N deux nombres entiers tels que $M \leq N$, et P et Q deux nombres entiers tels que $P \leq Q$.

La somme double de forme générale

$$a_{M,P} + a_{M,P+1} + \cdots + a_{M,Q} + a_{M+1,P} + \cdots + a_{M+1,Q} + \cdots + a_{N,P} + \cdots + a_{N,Q}$$

s'écrit en notation Sigma :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket M,N \rrbracket \times \llbracket P,Q \rrbracket} a_{i,j} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{\substack{M \leq i \leq N \\ P \leq j \leq Q}} a_{i,j}$$

La somme comporte $(N - M + 1)(Q - P + 1)$ termes.

Dans le cas où $M = P$ et $N = Q$, nous pouvons aussi écrire :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket M,N \rrbracket \times \llbracket M,N \rrbracket} a_{i,j} = \sum_{M \leq i,j \leq N} a_{i,j}$$

Nous pouvons visualiser tous les termes de cette somme à l'aide d'un tableau à double entrée, donc de forme "rectangulaire" :

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{M,P} & a_{M,P+1} & \cdots & a_{M,j} & \cdots & a_{M,Q} \\
 a_{M+1,P} & a_{M+1,P+1} & \cdots & a_{M+1,j} & \cdots & a_{M+1,Q} \\
 \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 a_{i,P} & a_{i,P+1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,Q} \\
 \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 a_{N,P} & a_{N,P+1} & \cdots & a_{N,j} & \cdots & a_{N,Q}
 \end{array}$$

2.2 Ecriture à l'aide d'un double symbole Sigma

Considérons la somme double $S = \sum_{(i,j) \in \llbracket M,N \rrbracket \times \llbracket P,Q \rrbracket} a_{i,j}$.

En s'inspirant du tableau ci-dessus, nous pouvons calculer cette somme selon deux procédés : une sommation ligne par ligne, ou bien une sommation colonne par colonne.

La sommation ligne par ligne donne :

$$S = (a_{M,P} + \cdots + a_{M,j} + \cdots + a_{M,Q}) + \cdots + (a_{i,P} + \cdots + a_{i,j} + \cdots + a_{i,Q}) + \cdots + (a_{N,P} + \cdots + a_{N,j} + \cdots + a_{N,Q})$$

soit encore :

$$S = \sum_{j=P}^Q a_{M,j} + \cdots + \sum_{j=P}^Q a_{i,j} + \cdots + \sum_{j=P}^Q a_{N,j} = \sum_{i=M}^N \left(\sum_{j=P}^Q a_{i,j} \right).$$

La sommation colonne par colonne donne :

$$S = (a_{M,P} + \cdots + a_{i,P} + \cdots + a_{N,P}) + \cdots + (a_{M,j} + \cdots + a_{i,j} + \cdots + a_{N,j}) + \cdots + (a_{M,Q} + \cdots + a_{i,Q} + \cdots + a_{N,Q})$$

soit encore :

$$S = \sum_{i=M}^N a_{i,P} + \cdots + \sum_{i=M}^N a_{i,j} + \cdots + \sum_{i=M}^N a_{i,Q} = \sum_{j=P}^Q \left(\sum_{i=M}^N a_{i,j} \right).$$

On peut donc retenir les égalités suivantes :

Une somme double "rectangulaire" d'indices indépendants peut s'écrire sous les différentes formes suivantes :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket M,N \rrbracket \times \llbracket P,Q \rrbracket} a_{i,j} = \sum_{\substack{M \leq i \leq N \\ P \leq j \leq Q}} a_{i,j} = \sum_{i=M}^N \left(\sum_{j=P}^Q a_{i,j} \right) = \sum_{j=P}^Q \left(\sum_{i=M}^N a_{i,j} \right)$$

Exemples :

— La somme $S_1 = 1 \times 1^2 + 2 \times 1^2 + 3 \times 1^2 + 1 \times 2^2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^2$ est égale à

$$S_1 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}} i \times j^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^2 i \times j^2 \right) = \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{i=1}^3 i \times j^2 \right).$$

— La somme $S_2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 4}} \frac{i}{j}$ est égale à :

$$S_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}.$$

2.3 Application au produit de deux sommes

Observons tout d'abord un cas simple de produit de deux sommes finies :

$$\left(\sum_{i=1}^3 a_i\right) \times \left(\sum_{j=0}^1 b_j\right) = (a_1 + a_2 + a_3)(b_0 + b_1) = a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_3 b_0 + a_3 b_1 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 0 \leq j \leq 1}} a_i b_j$$

Remarquons que l'on a également :

$$\left(\sum_{i=1}^3 a_i\right) \times \left(\sum_{j=0}^1 b_j\right) = a_1(b_0 + b_1) + a_2(b_0 + b_1) + a_3(b_0 + b_1) = \sum_{i=1}^3 a_i \left(\sum_{j=0}^1 b_j\right)$$

mais aussi :

$$\left(\sum_{i=1}^3 a_i\right) \times \left(\sum_{j=0}^1 b_j\right) = b_0(a_1 + a_2 + a_3) + b_1(a_1 + a_2 + a_3) = \sum_{j=0}^1 b_j \left(\sum_{i=1}^3 a_i\right)$$

Cela se généralise bien sûr à tout produit de deux sommes finies. On a :

Le produit de deux sommes finies est égal à :

$$\left(\sum_{i=M}^N a_i\right) \times \left(\sum_{j=P}^Q b_j\right) = \sum_{\substack{M \leq i \leq N \\ P \leq j \leq Q}} a_i b_j = \sum_{i=M}^N a_i \left(\sum_{j=P}^Q b_j\right) = \sum_{j=P}^Q b_j \left(\sum_{i=M}^N a_i\right)$$

Exemples :

Nous pouvons reprendre les deux exemples du paragraphe précédent.

— La somme $S_1 = 1 \times 1^2 + 2 \times 1^2 + 3 \times 1^2 + 1 \times 2^2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^2$ est égale à

$$S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}} i \times j^2 = \left(\sum_{i=1}^3 i\right) \times \left(\sum_{j=1}^2 j^2\right) = 6 \times 5 = 30.$$

— La somme $S_2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 4}} \frac{i}{j}$ est égale à :

$$S_2 = \left(\sum_{i=1}^2 i\right) \times \left(\sum_{j=1}^4 \frac{1}{j}\right) = 3 \times \frac{25}{12} = \frac{25}{4}.$$

3 Sommes "triangulaires" - Cas des indices dépendants

Nous allons considérer un cas plus complexe de sommes doubles que l'on rencontre régulièrement en mathématiques.

Il s'agit du cas où les deux indices i et j sont dépendants, liés par une relation de type $i \leq j$, ou bien $i < j$, ou bien $j \leq i$, ou bien $j < i$. D'autre part, les indices i et j parcourent le même ensemble d'entier. Ainsi :

Une somme double est dite "triangulaire" si elle est de la forme :

$$\sum_{M \leq i \leq j \leq N} a_{i,j} \quad \text{ou} \quad \sum_{M \leq i < j \leq N} a_{i,j} \quad \text{ou} \quad \sum_{M \leq j \leq i \leq N} a_{i,j} \quad \text{ou} \quad \sum_{M \leq j < i \leq N} a_{i,j}$$

avec M et N deux entiers naturels tels que $M \leq N$.

3.1 Cas $i \leq j$ et $i < j$

Nous considérons tout d'abord la somme $\sum_{M \leq i \leq j \leq N} a_{i,j}$.

Nous pouvons visualiser tous les termes de cette somme à l'aide d'un tableau à double entrée, qui sera ici de forme "triangulaire" supérieure :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{M,M} & a_{M,M+1} & \cdots & a_{M,j} & \cdots & a_{M,N} \\ & a_{M+1,M+1} & \cdots & a_{M+1,j} & \cdots & a_{M+1,N} \\ & & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & a_{j,j} & \cdots & a_{j,N} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_{N,N} \end{array}$$

En s'inspirant du tableau ci-dessus, nous pouvons calculer cette somme selon deux procédés : une sommation ligne par ligne, ou bien une sommation colonne par colonne.

La sommation ligne par ligne donne :

$$S = (a_{M,M} + \cdots + a_{M,j} + \cdots + a_{M,N}) + \cdots + (a_{i,i} + \cdots + a_{i,N}) + \cdots + (a_{N,N})$$

soit encore :

$$S = \sum_{j=M}^N a_{M,j} + \cdots + \sum_{j=i}^N a_{i,j} + \cdots + \sum_{j=N}^N a_{N,j} = \sum_{i=M}^N \left(\sum_{j=i}^N a_{i,j} \right).$$

La sommation colonne par colonne donne :

$$S = (a_{M,M}) + \cdots + (a_{M,j} + \cdots + a_{i,j} + \cdots + a_{j,j}) + \cdots + (a_{M,N} + \cdots + a_{i,N} + \cdots + a_{N,N})$$

soit encore :

$$S = \sum_{i=M}^M a_{i,M} + \cdots + \sum_{i=M}^j a_{i,j} + \cdots + \sum_{i=M}^N a_{i,N} = \sum_{j=M}^N \left(\sum_{i=M}^j a_{i,j} \right).$$

On peut donc retenir les égalités suivantes :

Une somme double "triangulaire supérieure" dont les indices vérifient la relation $i \leq j$ peut s'écrire sous les différentes formes suivantes :

$$\sum_{M \leq i \leq j \leq N} a_{i,j} = \sum_{i=M}^N \left(\sum_{j=i}^N a_{i,j} \right) = \sum_{j=M}^N \left(\sum_{i=M}^j a_{i,j} \right)$$

Lorsque la condition est $i < j$, les termes de la somme sont tous ceux de la figure ci-dessus, excepté les termes se trouvant sur la diagonale. Ainsi, on déduit de la même façon :

Une somme double "triangulaire strictement supérieure" dont les indices vérifient la relation $i < j$ peut s'écrire sous les différentes formes suivantes :

$$\sum_{M \leq i < j \leq N} a_{i,j} = \sum_{i=M}^{N-1} \left(\sum_{j=i+1}^N a_{i,j} \right) = \sum_{j=M+1}^N \left(\sum_{i=M}^{j-1} a_{i,j} \right)$$

Exemple :

La somme $S_3 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} (j - i)$ est égale à :

$$S_3 = \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=i}^4 (j - i) \right) = ((1 - 1) + (2 - 1) + (3 - 1) + (4 - 1)) + ((2 - 2) + (3 - 2) + (4 - 2)) + ((3 - 3) + (4 - 3)) + ((4 - 4)) = 10.$$

3.2 Cas $j < i$ et $j < i$

Nous considérons tout d'abord la somme $\sum_{M \leq i \leq N} a_{i,j}$.

Nous pouvons visualiser tous les termes de cette somme à l'aide d'un tableau à double entrée, qui sera ici de forme "triangulaire" inférieure :

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{M,M} & & & & & & \\
a_{M+1,M} & a_{M+1,M+1} & & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & \\
a_{i,M} & a_{i,M+1} & \cdots & a_{i,i} & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \\
a_{N,M} & a_{N,M+1} & \cdots & a_{N,i} & \cdots & a_{N,N} &
\end{array}$$

En s'inspirant du tableau ci-dessus, nous pouvons calculer cette somme selon deux procédés : une sommation ligne par ligne, ou bien une sommation colonne par colonne.

La sommation ligne par ligne donne :

$$S = (a_{M,M}) + \cdots + (a_{i,M} + \cdots + a_{i,i}) + \cdots + (a_{N,M} + \cdots + a_{N,i} + \cdots + a_{N,N})$$

soit encore :

$$S = \sum_{i=M}^M a_{M,j} + \cdots + \sum_{i=M}^i a_{i,j} + \cdots + \sum_{i=M}^N a_{N,j} = \sum_{i=M}^N \left(\sum_{i=M}^i a_{i,j} \right).$$

La sommation colonne par colonne donne :

$$S = (a_{M,M} + \cdots + a_{i,M} + \cdots + a_{N,M}) + \cdots + (a_{j,j} + \cdots + a_{i,j} + \cdots + a_{N,j}) + \cdots + (a_{N,N})$$

soit encore :

$$S = \sum_{i=M}^N a_{i,M} + \cdots + \sum_{i=j}^N a_{i,j} + \cdots + \sum_{i=N}^N a_{i,N} = \sum_{j=M}^N \left(\sum_{i=j}^N a_{i,j} \right).$$

On peut donc retenir les égalités suivantes :

Une somme double "triangulaire inférieure" dont les indices vérifient la relation $j \leq i$ peut s'écrire sous les différentes formes suivantes :

$$\sum_{M \leq j \leq i \leq N} a_{i,j} = \sum_{i=M}^N \left(\sum_{j=M}^i a_{i,j} \right) = \sum_{i=M}^N \left(\sum_{i=j}^N a_{i,j} \right)$$

Lorsque la condition est $j < i$, les termes de la somme sont tous ceux de la figure ci-dessus, excepté les termes se trouvant sur la diagonale. Ainsi, on déduit de la même façon :

Une somme double triangulaire "strictement inférieure" dont les indices vérifient la relation $j < i$ peut s'écrire sous les différentes formes suivantes :

$$\sum_{M \leq i < j \leq N} a_{i,j} = \sum_{i=M+1}^N \left(\sum_{j=M}^{i-1} a_{i,j} \right) = \sum_{j=M}^{N-1} \left(\sum_{i=j+1}^N a_{i,j} \right)$$

Exemple :

Exemple :
La somme $S_4 = \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{1} + \frac{4}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{1} + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \frac{5}{4}$ est égale à :

$$S_4 = \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \sum_{i=1+1}^5 \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{i}{j} \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \frac{i}{j}.$$