

Mathématiques 1, S1
Licence 1 PC 2021-2022
Université de Lorraine

Frédéric Robert

UNIVERSITÉ DE LORRAINE, CNRS, IECL, F-54000 NANCY, FRANCE
E-mail address: frederic.robert@univ-lorraine.fr

RÉSUMÉ. **Objectif** : Sa familiariser avec les outils de base de calcul. Une excellente référence est :

- Les mathématiques en licence : cours et exercices résolus. Tome 1, 1re année
- Auteurs : Élie Azoulay, Jean Avignant, Guy Auliac
- ISBN : 2-10-006792-3
- Éditeur : Paris, EdiScience, Dunod.

Table des matières

Echauffement : Rappels sur les solutions réelles des équations du second degré	5
1. Problématique	5
2. Le début d'un carré	5
3. Le cas général	6
Chapitre 1. Nombres complexes	9
1. Définition et premières propriétés	9
2. Equations du second degré	10
Chapitre 2. Fonctions	13
1. Une fonction : c'est quoi ?	13
2. Exemples et ensembles de définition	14
3. Autres fonctions fréquentes	16
Chapitre 3. Sens de variations et bijectivité	19
1. Rappels sur la dérivation	19
2. Fonctions croissantes et décroissantes	20
3. Bijections	22
4. Exponentielle, puissance, logarithme	25
Chapitre 4. Limites et Continuité	29
1. Notion de limite d'une fonction	29
2. Limites de référence	30
3. Quelques critères pratiques	31
4. Formes indéterminées	34
Chapitre 5. Dérivabilité	37
1. Notion de dérivée	37
2. Lien entre une fonction et sa dérivée : monotonie	40
3. Problèmes d'extréma	42
4. Dérivée de la réciproque et fonctions trigonométriques/hyperboliques	45
Chapitre 6. Intégration	49
1. Primitives	49
2. Intégrale des fonctions continues	49
3. Méthodes générales de calcul d'intégrales	50
4. Généralisation : Intégrale des fonction continues par morceaux	51
5. Inégalités	53
6. Fractions rationnelles	53
Chapitre 7. Equations différentielles	57

1. Contexte	57
2. Equations linéaires du premier ordre	57
3. Equations d'ordre 1 avec second membre	58
4. La méthode dite de "variation de la constante"	60
5. Equations du second ordre à coefficients constants	60
6. Autres exercices et quelques équations non-linéaires	62
Chapitre 8. Systèmes linéaires	63
1. Qu'est-ce qu'un système linéaire ? D'où cela vient-il ?	63
2. Résolution des systèmes 2×2	65
3. Systèmes 3×2	67
4. Systèmes 3×3	68
Index	71

Echauffement : Rappels sur les solutions réelles des équations du second degré

1. Problématique

On appelle trinôme du second degré toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, et, pour le moment, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Par exemple

$$x^2 - 3x + 2; x^2 - 3x - 4; x^2 + 4x + 5.$$

On se pose les questions suivantes :

- (1) Quelles sont les zéros du trinôme ? En d'autres termes, pour quels $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $ax^2 + bx + c = 0$?
- (2) Quel est le signe de $ax^2 + bx + c$ pour $x \in \mathbb{R}$?

2. Le début d'un carré

On écrira un polynôme du second degré comme le début d'un carré de la façon suivante

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2 \times \underline{1} \times x + 2$$

On écrit alors $(x + \underline{1})^2 = x^2 + 2 \times \underline{1} \times x + 1$, de sorte que

$$x^2 + 2x + 2 = ((x + \underline{1})^2 - 1) + 2 = \boxed{(x + \underline{1})^2 + 1}$$

Voici un autre exemple :

$$x^2 - 10x + 9 = x^2 - 2 \times \underline{5} \times x + 9$$

On écrit alors $(x - \underline{5})^2 = x^2 - 2 \times \underline{5} \times x + 25$, de sorte que

$$x^2 - 10x + 9 = ((x - \underline{5})^2 - 25) + 9 = \boxed{(x - \underline{5})^2 - 16}$$

2.1. Où le trinôme s'annule-t'il ? Grâce à cette expression, on va déterminer quand le trinôme s'annule.

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 1 = 0 : \text{ impossible car la somme est } > 0.$$

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 9 = 0 &\Leftrightarrow (x - 5)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 4^2 \\ &\Leftrightarrow \{x - 5 = 4 \text{ ou } x - 5 = -4\} \Leftrightarrow \{x = 9 \text{ ou } x = 1\} \end{aligned}$$

2.2. Quel est le signe du trinôme ? Et on peut même trouver le signe. En effet, on a déjà vu que

$$x^2 + 2x + 2 > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Pour le second exemple, on a

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 9 &= (x - 5)^2 - 16 = (x - 5)^2 - 4^2 = (x - 5 - 4)(x - 5 + 4) \\ &= (x - 9)(x - 1) \end{aligned}$$

Là, un petit tableau de signes permet de connaître agréablement le signe :

	$-\infty$	1	9	$+\infty$
$x - 1$		-	0	+
$x - 9$		-	-	0
$(x - 1)(x - 9)$		+	0	-

Ainsi, $x^2 - 10x + 9 > 0$ pour $x < 1$ ou $x > 9$; et $x^2 - 10x + 9 < 0$ pour $x \in]1, 9[$.

3. Le cas général

Dans le cas général, pour $a \neq 0$, on écrit

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

L'objet qui va différencier (ou bien "discriminer") les cas est le *discriminant* $\Delta := b^2 - 4ac$ et on écrit alors

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

Ainsi,

- Si $\Delta < 0$, alors

$$\left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

et donc le trinôme ne s'annule pas et a le signe de a ;

- Si $\Delta = 0$, alors

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \text{ a le signe de } a$$

et s'annule uniquement pour $x = -\frac{b}{2a}$;

- Si $\Delta > 0$, alors

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

avec

$$x_1 := \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 := \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donc, $ax^2 + bx + c = 0$ si et seulement si $x = x_1$ ou $x = x_2$. De plus, $ax^2 + bx + c$ a le signe de a en dehors de l'intervalle $[x_1, x_2]$ (ou $[x_2, x_1]$), et le signe de $-a$ dans cet intervalle. Tout ceci est résumé dans l'énoncé suivant à connaître :

THÉORÈME 1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta := b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$. Alors,

- Si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ ne s'annule jamais et a le signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, alors on a la forme factorisée

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

et donc $ax^2 + bx + c$ s'annule uniquement en $-\frac{b}{2a}$ et a le signe de a partout ailleurs.

- Si $\Delta > 0$, on pose

$$x_1 := \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 := \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ s'annule exactement pour $x = x_1$ et $x = x_2$. On a la forme factorisée : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Le trinôme $ax^2 + bx + c$ a le signe de a en dehors de l'intervalle $[x_1, x_2]$ (ou $[x_2, x_1]$), et le signe de $-a$ dans cet intervalle.

Exercice 1: Ecrivez les expressions suivantes comme le début d'un carré :

- (1) $x^2 + 2x + 3$
- (2) $x^2 + 2x - 3$
- (3) $x^2 + 4x + 1$
- (4) $x^2 + 4x + 7$
- (5) $x^2 + 3x + 1$
- (6) $x^2 - 5x + 2$
- (7) $-x^2 + 2x + 1$
- (8) $-x^2 + 3x + 7$
- (9) $3x^2 + 6x + 1$

Exercice 2: Dans chacun des cas suivants, déterminez quand l'expression s'annule et son signe suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$. Vous pouvez au choix réécrire le début d'un carré pour factoriser, ou bien utiliser directement le théorème, ou bien faire un mélange des deux.

- (1) $x^2 + x - 2$
- (2) $1 - x^2$
- (3) $x^2 + 3x + 4$
- (4) $x^2 + 4x + 5$
- (5) $-3x^2 + 4x - 7$
- (6) $2x^2 - 5x - 3$

Exercice 3: On pose l'expression $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Pour quelles valeurs a-t'on $f(x) = 0$? Même question pour $f(x) = 6$ et $f(x) = -2$.

Nombres complexes

1. Définition et premières propriétés

1.1. Définition et premiers calculs.

1.1.1. *Racine de -1 .* On introduit un nombre i qui vérifie $i^2 = -1$. Il y a derrière toute une construction qui n'a pas sa place ici. Ce nombre i n'est pas dans $\mathbb{R}$ car $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.2. Définition.

Definition 2 (Nombre complexe). *On appelle nombre complexe tout nombre de la forme $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.*

Exemples : $2 + i$, $2 = 2 + i \times 0$, $i = 0 + i \times 1$, $2i = 0 + i \times 2$.

1.3. Opérations algébriques. On peut sommer, multiplier et diviser (on verra la division plus tard) des complexes et on obtient des nombres complexes. L'addition et le produit sont commutatifs. Les règles de calcul sont les mêmes que sur les réels, sachant qu'on utilisera $i^2 = -1$.

Exemple : $(2 + i)(1 + 3i) = 2 + 6i + i + 3i^2 = -1 + 7i$.

Exercice 4: Ecrivez les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(1 - i)(3 + 4i), (1 + 2i)^3, (3 - i)(2 + i) + i - 7.$$

1.4. Partie réelle, partie imaginaire, conjugué.

1.4.1. Unicité.

Proposition 3. *Soit $z \in \mathbb{C}$. Les nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$ sont uniques. On les appelle Partie Réelle et Partie Imaginaire de z et on note $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.*

Exemples : $\operatorname{Re}(2 + 3i) = 2$; $\operatorname{Im}(2 + 3i) = 3$. $\operatorname{Re}(4) = \operatorname{Re}(4 + i \times 0) = 4$; $\operatorname{Im}(4) = \operatorname{Im}(4 + 0 \times i) = 0$.

En particulier, on a $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \operatorname{Im}(z) = 0\}$.

Definition 4. *On appelle nombre imaginaire pur tout complexe z tel que $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$. C'est-à-dire que $z \in \mathbb{C}$ est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re}(z) = 0$.*

Exemples : 0 , i , $2i$, $-5i$ sont imaginaires purs.

Proposition 5. *Soit $z \in \mathbb{C}$ et soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$. Alors*

$$z = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$$

1.4.2. *Conjugué.*

Definition 6. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle *conjugué* le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

1.4.3. *Module.*

Definition 7. Pour un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on appelle *module* de z le réel $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Ce n'est pas évident que ce soit défini ! Ce sera une conséquence de l'Exercice 7.

Exercice 5: Déterminez le module des complexes suivants :

$$2, 2i, 3 + 4i, (1 + i)(2 + i).$$

Exercice 6: Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, montrez que $|zz'| = |z| \cdot |z'|$.

Exercice 7: Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Montrez que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ et que $\{|z| = 0\} \Leftrightarrow \{z = 0\}$.

1.4.4. *Inverse d'un complexe.* On a alors une belle expression de l'inverse d'un complexe en utilisant la formule suivante :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \text{ pour } z \neq 0.$$

Au passage, on remarque qu'avec $z \neq 0$, on a $|z|^2 \neq 0$ et tout fait sens. On retrouve bien que l'inverse d'un nombre complexe est un nombre complexe (ce qui avait été annoncé auparavant).

Exemple : $\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$.

Exercice 8: Mettez les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+i}, \frac{1}{i}, \frac{i+1}{i}, \frac{2+3i}{3+5i}(1-i).$$

Exercice 9: Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, montrez que $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

2. Equations du second degré

2.1. Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ dans $\mathbb{C}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2.1.1. *Méthode.* Cela se passe en fait comme sur les réels en cherchant une racine du discriminant dans $\mathbb{C}$: comme $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$, on a $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ si $\Delta > 0$ et $\Delta = (i\sqrt{-\Delta})^2$ si $\Delta < 0$. Ainsi, on complète le Théorème 1 ainsi :

THÉORÈME 8. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta := b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$. Alors,

- Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c$ on a la forme factorisée

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

et le trinôme s'annule exactement en $-\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta > 0$, on pose

$$x_1 := \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 := \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On a la forme factorisée :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

et le trinôme s'annule exactement en x_1 et x_2 .

- Si $\Delta < 0$, on pose

$$z_1 := \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \in \mathbb{C} \text{ et } z_2 := \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \in \mathbb{C}.$$

On a la forme factorisée :

$$ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2).$$

et le trinôme s'annule exactement en les complexes z_1 et z_2 .

On va travailler sur des exemples.

2.1.2. *Exemple : déterminons les solutions de $z^2 - 4z + 5 = 0$.* On commence par calculer le discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 = -4 = (2i)^2$. Les solutions de l'équation sont alors

$$z_1 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i \text{ et } z_2 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i.$$

Il faut toujours vérifier que ça marche. En effet, on a bien $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - 4z + 5$.

Exercice 10: Déterminez les solutions des équations suivantes :

$$z^2 + 2 = 0, \quad z^2 + 2z + 2 = 0; \quad z^2 + 6z + 13 = 0.$$

2.2. Résolution de $z^2 = c$ dans $\mathbb{C}$.

2.2.1. Théorème d'existence.

Proposition 9. Soit $c \in \mathbb{C}$. Il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = c$. Les seules solutions de cette équation sont z et $-z$.

Plutôt que de démontrer ce résultat, on va déterminer les racines carrées sur des exemples.

2.2.2. *Exemple 1 : Quelles sont les racines carrées de $2i$?* On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a + ib)^2 = 2i$. On développe pour avoir $a^2 - b^2 + 2iab = 2i$, et donc

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 = b^2 \\ ab = 1 \end{array} \right\}$$

Pour la première ligne, on a deux possibilités : $b = a$ ou bien $b = -a$.

1^{er} cas : $b = -a$. La seconde ligne donne $-a^2 = 1$, ce qui est absurde car $a \in \mathbb{R}$.

2^{ème} cas : $b = a$. La seconde ligne donne $a^2 = 1$, donc $a = 1$ ou $a = -1$. Si $a = 1$, on a $b = a = 1$, donc $a + ib = 1 + i$. Si $a = -1$, $b = a = -1$ et $a + ib = -1 - i$. On vérifie que $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.

Conclusion : Les deux racines carrées de $2i$ sont $1 + i$ et $-1 - i$.

2.2.3. *Exemple 2 : Quelles sont les racines carrées de $-5 + 12i$?* On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a + ib)^2 = -5 + 12i$. On développe pour avoir $a^2 - b^2 + 2iab = -5 + 12i$, et donc

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{array} \right\}$$

Il suit de la 2^{ème} ligne que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On écrit $b = \frac{6}{a}$. On injecte dans la première équation pour obtenir

$$a^2 - \frac{36}{a^2} = -5 \Leftrightarrow a^4 + 5a^2 - 36 = 0.$$

C'est une équation d'ordre 4, mais en fait c'est une équation de degré 2 déguisée!!! On pose $A = a^2$ et on a alors $A^2 + 5A - 36 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 169 = 13^2 > 0$, et donc les racines sont -9 et 4 . Donc $a^2 = -9$ (absurde car $a \in \mathbb{R}$) ou

$a^2 = 4$. Donc $a = 2$ ou $a = -2$. Si $a = 2$, on a $b = 6/a = 3$, donc $a + ib = 2 + 3i$. Si $a = -2$, on a $b = -3$.

Conclusion : Les deux racines carrées de $-5 + 36i$ sont $2 + 3i$ et $-2 - 3i$.

Exercice 11: Déterminez les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $-8 + 6i$, $7 + 24i$, $3 + 4i$ et $4 + 3i$.

2.3. Plus loin : Résolution de $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ (hors-programme).

2.3.1. *Méthode.* Cela se passe en fait comme sur les réels en cherchant une racine du discriminant dans $\mathbb{C}$, ce qui existe toujours grâce à la Proposition 9. On va travailler sur des exemples.

2.3.2. *Exemple : déterminons les solutions de $z^2 - iz - 1 - i = 0$.* On commence par calculer le discriminant $\Delta = (-i)^2 - 4 \times (-1 - i) = 3 + 4i$. On détermine une racine de Δ avec la méthode précédente et on trouve (Cf exercice ci-dessus) $\Delta = (2 + i)^2$. Les solutions de l'équation sont alors

$$z_1 = \frac{i - (2 + i)}{2} = -1 \text{ et } z_2 = \frac{i + (2 + i)}{2} = 1 + i.$$

Il faut toujours vérifier que ça marche. En effet, on a bien $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - iz - 1 - i$.

Exercice 12: Déterminez les solutions des équations suivantes :

$$z^2 + 2 = 0, \quad z^2 - 3z + 3 + i = 0; \quad z^2 + (1 - i)z - i = 0; \quad 2z^2 + (5i - 7)z + 1 - 5i = 0.$$

Fonctions

1. Une fonction : c'est quoi ?

1.1. Manipulations préliminaires. Voici quelques questions qui ne sont pas si anodines que cela...

- (1) Que vaut 2×3 ? Que vaut 5^2 ?
- (2) Donnez un nombre dont le carré est 9. Combien y-a-t'il de possibilités ?
- (3) Combien y-a-t'il de nombres réels dont le sinus est 0 ?
- (4) Y-a-t'il un entier dont le carré est 3 ?
- (5) Y-a-t'il un nombre réel dont le carré est -4 ?
- (6) Y-a-t'il un nombre réel dont le cosinus est -2 ?

Reprenons ces exemples :

- Dans les opérations de (1), on n'obtient à chaque fois qu'une seule solution : $3 \times 2 = 6$, et pas autre choses. On a $5^2 = 25$, et rien de plus.
- Dans (2), on a deux solutions : $3^2 = (-3)^2 = 9$. Si on n'en veut qu'une, il faut ajouter un critère supplémentaire (le signe). Dans (3), on a même une infinité de solutions $\sin x = 0$ si et seulement x est de la forme $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ etc pour les positifs, et $-\pi, -2\pi, \dots$ pour les négatifs : là encore, si on ne veut qu'une solution, il va falloir ajouter un critère, par exemple être entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.
- Dans (4), (5) et (6), c'est pire : il n'y a aucune solution avec les contraintes qu'on a données. Si on veut une solution, il faut changer l'ensemble de nombres sur lequel on travaille : il y a un réel (et même deux) dont le carré est 3 (c'est $\pm\sqrt{3} \simeq \pm 1,73$ qui n'est pas un entier). En passant aux complexes, on a des carrés négatifs.

1.2. Définition(s). Pour définir une fonction, il faut 3 choses :

- qu'à un élément x , on associe un autre élément $f(x)$ de façon unique. On note alors $x \mapsto f(x)$.
- qu'on sache d'où on part. C'est-à-dire "où se trouve x ?" Dans l'ensemble de définition (on le note souvent D_f). Il faudra souvent le déterminer.
- qu'on sache où on arrive. C'est-à-dire "où se trouve $f(x)$?" Dans l'ensemble d'arrivée.

Definition 10. Une fonction, c'est la donnée d'une correspondance $x \mapsto f(x)$, d'un ensemble de définition et d'un ensemble d'arrivée. Si E est l'ensemble de départ et F est l'ensemble d'arrivée, on note souvent de façon synthétique

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f : & E & \rightarrow F \\ & x & \mapsto f(x) \end{array} \right.$$

1.3. La variable. On n'est pas obligé de prendre x : n'importe quelle lettre ou symbole convient. Tant que c'est cohérent. Par exemple, plutôt que $f(x) = 2x$, on peut écrire $f(t) = 2t$ ou bien $f(z) = 2z$, c'est pareil. Mais il ne faut pas mélanger : $f(x) = 2t$, ça ne va pas.

1.4. Valeur en des points. On est souvent amené à déterminer $f(x)$ pour des valeurs particulières de x . Par exemple $f(0)$, $f(1)$, etc.

1.5. Graphe.

Définition 11. *Le graphe d'une fonction, c'est représenter (lorsque c'est possible), x sur l'axe des abscisses, et $y = f(x)$ sur l'axe des ordonnées.*

Pour tracer un graphe, on fait le plus souvent des tableaux de variation : ce sera pour plus tard.

On va tout de suite voir des exemples

2. Exemples et ensembles de définition

2.1. Polynômes.

2.1.1. *Fonctions affines.* Ce sont des fonctions de type $f(x) = 2x + 1$ par exemple : l'expression faisant sens pour tout réel x ($x \in \mathbb{R}$), on a alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_1 : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto 2x + 1 \end{array} \right.$$

Dans ce cas, on a $f(0) = 1$, $f(3) = 7$, etc. Le graphe est simple à tracer : c'est une droite. Il suffit donc de connaître deux points, par exemple $(0, f_1(0)) = (0, 1)$ et $(3, f_1(3)) = (3, 7)$ et de les relier.

Plus généralement, une fonction affine est donnée par $f(x) = ax + b$ avec a, b des réels.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_2 : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto ax + b \end{array} \right. \quad \text{ou bien, changeons les variables,} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f_2 : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & t & \mapsto at + b \end{array} \right.$$

2.1.2. *Le carré.* Pour x un réel ($x \in \mathbb{R}$), le carré $x^2 = x \times x$ est toujours défini de façon unique et on a donc bien une fonction. On a va alors noter

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_3 : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto x^2 \end{array} \right.$$

Pour le graphe, on doit alors évaluer $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, mais ce n'est pas suffisant : il faut faire une étude de fonction. Si vous savez faire, ne vous gênez pas. On donne ici le résultat : à savoir dessiner sans hésitation :

2.1.3. *Polynôme du second degré.* On définit

$$\begin{cases} f_4 : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 3x + 2 \end{cases}$$

Aucun souci, c'est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, et la valeur est unique. On calcule alors $f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$, $f(0) = 2$, etc.

2.1.4. *Degrés supérieurs.* Par exemple

$$\begin{cases} f_5 : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{cases}$$

C'est une fonction croissante, (cf cours sur la question plus tard), dont voici le graphe :

2.2. Racines.

2.2.1. *La racine carrée.* Pour tout réel $y \geq 0$, il existe un unique réel $x \geq 0$ tel que $x^2 = y$. On l'appelle la racine carrée :

$$\begin{cases} f_5 : \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{cases}$$

2.2.2. Prenons $f_6(x) = \sqrt{x-1}$. Ceci est défini pour $x-1 \geq 0$, donc $x \geq 1$. L'ensemble de définition est $D_{f_6} = [1, +\infty[$:

$$\begin{cases} f_6 : [1, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x-1} \end{cases}$$

2.2.3. Prenons $f_7(x) = \sqrt{x^2+1}$. Ceci est défini pour $x^2+1 \geq 0$... ce qui est toujours vrai car $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble de définition est $D_{f_7} \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f_7 : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

2.2.4. Prenons $f_8(x) = \sqrt{x^3+1}$. Ceci est défini pour $x^3 \geq -1 = (-1)^3$, donc $x \geq -1$ car la fonction cube est croissante. L'ensemble de définition est $D_{f_8} [-1, +\infty[$:

$$\begin{cases} f_8 : [-1, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^3+1} \end{cases}$$

2.3. Fractions rationnelles.

2.3.1. *Fonction inverse.* On prend la fonction inverse $f_9(x) := \frac{1}{x} = x^{-1}$. Il faut donc $x \neq 0$, l'ensemble de définition est donc $D_{f_9} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et on note alors

$$\begin{cases} f_9 : \mathbb{R} \setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{cases}$$

2.3.2. On prend $f_{10}(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$. Il faut s'assurer que $x^2 - 3x + 2 \neq 0$. On résout l'équation du second degré $x^2 - 3x + 2 = 0$: le discriminant est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$, on a donc deux zéros

$$x_1 := \frac{3-1}{2} = 1 \text{ et } x_2 := \frac{3+1}{2} = 2.$$

Il faut donc $x \neq 1$ et $x \neq 2$, l'ensemble de définition est

$$D_{f_{10}} = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[.$$

2.3.3. On prend $f_{11}(x) = \frac{x^3}{x^2+x+1}$. Là encore, il faut que $x^2 + x + 1 \neq 0$. Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$, donc pas de racine réelle et

$$D_{f_{11}} = \mathbb{R}.$$

2.3.4. On prend $f_{12}(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$. Déterminons l'ensemble de définition : il faut $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

Factorisation : On a deux zéros 1 et 2, le coeff de x^2 est 1, donc $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Signe : on fait un tableau de signes

	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x - 1$	-	0	+	+	
$x - 2$	-	-	0	+	
$(x - 1)(x - 2)$	+	0	-	0	+

Pour avoir $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \geq 0$, il faut donc $x \notin]2, 3[$, donc

$$D_{f_{12}} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[.$$

3. Autres fonctions fréquentes

3.1. Valeur absolue. pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $|x| = \max\{x, -x\}$. Ainsi $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$. Par exemple $|2| = 2$ et $|-3| = 3$. Le graphe est donc :

3.2. Partie positive. pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $x_+ := \max\{x, 0\}$. Ainsi $x_+ = x$ si $x \geq 0$, et $x_+ = 0$ si $x \leq 0$. Par exemple $3_+ = 3$ et $(-1)_+ = 0$. Le graphe est donc

3.3. Partie négative. pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $x_- := \max\{-x, 0\} \geq 0$. Ainsi $x_- = -x$ si $x \leq 0$, et $x_- = 0$ si $x \geq 0$. Par exemple $(-2)_- = 2 \geq 0$. Le graphe est donc

3.4. Fonction de Heaviside. On définit

$$\left\{ \begin{array}{ll} H : \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Dont le graphe est

Attention : suivant les ouvrages, la valeur en 0 peut être 0 ou 1. Il faut juste que la définition soit fixée correctement.

Cette fonction fait un "saut" et elle modélise, par exemple, un interrupteur qui est éteint pour les temps négatifs, et allumé pour les temps positifs. Donc quelque chose de très concret qui va vous servir.

Sens de variations et bijectivité

Dans tout ce cours, I, J désigneront des intervalles non-vides de $\mathbb{R}$.

1. Rappels sur la dérivation

Les propriétés les plus utiles ayant été vues au lycée, ces rappels seront rapides, et sans exemples. La notion de dérivation sera approfondie au Chapitre 5.

1.1. Définition.

Definition 12. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe.}$$

Dans ce cas, cette limite est notée $f'(x_0)$ et on dit que f est dérivable en x_0 . On note alors f' la fonction $x \mapsto f'(x)$ là où elle est définie.

Quelques exemples : les fonctions suivantes sont dérivables pour les valeurs données et on a

- $(ax + b)' = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$ sont fixés) ;
- $(x^2)' = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a $(x^n)' = nx^{n-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ pour tout $x \neq 0$;
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$ (bien que la racine soit définie pour tout nombre positif ou nul)
- $(\sin x)' = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- $(\cos x)' = -\sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

1.2. Propriétés algébriques.

Proposition 13. Toute somme, fonction, produit, quotient, composée de fonctions dérivables est dérivable lorsque cela fait sens.

En particulier, si on se donne $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables, alors les fonctions suivantes sont dérivables et

- $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- $(f \times g)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$ tant que f ne s'annule pas
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ tant que g ne s'annule pas

1.3. Composées. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(x) \in J$ pour tout $x \in I$. On définit alors la fonction $x \mapsto g(f(x))$ est définie et dérivable sur I . De plus, on a

$$(x \mapsto g(f(x)))' = f'(x) \times g'(f(x)) \text{ pour tout } x \in I.$$

La fonction $x \mapsto g(f(x))$ est notée $g \circ f$. En particulier,

- $(f^n)' = n f' f^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$;
- $(\sin f)' = f' \cos f$;
- $(\cos f)' = -f' \sin f$.
- $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$ tant que $f > 0$.

2. Fonctions croissantes et décroissantes

2.1. Définition.

Definition 14. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction avec $I \subset \mathbb{R}$ intervalle. On dit que f est croissante si

$$\text{pour tous } x, y \in I, \text{ alors } \{x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\}.$$

On dit que f est décroissante si

$$\text{pour tous } x, y \in I, \text{ alors } \{x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)\}.$$

Pour une fonction, être croissante ou décroissante se voit sur le graphe :

Definition 15. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction avec $I \subset \mathbb{R}$ intervalle. On dit que f est strictement croissante si

$$\text{pour tous } x, y \in I, \text{ alors } \{x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\}.$$

On dit que f est strictement décroissante si

$$\text{pour tous } x, y \in I, \text{ alors } \{x < y \Rightarrow f(x) > f(y)\}.$$

Reprenons les exemples précédents pour savoir si les fonctions sont éventuellement strictement (dé)croissantes :

2.2. Critère pratique par la dérivée. Quand on peut, on ne se privera pas d'utiliser la dérivée :

Proposition 16. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable (ceci sera approfondi lors du Chapitre 5). Alors :

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I ;
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I ;

Et on a l'énoncé dual pour la décroissance :

- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I ;
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I ;

2.3. Exemples par la dérivée.

2.3.1. Soit

$$\begin{cases} f_1 : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x + 3 \end{cases}$$

On a $f_1'(x) = 2 > 0$ donc strictement croissante.

2.3.2. Soit

$$\begin{cases} f_2 : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -3x + 4 \end{cases}$$

On a $f_2'(x) = -3 < 0$ donc strictement décroissante.

2.3.3. Soit

$$\begin{cases} f_3 : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$$

On a $f_3'(x) = 2x$ pour tout x . Donc

- Pour $x > 0$, on a $f_3'(x) > 0$, donc f_3 strictement croissante sur $]0, +\infty[$;
- Pour $x < 0$, on a $f_3'(x) < 0$, donc f_3 strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$.

Et le mieux, c'est de faire un petit tableau de variations

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_3'(x)$	-	0	+
f_3	$\searrow$ 0 $\nearrow$		

2.4. Exemples à la main, sans dérivées.

2.4.1. *Valeur absolue.* On a $|x| = x$ si $x \geq 0$, et $|x| = -x$ si $x \leq 0$. On va donc séparer les cas positifs et négatifs :

- Soit $x, y \in [0, +\infty[$ tels que $x < y$. Alors $|x| - |y| = x - y < 0$, donc $|x| < |y|$. Donc $|\cdot|$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- Soit $x, y \in]-\infty, 0]$ tels que $x < y$. Alors $|x| - |y| = (-x) - (-y) = y - x > 0$, donc $|x| > |y|$. Donc $|\cdot|$ est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$.

Dessin

2.4.2. *Partie positive.* Dans le même genre, on montre que $x \mapsto f(x) = x_+$ est croissante sur $\mathbb{R}$, mais pas strictement croissante.

Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$:

- Si $x \leq y \leq 0$, alors $f(x) = 0 = f(y)$, donc $f(x) \leq f(y)$
- Si $x \leq 0 \leq y$, alors $f(x) = 0$ et $f(y) = y \geq 0$, donc $f(x) \leq f(y)$
- Si $0 \leq x \leq y$, alors $f(x) = x$ et $f(y) = y$, donc $f(x) \leq f(y)$

Finalement, dans tous les cas, $f(x) \leq f(y)$, donc f est croissante. On remarque que, par exemple, $f(-1) = f(0)$ avec $-1 < 0$, donc f n'est pas strictement croissante.

3. Bijections

3.1. Définition.

Definition 17. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. On dit que f est bijective si pour tout point y de l'ensemble d'arrivée F , il existe un unique point x de l'ensemble de départ E tel que $f(x) = y$.

Qu'est-ce que ça veut dire ? Qu'on peut toujours résoudre l'équation $f(x) = y$, et que, en plus, on n'a qu'une seule solution. Cela se traduit sur le graphe de la fonction :

3.2. Exemples.

3.2.1. Soit

$$\begin{cases} f_0 : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x - 1 \end{cases}$$

Si on prend $y \in \mathbb{R}$, peut-on résoudre $f_0(x) = y$? Essayons :

$$f_0(x) = y \Leftrightarrow 2x - 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y + 1}{2}$$

Donc on a une solution, et elle est unique. Donc f_0 est bijective.

3.2.2. Carré (1). Soit

$$\begin{cases} f_1 : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$$

On va regarder directement le graphe de la fonction :

Et effectivement, on n'a pas toujours de solution... Par exemple, prenons $y = -1$: on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_1(x) = -1$, donc $x^2 = -1$, par impossible car $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f_1 n'est pas bijective.

Réduisons donc un peu l'ensemble d'arrivée

3.2.3. Carré (2). Soit

$$\begin{cases} f_2 : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$$

C'est bien défini car $f_2(x) = x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On va encore regarder le graphe de la fonction :

Et là, pour tout $y \in [0, +\infty[$, on a bien $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_2(x) = y$. Mais, en général, il n'est pas le seul car $f_2(-x) = (-x)^2 = x^2 = y$... Par exemple, pour $y = 1$, on a $f(1) = f(-1) = 1$, donc plusieurs solutions. Cette fois, on va réduire l'ensemble de départ.

3.2.4. *Carré (3)*. Soit

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f_3 : & [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[\\ & x & \mapsto x^2 \end{array} \right.$$

C'est bien défini car $f_3(x) = x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On va encore regarder le graphe de la fonction :

Sur le graphe, on voit bien que pour tout $y \geq 0$, il y a $x \geq 0$ tel que $f(x) = y$ (c'est $x = \sqrt{y}$, en fait), et qu'il n'y en a pas d'autre. On a donc une bijection.

Plus généralement, on utilise un tableau de variation pour voir comment réduire les ensembles pour avoir une bijection

3.2.5. *Un exemple sur un polynôme du second degré*. Soit

$$\left\{ \begin{array}{ccc} g : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto x^2 - 2x \end{array} \right.$$

On va dresser le tableau de variation. La dérivée est $g'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$, donc

	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	1	+
g	$\searrow \quad \nearrow$ $g(1) = -1$		

On fait alors le graphe :

On voit alors que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} g_1 : &]-\infty, 1] & \rightarrow [-1, +\infty[\\ & x & \mapsto x^2 - 2x \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} g_2 : & [1, +\infty[& \rightarrow [-1, +\infty[\\ & x & \mapsto x^2 - 2x \end{array} \right.$$

sont toutes les deux bijectives.

3.3. Fonction réciproque.

3.3.1.

Proposition 18. Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. Alors il existe une fonction $g : F \rightarrow E$ telle que

$$g(f(x)) = x \text{ pour tout } x \in E \text{ et } f(g(y)) = y \text{ pour tout } y \in F.$$

(en abrégé, on note $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$). Dans ce cas, la fonction g est unique et bijection, et on note $g = f^{-1}$. Elle est appelée "fonction réciproque de f ".

Déterminer la réciproque, ce n'est rien d'autre que résoudre $f(x) = y$:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

3.3.2. Reprise des exemples précédents. (a). Soit

$$\begin{cases} f_0 : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x - 1 \end{cases}$$

On a vu que si on prend $y \in \mathbb{R}$, peut-on résoudre $f_0(x) = y$? Essayons :

$$f_0(x) = y \Leftrightarrow 2x - 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}.$$

On a alors

$$\begin{cases} f_0^{-1} : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \frac{y+1}{2} \end{cases}$$

(b). Soit

$$\begin{cases} f_3 : [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$$

Pour $y \geq 0$, on a vu que si $f_3(x) = y$, alors $x^2 = y$, donc $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$. Mais avec la condition $x \geq 0$, il ne reste qu'une solution : $x = \sqrt{y}$. La réciproque est alors

$$\begin{cases} f_3^{-1} : [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[\\ y & \mapsto & \sqrt{y} \end{cases}$$

(c). Soit

$$\begin{cases} g_2 : [1, +\infty[& \rightarrow & [-1, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 - 2x \end{cases}$$

Avec le tableau de variation, on a vu que c'était une bijection. Déterminons sa réciproque. On se donne $y \geq -1$. On cherche $x \geq 1$ tel que $g_2(x) = y$, donc

$$g_2(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 2x = y \Leftrightarrow x^2 - 2x - y = 0.$$

C'est une équation du second degré : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-y) = 4(1+y) \geq 0$ car $y \geq -1$ (heureusement).

Si $y = -1$, alors $\Delta = 0$ et $x = \frac{-(-2)}{2} = 1 \geq 1$ (heureusement encore).

Si $y > -1$, alors $\Delta > 0$ et on a

$$\begin{cases} x = \frac{-(-2) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2 - \sqrt{4(y+1)}}{2} = 1 - \sqrt{y+1} \text{ ou} \\ x = \frac{-(-2) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2 + \sqrt{4(y+1)}}{2} = 1 + \sqrt{y+1} \end{cases}$$

Deux solutions... Mais on veut $x \geq 1$, donc une seule possibilité : $x = 1 + \sqrt{y+1}$.
Et donc,

$$\begin{cases} g_2^{-1} : [-1, +\infty[& \rightarrow & [1, +\infty[\\ y & \mapsto & 1 + \sqrt{y+1} \end{cases}$$

3.4. D'autres exemples.

Exercice 13: Déterminez des domaines les plus grands possibles sur lesquels les fonctions suivantes sont bijectives (plusieurs réponses possibles), et déterminez leurs réciproques :

$$f(x) = x^2 - 4x + 7 ; g(x) = \sqrt{2 - x^2}.$$

4. Exponentielle, puissance, logarithme

4.1. Exponentielle.

4.1.1.

Definition 19. La fonction exponentielle, notée $\exp$ ou $x \mapsto \exp(x) = e^x$ est l'unique fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ dérivable telle que

$$\begin{cases} (\exp)'(x) = \exp(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

4.1.2. Propriété additive.

Proposition 20. On a $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. De plus, $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

4.1.3. Le graphe. Il est à connaître :

4.1.4. Un exemple. Le graphe de la fonction $x \mapsto 2e^{-x}$ est

4.2. Puissance. Quand peut-on donner un sens à a^b ?

- Si $b \in \mathbb{N}$ est un entier, alors $a^b = a \times \dots \times a$ (b fois), quel que soit $a \in \mathbb{R}$.
- Si $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, on définit $a^b := e^{b \ln a}$. Avec les propriétés vues plus haut, la définition est cohérente.

4.3. Logarithme.

4.3.1. Définition.

Definition 21. Il existe une unique fonction $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} (\ln x)' = \frac{1}{x} & \text{pour tout } x > 0 \\ \ln(1) = 0 \end{cases}$$

Une propriété importante est que $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ pour tous $x, y > 0$.

4.3.2. Le graphe. Là encore, à connaître

4.3.3. *Un exemple.* Déterminez l'ensemble de définition de $x \mapsto \sqrt{x} + \ln(1-x)$.

- On a $\sqrt{x}$, ce qui impose $x \geq 0$
- On a $\ln(1-x)$, ce qui impose $1-x > 0$, donc $x < 1$.

Finalement, l'ensemble de définition est $D = [0, 1[$.

4.4. Lien entre exponentielle et logarithme.

- (1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(e^x) = x$
- (2) Pour tout $x > 0$, on a $e^{\ln x} = x$

4.5. Bijectivité de l'exponentielle et du logarithme. Ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre : $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les ensembles de définition sont comme il faut, donc

$$\exp^{-1} = \ln \text{ et } \ln^{-1} = \exp.$$

Exercice 14: Déterminez des domaines les plus grands possibles sur lesquels $x \mapsto e^{x^2}$ est bijective (plusieurs réponses possibles), et déterminez alors la réciproque.

4.6. Forme exponentielle d'un nombre complexe.

4.6.1. *Exponentielle complexe.* Pour $z \in \mathbb{C}$, on peut définir $\exp(z) = e^z \in \mathbb{C}$ qui coïncide avec l'exponentielle habituelle si $z \in \mathbb{R}$ et qui a des propriétés similaires. En particulier, on a les propriétés suivantes :

Proposition 22. On a

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \text{ pour } \theta \in \mathbb{R}; \\ e^{a+ib} &= e^a(\cos b + i \sin b) \text{ pour } a, b \in \mathbb{R}; \\ e^{z+z'} &= e^z e^{z'} \text{ pour } z, z' \in \mathbb{C}; \\ e^{z+2i\pi} &= e^z \text{ pour } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

A partir de là, on peut faire de nombreux calculs.

Exercice 15: Montrez que $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et que $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrez que $e^{z+2i\pi} = e^z$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 16: Montrez que $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

4.6.2. *Complexes de module 1.* On a la propriété essentielle suivante :

Proposition 23. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|e^{i\theta}| = 1$. Inversement, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

Ainsi, on a une expression polaire d'un complexe non-nul :

Proposition 24. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$. Il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = r \cdot e^{i\theta}$. On a alors $r = |z| > 0$ qui est le module de z . Le réel θ est unique à un multiple de 2π près : on l'appelle l'argument de z .

Exercice 17: Déterminez le module et l'argument des complexes suivants :

$$2; i; 1+i; \sqrt{3}+i.$$

4.6.3. *Formules de trigonométrie.*

4.6.4. *Motivation et outils.* Il arrive fréquemment qu'on doive écrire $\sin(k\theta)$ ($k \in \mathbb{N}$) en fonction de $\sin \theta$ et $\cos \theta$. Inversement, typiquement pour des intégrales, on a besoin d'exprimer des puissances de sinus ou de cosinus en fonction du sinus ou cosinus d'un multiple de l'angle. Pour cela, on utilise les formules suivantes :

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n \text{ pour } \theta \in \mathbb{R}$$

et

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \text{ pour } \theta \in \mathbb{R}$$

Exemple 1. Exprimons $\sin(2\theta)$ en fonction de $\sin \theta$ et $\cos \theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos(2\theta) + i \sin(2\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = (\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2 + 2i \cos \theta \sin \theta.$$

En égalant les parties réelles et imaginaires, on obtient $\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$.

Exemple 2. Exprimons $\cos(\alpha + \beta)$ en fonction des sinus et cosinus de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) &= e^{i(\alpha + \beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \end{aligned}$$

et donc

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Exercice 18: Pour $\theta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, exprimez les quantités suivantes en fonction des sinus et cosinus de $\theta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\cos(3\theta), \sin(2\alpha + \beta), \cos(\alpha + 2\beta) + 3 \sin(\alpha - \beta).$$

Exemple 3. Exprimons $(\cos \theta)^3$ en fonction de sinus et de cosinus de multiples de $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} (\cos \theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} \\ &= \frac{e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} = \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{8} \\ &= \frac{2 \cos(3\theta) + 3 \times 2 \cos \theta}{8} = \frac{1}{4} \cos(3\theta) + \frac{3}{4} \cos \theta \end{aligned}$$

Exercice 19: Exprimez les quantités suivantes en fonction de sinus et cosinus de multiples de θ :

$$(\sin \theta)^2, (\cos \theta)^2 \sin \theta, (\cos \theta)^2 (\sin \theta)^3.$$

Déduisez-en $\int_0^{\pi/3} (\sin \theta)^2 d\theta$.

Limites et Continuité

Dans tout ce cours, I, J désigneront des intervalles non-vides de $\mathbb{R}$.

1. Notion de limite d'une fonction

1.1. Une limite, c'est quoi ? C'est ce dont une fonction s'approche lorsque la variable s'approche d'un nombre donné. Voyons sur un dessin :

Dans le cadre de ce cours, on ne donnera pas la définition formelle d'une limite.

1.2. Les différentes limites. Il y a plusieurs types de limites :

1.2.1. *Limites finies en un point.*

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$: limite de la quantité $f(x)$ lorsque x s'approche de x_0 .

Exemple 1 :

Exemple 2 :

- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} f(x)$: limite de la quantité $f(x)$ lorsque x s'approche de x_0 , tout en ayant $x \neq x_0$.

Exemple :

- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$: limite de la quantité $f(x)$ lorsque x s'approche de x_0 , tout en ayant $x > x_0$.

$\lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$: limite de la quantité $f(x)$ lorsque x s'approche de x_0 , tout en ayant $x < x_0$.

Exemple 1 :

Exemple 2 :

1.2.2. Limites finies en l'infini.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: limite de la quantité $f(x)$ lorsque x s'approche de $+\infty$.

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: limite de la quantité $f(x)$ lorsque x s'approche de $-\infty$.

1.2.3. Limites infinie en un point.

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ s'approche de $+\infty$ lorsque x s'approche de x_0

(2) Et là, il y a encore tout une zoologie de situations : $x < x_0$, $\lim = -\infty$, etc. On ne les détaillera pas.

1.2.4. *Limites infinie en l'infini.* $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ s'approche de $+\infty$ lorsque x s'approche de $+\infty$. On a aussi des versions en $-\infty$, etc.

2. Limites de référence

2.1. Continuité.

Definition 25. On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue si pour tout $x_0 \in I$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Concrètement : "une fonction est continue si on peut tracer son graphe sans lever son crayon".

Exemples : les polynômes, sin, cos, exp, ln et la valeur absolue sont continues.

Contre-exemples : la fonction de Heaviside :

$$\left\{ \begin{array}{ll} H : \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Refaites le graphe : elle n'est pas continue. Cependant, elle est très utile (pensez à l'interrupteur). Comme quoi, se restreindre aux fonctions continues, ce n'est pas raisonnable (et je ne parle pas des fonctions dérivables).

Proposition 26. *Toute somme, produit, quotient de fonctions continues est continue lorsque cela fait sens.*

Ceci permet de récupérer beaucoup de limites.

2.2. Un TP à la calculatrice.

- (1) En utilisant une calculatrice, complétez (enfin, refaites-le il est trop petit) le tableau suivant :

$x =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2 =$											

Que peut-on en conclure pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$?

- (2) En utilisant une calculatrice, complétez (enfin, refaites-le il est trop petit) le tableau suivant :

$x =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{x} =$											

Que peut-on en conclure pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$?

- (3) En utilisant une calculatrice, complétez (enfin, refaites-le il est trop petit) le tableau suivant :

$x =$	1	0,7	0,6	0,03	0,004	0,000001	0,00000000034
$\frac{1}{x} =$							

Que peut-on en conclure pour $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$?

3. Quelques critères pratiques

3.1. Combinaison linéaire. Lorsque cela fait sens, on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \mu \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

3.2. Produit.

(1)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = l \cdot l'$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0 \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \text{signe}(l) \times \infty$$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \frac{1}{x^2}) = +\infty$ à détailler. $x^2(1/x - 1)$ en infini. et $1/x(1 - x^3)$ en 0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \in \mathbb{R} \text{ et } |g(x)| \leq M \text{ pour } x \rightarrow x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$

3.3. Quotient.

(1)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l' \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+ \text{ (ça veut dire } f(x) > 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

3.4. Composition.

Proposition 27. *En abrégé :*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ et } \lim_{y \rightarrow l} g(y) = m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = m$$

Avec x_0, l, m qui peuvent être des réels, $\pm\infty$, des limites à droites, à gauche, etc.

Voyons tout de suite des exemples rapides :

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x^2) = 0$. En effet, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \ln(1 + X) = \ln(1) = 0$ car $\ln$ est continue.
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 7} = 0$. En effet, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 7 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0$.

Il y aura plus d'exemples dans la suite avec les limites de références et les formes indéterminées.

3.5. Comparaison. Il y a deux résultats assez classiques, et surtout très naturels :

Proposition 28 (Théorèmes d'encadrement). *Ici encore, on donne les résultats de manière très synthétique :*

$$\left\{ f(x) \leq g(x) \leq h(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l.$$

$$\left\{ f(x) \leq g(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty.$$

$$\left\{ g(x) \leq h(x), \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = -\infty \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty.$$

Une conséquence commode est la suivante :

Proposition 29. *On se donne $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ou bien au bord de I , ou bien infini, et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que*

- $|f(x) - l| \leq g(x)$ pour tout $x \in I$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

3.6. Limites de référence. Elle sont à connaître : avec les critères ci-dessus, elles permettent de trouver beaucoup de limites directement.

3.6.1. Fractions rationnelles.

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$ pour $a > 0$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0$ pour $a > 0$
- (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^a} = 0$ pour $a > 0$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^a} = +\infty$ pour $a > 0$

3.6.2. *Exponentielle.*

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$

3.6.3. *Logarithme.*

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

4. Formes indéterminées

Les indéterminations sont les formes qui ne sont pas couvertes par les critères précédents, à savoir :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty.$$

Dans ces cas, il faut manipuler les expressions pour se ramener aux critères pratiques.

4.1. **Fractions rationnelles.** On va voir les méthodes sur des exemples :

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - 3x^2 - 23 = ?$ On factorise par le terme de plus haut degré :

$$x^4 - 3x^2 - 23 = x^4 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{23}{x^4} \right)$$

D'après les limites de référence, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{23}{x^4} = 1 > 0$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$, donc le produit a pour limite $1 \times +\infty = +\infty$. On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - 3x^2 - 23 = +\infty$

- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 7}{x^5 - x^4 + 1} = ?$ Là encore, on factorise par les termes de plus haut degré et on obtient

$$\frac{x^2 - 3x + 7}{x^5 - x^4 + 1} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} \right)}{x^5 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} \right)} = \frac{1}{x^3} \times \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \times \frac{1}{1} = 0$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 7}{x^5 - x^4 + 1} = 0.$$

Bonus : on n'a pas oublié de vérifier quelque chose pour cet exo ???

- (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = ?$ C'est une indétermination de type $\frac{0}{0}$ en un point avec des polynômes. Il faut alors factoriser : $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et donc $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$, puis

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Voyez aussi ci-dessous la technique qui utilise la dérivée.

- (4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = ?$ Là encore, $\frac{0}{0}$. On factorise. Les zéros de $x^2 - 3x + 2 = 0$ sont 1 et 2, on a donc $x^2 - 3x + 2 = 1 \times (x-1)(x-2)$. Les zéros de

$x^2 - 5x + 6 = 0$ sont 2 et 3, on a donc $x^2 - 5x + 6 = 1 \times (x - 2)(x - 3)$.

Du coup

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{x - 1}{x - 3}$$

et ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{x - 3} = -1$$

4.2. Utilisation de la dérivée. Dans le cas d'une indétermination en un point x_0 de type $\frac{0}{0}$, il faut toujours essayer en priorité la dérivée :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ si } f \text{ dérivable en } x_0$$

A connaître :

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
Preuve :

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
Preuve :

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
Preuve :

4.3. Croissances comparées.

4.3.1. "L'exponentielle croît plus vite que tout".

(1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^p} = +\infty \text{ pour } a > 0 \text{ et } p \in \mathbb{R}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p e^{-ax} = 0 \text{ pour } a > 0 \text{ et } p \in \mathbb{R}$$

Application : déterminez $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - e^x$.

4.3.2. "Le logarithme croît moins vite que tout".

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \ln x = 0 \text{ pour } p > 0$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^p} = 0 \text{ pour } a > 0 \text{ et } p \in \mathbb{R}$$

Application : montrez que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$

Preuve :

Dérivabilité

1. Notion de dérivée

1.1. Définition.

Definition 30. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe.}$$

Dans ce cas, cette limite est notée $f'(x_0)$ et appelée "nombre dérivé de f en x_0 ". On dit que f est dérivable sur I (ou bien simplement "dérivable") si elle est dérivable en tout point de I .

1.2. Pente et analogie avec la vitesse.

1.2.1. *Aspect mécanique.* On repérant un point au temps $t \in \mathbb{R}$ par son abscisse $x(t) \in \mathbb{R}$. La vitesse moyenne entre t_0 et $t > t_0$ est alors $\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$. Du coup, prendre t très proche de t_0 revient à étudier la limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0},$$

Ainsi, la dérivée représente la vitesse instantanée, c'est-à-dire la vitesse moyenne entre deux temps infiniment proches. C'était en gros le point de vue de Newton au 17ème siècle : le quotient ci-dessus est d'ailleurs souvent appelé "quotient de Newton".

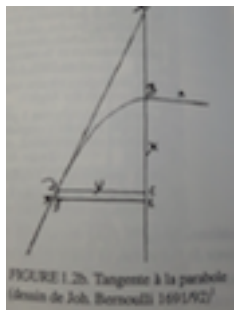
Avec des notations plus proches de la physique, on va regarder la vitesse moyenne entre l'instant t et l'instant $t + \Delta t$ qui lui est infiniment proche : la vitesse instantanée au temps t est alors

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

1.2.2. *Aspect géométrique.* On se donne une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et on trace son graphe, c'est-à-dire les points $\{M(x)/x \in I\}$ avec $M(x) = (x, f(x))$ pour $x \in I$. Ainsi, la pente de la droite $(M(x_0)M(x_0 + \Delta x))$ est

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

et du coup, en prenant Δx infiniment proche de 0, on récupère la dérivée. Elle correspond à la pente de la tangente : voyez cette reproduction d'un dessin de Bernouilli, contemporain de Newton :



Source : "L'analyse au fil de l'Histoire",
de Hairer et Wanner, Springer.

Le dessin provient de la bibliothèque universitaire de Bâle)

On peut alors déterminer l'équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$. Une droite a comme équation $y = ax + b$. La pente est $a = f'(x_0)$. La droite passe par le point $(x_0, f(x_0))$, et donc $f(x_0) = ax_0 + b$, puis $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. La droite a alors comme équation

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si elle a une dérivée en x_0 , ce qui impose à la courbe d'être assez "lisse".

Un exemple : On se donne une parabole d'équation $y = x^2 + 3x + 1$ et on cherche sa tangente au point $(1, 1^2 + 3 \times 1 + 1) = (1, 5)$. On pose $f(x) = x^2 + 3x + 1$ qui est dérivable et $f'(x) = 2x + 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La tangente au point $(1, f(1)) = (1, 5)$ a alors pour équation

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 5(x - 1) + 5 = 5x.$$

1.3. Exemples à la main.

1.3.1. *Fonction affine.* Avec $a, b \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) := ax + b$. Calculons la dérivée au point $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq x_0$, on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a.$$

Donc la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a$.

1.3.2. *Fonction carré.* On définit $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$. Calculons la dérivée au point $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq x_0$, on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0.$$

Donc la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0$.

Dans ce cas, c'est plus pratique de rester dans l'esprit du calcul infinitésimal : on ne prend pas x proche de x_0 , mais $x_0 + h$ avec h petit. On écrit alors

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h;$$

ce qui donne (heureusement)

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2x_0.$$

Si vous préférez, vous pouvez écrire aussi $x_0 + \Delta x$ avec $\Delta x \rightarrow 0$ infiniment petit.

1.3.3. *Fonction racine carrée.* On définit $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$. Calculons la dérivée au point $x_0 > 0$. Pour $h \neq 0$ tel que $x_0 + h > 0$ on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} = \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\ &= \frac{\sqrt{x_0 + h}^2 - \sqrt{x_0}^2}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

Et c'est là qu'on a besoin de $x_0 > 0$. A la limite $h \rightarrow 0$, on obtient $f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ pour $x_0 > 0$.

1.3.4. *Fonction non dérivable.* On définit $f(x) = |x|$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a donc $f(x) = x$ si $x > 0$ et $f(x) = -x$ si $x < 0$. En dessinant la courbe, on voit qu'elle n'est pas lisse en 0. Faisons le calcul du quotient de Newton :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ +1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +1.$$

Donc pas de limite en 0 : la fonction n'est pas dérivable en 0. Cependant, elle est dérivable partout ailleurs.

1.3.5. *Fonctions usuelles.* Les fonctions $\exp$, $\ln$, $\sin$, $\cos$ sont dérivables sur leur ensemble de définition et

$$(e^x)' = e^x \text{ pour } x \in \mathbb{R}, (\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ pour } x > 0,$$

$$(\sin x)' = \cos x \text{ et } (\cos x)' = -\sin x \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

4. Lien avec la continuité.

Proposition 31. *Une fonction dérivable est continue.*

Preuve : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $x_0 \in I$. Moralement, si $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite $x \rightarrow x_0$, c'est que c'est une forme indéterminée, et donc que $f(x) \rightarrow f(x_0)$ lorsque $x \rightarrow x_0$. Plus rigoureusement, pour $x \neq x_0$, on écrit

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0),$$

ainsi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f'(x_0) \times 0 + f(x_0) = f(x_0),$$

et donc f est continue en tout point $x_0 \in I$.

1.4. Propriétés algébriques.

Proposition 32. *Toute somme, fonction, produit, quotient, composée de fonctions dérivables est dérivable lorsque cela fait sens.*

1.5. Formulaire I.. On se donne $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors les fonctions suivantes sont dérivables et

- $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- $(f \times g)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$ tant que f ne s'annule pas
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ tant que g ne s'annule pas

1.6. Formulaire II : composées. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(x) \in J$ pour tout $x \in I$. Alors $x \mapsto g(f(x))$ est dérivable sur I et

$$(x \mapsto g(f(x)))' = f'(x) \times g'(f(x)) \text{ pour tout } x \in I.$$

En particulier,

- $(f^n)' = n f' f^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$;
- $(e^f)' = f' e^f$;
- $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$ tant que $f > 0$;
- $(\sin f)' = f' \cos f$;
- $(\cos f)' = -f' \sin f$.
- $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$ tant que $f > 0$.

1.7. Dérivées successives.

1.7.1. Dérivée seconde.

Definition 33. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Lorsque cela fait sens, on définit la dérivée seconde par $f'' = (f')'$.

1.7.2. Dérivée d'ordre quelconque.

Definition 34. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Lorsque cela fait sens, on note $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = (f')' = f''$, $f^{(3)} = (f^{(2)})'$, etc. Plus généralement, on définit par récurrence les dérivées d'ordre n par

$$f^{(0)} = f \text{ et } f^{(k+1)} = (f^{(k)})' \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

1.7.3. *Exemples :* on pose $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 1$ et $g(x) = e^{x^2+x}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Ces fonctions sont infiniment dérivables et on a

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 7; f''(x) = 6x - 4; f^{(3)}(x) = 6; f^{(4)}(x) = 0.$$

$$g'(x) = (2x + 1)e^{x^2+x}; g''(x) = 2e^{x^2+x} + (2x + 1)^2 e^{x^2+x} = (4x^2 + 4x + 3)e^{x^2+x}.$$

1.7.4. *Fonctions C^k .* On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 si f est dérivable et f' est continue. Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est C^k si f est k fois dérivables et que les dérivées successives $f, f', f^{(2)}, \dots, f^{(k)}$ sont toutes continues. On note $C^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions C^k de $I \rightarrow \mathbb{R}$.

2. Lien entre une fonction et sa dérivée : monotonie

2.1. Vocabulaire.

Definition 35. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :

- croissante si pour tous $x, y \in I$, alors $\{x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\}$,
- décroissante si pour tous $x, y \in I$, alors $\{x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)\}$,

- *strictement croissante si pour tous $x, y \in I$, alors $\{x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\}$,*
- *strictement décroissante si pour tous $x, y \in I$, alors $\{x < y \Rightarrow f(x) > f(y)\}$,*

Quelques exemples : Il faut repérer les fonctions croissantes et décroissantes du premier coup d'œil sur leur graphe :

- (1) La fonction $x \mapsto 2x + 1$ est strictement croissante ;
- (2) La fonction $x \mapsto -3x + 7$ est strictement décroissante ;
- (3) La fonction $x \mapsto E(x)$ est croissante mais pas strictement croissante ($E(0, 1) = E(0, 5) = 0$).

2.2. Théorème principal.

THÉORÈME 36. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I intervalle. Alors

- $\{f' = 0 \text{ sur } I\} \Leftrightarrow \{f \text{ est constante}\}$;
- $\{f' \geq 0 \text{ sur } I\} \Leftrightarrow \{f \text{ est croissante}\}$;
- $\{f' \leq 0 \text{ sur } I\} \Leftrightarrow \{f \text{ est décroissante}\}$;
- $\{f' > 0 \text{ sur } I\} \Rightarrow \{f \text{ est strictement croissante}\}$;
- $\{f' < 0 \text{ sur } I\} \Rightarrow \{f \text{ est strictement décroissante}\}$;

Inutile d'insister sur l'utilisation de ce théorème : vous savez faire des tableaux de variations.

2.3. Quelques remarques cependant :

- (1) L'hypothèse " I est un intervalle" est essentielle!!! Prenons la fonction de Heaviside H . En dehors de 0, elle est dérivable et $H'(x) = 0$ pour $x \neq 0$. Mais H n'est pas constante. Le théorème ne s'applique pas car $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle.
- (2) L'hypothèse de dérivabilité partout est indispensable! La fonction partie entière E est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $E'(x) = 0$ pour $x \notin \mathbb{Z}$. Mais E est croissante et n'est pas constante $\mathbb{R}$.

Une fonction peut être strictement croissante, mais avec une dérivée qui s'annule!
L'exemple ultra-classique est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \right\} \text{ dérivable et } f'(x) = 3x^2 \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est *strictement* croissante, mais $f'(0) = 0$. Sachez qu'il y a un théorème très précis (qui ne sera pas énoncé ici) qui donne une condition nécessaire et suffisante sur la dérivée pour avoir la croissance stricte.

3. Problèmes d'extréma

3.1. Vocabulaire.

Definition 37. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in I$. On dit que x_0 est un

- *minimum global* de f si pour tout $x \in I$, alors $f(x) \geq f(x_0)$,
- *maximum global* de f si pour tout $x \in I$, alors $f(x) \leq f(x_0)$,
- *minimum global strict* de f si pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, alors $f(x) > f(x_0)$,
- *maximum global strict* de f si pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, alors $f(x) < f(x_0)$;
- *extrémum global* si c'est un minimum ou maximum global;
- *extrémum global strict* si c'est un minimum ou maximum global strict.

A ces notions *globales* s'ajoutent des versions *locales* : une notion est vraie localement en x_0 si elle est vraie sur un petit intervalle autour de x_0 . Plus précisément,

Definition 38. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in I$. On dit que x_0 est un *minimum local* (ou *maximum local*, etc) s'il existe $\delta > 0$ tel que x_0 est un *minimum global* (ou *maximum local*, etc) sur $I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

On résume toutes ces notions sur le dessin ci-dessous :



Concrètement, on va utiliser un tableau de variations pour déterminer le minimum et la maximum, local ou global.

3.2. Exemples. *Exemple 1 :* Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 6x + 2$. Déterminez le minimum et le maximum sur $[0, 4]$.

Solution : La fonction f est dérivable et $f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$. On en déduit le tableau de variations :

	0	3	4
$f'(x)$	-	0	+
f	2	-7	-6

- Le minimum *global* sur $[0, 4]$ est $f(3) = -7$;
- Le maximum *global* sur $[0, 4]$ est $f(0) = 2$.

Exemple 2 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 35$. Déterminez les extréma locaux/globaux sur $[-1, 5]$, puis sur $\mathbb{R}$.

Solution : La fonction est dérivable et $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On fait un tableau sur $\mathbb{R}$:

	$-\infty$	0	4	$+\infty$		
x	-	0	+	+		
$x - 4$	-	-	0	+		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	35	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
				3		

On en déduit que

- Il n'y a pas d'extrémum *global* sur $\mathbb{R}$;
- Il y a un minimum *local strict* en $x = 4$;
- Il y a un maximum *local strict* en $x = 0$.

On se place maintenant sur $[-1, 5]$. On reprend le bas du tableau (inutile de refaire les dérivées) pour avoir :

	-1	0	4	5
f	30	35	3	10

On en déduit que

- Le minimum *global* sur $[-1, 5]$ est $f(4) = 3$;
- Le maximum *global* sur $[-1, 5]$ est $f(0) = 35$;
- Il y a un minimum *local strict* en $x = 3$.

Exemple 3 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. Déterminez le minimum et le maximum sur $[-1, 2]$.

Solution : Un peu de précautions : la fonction n'est pas dérivable partout !!! Pour $x < 0$, $f(x) = -x$ et donc $f'(x) = -1 < 0$; pour $x > 0$, $f(x) = x$ et donc $f'(x) = +1 > 0$. On obtient donc le tableau de variation

	-1	0	2
$f'(x)$	-		+
f	+1	0	+2

On en déduit que

- Le minimum *global* sur $[-1, 2]$ est $f(0) = 0$;
- Le maximum *global* sur $[-1, 2]$ est $f(2) = 2$.

3.3. Conditions d'ordre 0 et 1.

Proposition 39 (Ordre 0). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$. On suppose que f est continue. Alors f admet un minimum global et un maximum global.

C'est un résultat théorique : il ne donne pas la valeur du maximum, ni en quel(s) point(s) il est atteint. Pour cela, on utilise des conditions d'ordre 1.

Proposition 40. [Ordre 1] Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et soit $x_0 \in I$. On suppose que

- x_0 est un extrémum local de f ;
- x_0 n'est pas au bord de l'intervalle I .

Alors $f'(x_0) = 0$.

Les solutions de $f'(x) = 0$ sont appelées *points critiques* de f .

3.4. Mise en œuvre pratique : Comment déterminer le minimum et le maximum global d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$? On peut faire le tableau de variation bien entendu. L'inconvénient du tableau est qu'il faut déterminer le signe de la dérivée, ce qui n'est pas toujours évident.

Sinon, on peut appliquer la méthode suivante :

- Si f est continue, alors la Proposition 40 donne l'existence d'un point de minimum et d'un point de maximum sur $[a, b]$.
- On détermine les solutions de $f'(x) = 0$.
- Les points extrémaux sont parmi : a , b , les solutions de $f'(x) = 0$, et les points où f n'est pas dérivable.
- On calcule f en ces points et on est assuré de trouver le minimum et le maximum.

Voici Quelques exemples d'utilisation :

(i). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 6x + 2$. Déterminez le minimum et le maximum sur $[0, 4]$.

Solution :

- La fonction f est continue sur $[0, 4]$ fermé borné, donc elle admet un minimum et un maximum.
- La fonction f est dérivable et $f'(x) = 2x - 6$, donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
- Les points de minimum et de maximum sont parmi 0, 4 (le bord) et 3 (le point critique). On a $f(0) = 2$, $f(3) = -7$ et $f(4) = -6$.

Donc le minimum de f sur $[0, 4]$ est -7 (atteint en $x = 3$), et le maximum est 2 (atteint en $x = 0$). $\square$

(ii). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 35$. Déterminez le minimum et le maximum sur $[-1, 5]$.

Solution :

- La fonction f est continue sur $[-1, 5]$ fermé borné. Donc elle y admet un minimum et un maximum.
- La fonction est dérivable et $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$, donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \{x = 0 \text{ ou } x = 4\}$.
- Les points de minimum et de maximum sont parmi $-1, 5$ (le bord) et 0, 4 (les points critiques). On a $f(-1) = 8$, $f(0) = 35$, $f(4) = 3$, $f(5) = 10$.

Le minimum est $f(4) = 3$, le maximum est $f(0) = 35$. $\square$

(iii). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. Déterminez le minimum et le maximum sur $[-1, 2]$.

Solution :

- La fonction f est continue sur $[-1, 2]$ fermé borné. Donc elle admet un minimum et un maximum.
- La fonction est dérivable partout sauf en 0, $f'(x) = 1$ si $x > 0$ et $f'(x) = -1$ si $x < 0$. Donc la dérivée ne s'annule pas.

- Les points de minimum et de maximum sont parmi $-1, 2$ (le bord) et 0 (là où f n'est pas dérivable). On a $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ et $f(2) = 1$.

Donc le minimum de f sur $[-1, 2]$ est 0 (atteint en $x = 0$), et le maximum est 1 (atteint en $x = -1$ et $x = 2$). $\square$

Les mises en garde d'usage :

- (1) Si x_0 est au bord de l'intervalle, ça ne marche plus : par exemple, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$. On a que 0 est un minimum global sur $[0, 1]$, mais $f'(0) = 1$.
- (2) Si $f'(x_0) = 0$, ça ne veut pas dire que c'est un minimum ou un maximum ! L'exemple usuel classique est $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$: $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un point d'extrémum.

3.5. Condition suffisante d'extrémum.

THÉORÈME 41. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Soit $x_0 \in I$. On suppose que

- $f'(x_0) = 0$;
- $f''(x_0) > 0$ (resp. < 0).

Alors x_0 est un minimum (resp. maximum) local strict de f .

Pour se rappeler du signe : il faut penser à la fonction $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Vous connaissez bien cette fonction, elle a un **minimum** en 0 : on a $f'(0) = 2 \times 0 = 0$ et $f''(0) = 2 > 0$.

4. Dérivée de la réciproque et fonctions trigonométriques/hyperboliques

4.1.

PROPOSITION 42. Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction. On suppose que

- f est bijective ;
- f est dérivable ;
- $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Alors $f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable et pour tout $y \in J$, on a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)} \text{ où } f(x) = y.$$

Ce qui est agréable dans ce résultat, c'est que les hypothèses sont exactement ce qui est nécessaire pour que l'expression fasse sens. En effet, lorsqu'on écrit la formule, il faut :

- f est bijective car on écrit f^{-1}
- f est dérivable car on écrit f' ;
- $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ car on divise par $f'(x)$.

4.2. Sinus, cosinus, tangente et réciproque (inverse).

4.2.1. *Sens de variation.* On a les tableaux de variations suivants :

	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$		0	π
$\sin'(x) = \cos x$	+		$\cos'(x) = -\sin x$	-	
sin	-1	1	cos	1	-1
	$\nearrow$			$\searrow$	

	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$		
tan	$-\infty$	$+\infty$
	$\nearrow$	

Tracez les graphes :

On peut donc définir leurs inverses qui sont respectivement

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \arcsin : [-1, 1] & \rightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto & y \text{ tel que } \sin y = x \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \arccos : [-1, 1] & \rightarrow & [0, \pi] \\ x & \mapsto & y \text{ tel que } \cos y = x \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \arctan : \mathbb{R} & \rightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & y \text{ tel que } \tan y = x \end{array} \right\}$$

Attention!!! il faut bien avoir en tête l'ensemble d'arrivée. Pour cela, aidez-vous d'un cercle trigonométrique.

4.2.2. *Dérivées.* Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $] -1, 1[$ (pas dérivables en -1 et $+1$), et arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Les dérivées sont alors :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pour } -1 < x < 1$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

4.3. Sinus hyperbolique and co.

4.3.1. *Définitions.* Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit :

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

4.3.2. *Sens de variation (à faire en TD!!!)* On a les tableaux de variations suivants :

	$-\infty$	∞		0	$+\infty$
$\sinh'(x) = \cosh x$	+		$\cosh'(x) = +\sinh x$	+	
$\sinh$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$\cosh$	0	$\nearrow$ $+\infty$

	$-\infty$	$+\infty$
$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2 x$	+	
$\tan$	-1	$\nearrow$ $+1$

On peut définir leurs inverses, mais ce n'est pas au programme.

Intégration

1. Primitives

Definition 43. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle primitive de f toute fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$.

Proposition 44. Une primitive est unique à une constante près. En d'autres termes, si F est une primitive de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alors les autres primitives sont de la forme $F + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

THÉORÈME 45. Toute fonction continue admet une primitive.

Gros théorème. Remarque : dans le cadre de ce cours, on fait les choses un peu à l'envers car l'existence d'une primitive provient de la construction de l'intégrale...

1.1. Formulaire. En utilisant les dérivées usuelles et le formulaire sur les dérivées, on obtient (avec le bon domaine à chaque fois)

Fonction	Primitive	Fonction	Primitive
$x \mapsto x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$u' u^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$x \mapsto \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x + C$	$\frac{u'}{u}$	$x \mapsto \ln u + C$
$x \mapsto e^{kx} \ (k \neq 0)$	$x \mapsto \frac{e^{kx}}{k} + C$	$u' e^{ku} \ (k \neq 0)$	$\frac{e^{ku}}{k} + C$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + C$	$u' \sin u$	$x \mapsto -\cos u + C$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + C$	$u' \cos u$	$x \mapsto \sin u + C$

2. Intégrale des fonctions continues

2.1. Intégrale.

Definition 46. Soit $f \in C^0([a, b])$ une fonction continue. Soit F une primitive de f . On définit

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette quantité est indépendante du choix de la primitive F . On l'appelle intégrale de f entre a et b .

Remarque : la variable "x" utilisée peut être remplacée par n'importe quelle autre variable qui n'est pas encore utilisée. Par exemple :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(s) ds,$$

etc. Bref, n'importe quoi SAUF a et b qui sont déjà utilisées.

Exemples :

$$\int_a^b x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}; \int_0^\pi \sin t dt = [-\cos t]_0^\pi = 2.$$

2.2. Interprétation géométrique. Pour une fonction positive, l'intégrale correspond à l'aire délimitée par le graphe et l'axe des abscisses.

Par exemple, si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $f \geq 0$, alors $\int_0^1 f(x) dx$ est l'aire délimitée par $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Dessin :

2.3. Propriétés algébriques.

Proposition 47. Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{C})$. Alors

- $\int_a^a f(t) dt = 0$,
- $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$

Proposition 48 (Linéarité). Pour $f, g \in C^0([a, b], \mathbb{C})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Exemple :

$$\int_0^1 (t + 3e^t) dt = \int_0^1 t dt + 3 \int_0^1 e^t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + 3 [e^t]_0^1 = \frac{1}{2} + 3(e - 1) = 3e - \frac{5}{2}.$$

Proposition 49 (Relation de Chasles). Pour $f \in C^0(I, \mathbb{C})$ et $a, b, c \in I$, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Exemple :

$$\int_{-1}^2 |x| dx = \int_{-1}^0 |x| dx + \int_0^2 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx = \frac{5}{2}.$$

3. Méthodes générales de calcul d'intégrales

3.1. Primitive. C'est-à-dire déterminer une primitive et utiliser la définition. C'est ce qu'on a fait dans les exemples précédents.

3.2. Intégration par parties.

Proposition 50. Soient $u, v \in C^1([a, b], \mathbb{C})$. Alors

$$\int_a^b u'v dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv' dx.$$

Exemple :

$$\begin{aligned} \int_0^2 te^{-t} dt &= \int_0^2 t(-e^{-t})' dt = [-te^{-t}]_0^2 - \int_0^2 t'(-e^{-t}) dt \\ &= -2e^{-2} + \int_0^2 e^{-t} dt = -2e^{-2} + [-e^{-t}]_0^2 = 1 - 3e^{-2}. \end{aligned}$$

3.3. Changement de variable.

Proposition 51. Soit $\varphi \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ et soit $f \in C^0(I, \mathbb{C})$ avec $\varphi(a) \in I$ et $\varphi(b) \in I$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Dans la pratique, on écrit qu'on fait le changement de variable $x = \varphi(t)$, donc $dx = \varphi'(t) dt$, et on réécrit l'intégrale.

Exemples : Calculons $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. On fait le changement de variables $y = \sqrt{x}$, donc $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ et $dx = 2\sqrt{x} dy$. Comme x varie de $1 \rightarrow 2$, on a donc que y varie de $\sqrt{1} \rightarrow \sqrt{4}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int_1^2 \frac{2y dy}{1+y} = \int_1^2 \frac{2(y+1) - 2}{1+y} dy \\ &= \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{1+y} \right) dy = [2y - 2 \ln(1+y)]_1^2 = 2 - 2 \ln 3 + 2 \ln 2. \end{aligned}$$

Voici un autre exemple avec un changement de variable affine :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(t + 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} t \right) \right) dt &= \int_0^1 t dt + 2 \int_0^1 \sin \left(\frac{\pi}{2} t \right) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + 2 \left[-\frac{2}{\pi} \cos \left(\frac{\pi}{2} t \right) \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

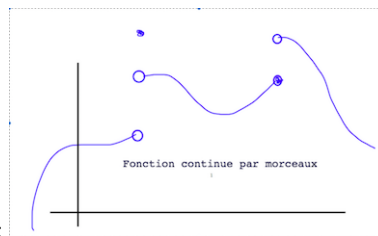
4. Généralisation : Intégrale des fonctions continues par morceaux

Les résultats ci-dessus se généralisent sans problème au cas des fonctions continues par morceaux.

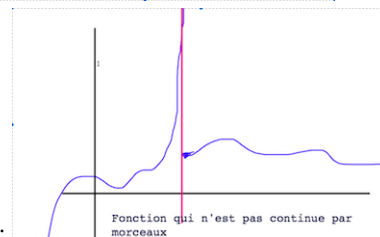
4.1. Fonctions continues par morceaux.

Définition 52. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux s'il existent $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ tels que pour tout $k = 0, \dots, n-1$, $f|_{[a_k, a_{k+1}[}$ est continue et se prolonge en une fonction continue sur $[a_k, a_{k+1}]$.

En gros : on peut partager l'intervalle de définition en plusieurs sous-intervalles tels que sur chacun des intervalles ouverts, la fonction est continue et n'explose pas au bord.



Voici un exemple de fonction continue par morceaux :



Et voici une fonction qui n'est pas continue par morceaux :
La fonction de Heaviside $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est continue par morceaux

4.2. Intégration des fonctions continues par morceaux.

Définition 53. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux avec une suite $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ comme dans la Définition 52. On définit alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{a_0}^{a_1} f(t) dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t) dt + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) dt,$$

chacune des intégrales utilisant le prolongement continu. Cette définition est indépendante du choix des a_i s.

C'est la relation de Chasles qui donne l'indépendance.

4.3. Exemples.

$$\int_{-2}^3 H(x) dx = \int_{-2}^0 H(x) dx + \int_0^3 H(x) dx = \int_{-2}^0 0 dx + \int_0^3 1 dx = 3.$$

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ 2x + 1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \\ x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Alors

$$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 1 dx + \int_2^3 (2x + 1) dx + \int_3^4 x^2 dx = 2 + [x^2 + x]_2^3 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_3^4 = 61/3.$$

Les valeurs sur les points de discontinuité n'ont aucune influence sur le calcul de l'intégrale.

5. Inégalités

5.1. Positivité de l'intégrale.

Proposition 54. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $a < b$ et $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

De plus, $\int_a^b f(t) dt = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$ pour tout $t \in [a, b]$, sauf éventuellement en un nombre fini de points. Si f est continue, $\int_a^b f(t) dt = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$ pour tout $t \in [a, b]$.

5.2. Majoration de l'intégrale.

Proposition 55. Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors lorsque $a < b$, on a

$$m(b-a) \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a).$$

Si on a $K \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq K$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq K(b-a).$$

5.3. Moyenne.

Proposition 56. Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a}.$$

6. Fractions rationnelles

Il s'agit d'intégrer des fonctions de type $\frac{P(t)}{Q(t)}$ avec P, Q des polynômes. On va se restreindre à Q de degré au plus 2.

6.1. $\deg(Q) = 1$. On s'intéresse à $f(t) = \frac{P(t)}{t-\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). L'idée est de faire apparaître $t - \alpha$ dans $P(t)$. Voici un exemple : déterminons une primitive de

$$f(t) = \frac{t^2 + 3t + 4}{t-1}$$

L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On écrit

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{(t-1+1)^2 + 3(t-1+1) + 4}{t-1} = \frac{(t-1)^2 + 2(t-1) + 3(t-1) + 8}{t-1} \\ &= \frac{(t-1)^2 + 5(t-1) + 8}{t-1} = t-1 + 5 + \frac{8}{t-1} = t+4 + \frac{8}{t-1} \end{aligned}$$

et on intègre à vue :

$$f(t) = t+4 + \frac{8}{t-1} = \left(\frac{t^2}{2} + 4t + 8 \ln |x-1| \right)'$$

Par exemple

$$\int_2^3 \frac{t^2 + 3t + 4}{t - 1} dt = \left[\frac{t^2}{2} + 4t + 8 \ln |t - 1| \right]_2^3 = \frac{5}{2} + 4 + 8 \ln 2$$

6.2. $\deg(Q) = 2$ avec 1 zéro double. C'est la même méthode que pour le degré 1. Voici un exemple : déterminons une primitive de

$$f(t) = \frac{t^2 + 3t + 4}{(t - 1)^2}$$

L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On écrit

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{(t - 1 + 1)^2 + 3(t - 1 + 1) + 4}{(t - 1)^2} \\ &= \frac{(t - 1)^2 + 5(t - 1) + 8}{(t - 1)^2} = 1 + \frac{5}{t - 1} + \frac{8}{(t - 1)^2} \end{aligned}$$

et on intègre à vue :

$$f(t) = \left(t + 5 \ln |t - 1| - \frac{8}{t - 1} \right)'$$

Par exemple

$$\int_2^3 \frac{t^2 + 3t + 4}{(t - 1)^2} dt = \left[t + 5 \ln |t - 1| - \frac{8}{t - 1} \right]_2^3 = 1 + 5 \ln 2 + 4$$

6.3. $\deg(Q) = 2$ avec 2 zéros distincts. Dans ce cas, si $Q(t) = (t - \alpha)(t - \beta)$ (on peut toujours s'y ramener), on a

$$\frac{P(t)}{(t - \alpha)(t - \beta)} = \frac{A}{t - \alpha} + \frac{B}{t - \beta} + R(t)$$

avec R polynôme tel que

$$R(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \deg(P) < \deg(Q) \\ \text{de degré } d = \deg(P) - \deg(Q) & \text{si } \deg(P) \geq \deg(Q) \end{cases}$$

Il faut alors trouver $A, B, R(t)$ en re-développant. Voici quelques exemples :

- **Primitive de $\frac{1}{t^2 - 3t + 2}$.** Une étude du polynôme du second degré donne $t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2)$. Domaine de définition : $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ On a donc $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{t^2 - 3t + 2} = \frac{1}{(t - 1)(t - 2)} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t - 2}$$

On met tout le monde au même dénominateur pour obtenir

$$\frac{1}{(t - 1)(t - 2)} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t - 2} = \frac{A(t - 2) + B(t - 1)}{(t - 1)(t - 2)} = \frac{(A + B)t - 2A - B}{(t - 1)(t - 2)}$$

En identifiant, on veut donc $A + B = 0$ et $-2A - B = 1$. On a $A = -B$, et donc $-A = -1$ et $B = 1$, de sorte que

$$\frac{1}{(t - 1)(t - 2)} = \frac{-1}{t - 1} + \frac{1}{t - 2} = (-\ln |t - 1| + \ln |t - 2|)'$$

Par exemple, on a

$$\int_3^4 \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = [-\ln |t - 1| + \ln |t - 2|]_3^4 = 2 \ln 2 - \ln 3$$

- **Primitive de $\frac{2t-4}{t^2-4t+3}$.** Une étude du polynôme du second degré donne $t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$. Domaine de définition : $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ On a donc $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{2t-4}{t^2-4t+3} = \frac{2t-4}{(t-1)(t-3)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}$$

On met tout le monde au même dénominateur pour obtenir

$$\frac{2t-4}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-3} = \frac{A(t-3) + B(t-1)}{(t-1)(t-3)} = \frac{(A+B)t - 3A - B}{(t-1)(t-2)}$$

En identifiant, on veut donc $A+B=2$ et $-3A-B=-4$. On a $A=2-B$, et donc $-3A+A-2=-4$ puis $A=1$ et $B=1$, de sorte que

$$\frac{2t-4}{(t-1)(t-2)} = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-3} = (\ln|t-1| + \ln|t-3|)'$$

Par exemple, on a

$$\int_{-2}^0 \frac{2t-4}{t^2-4t+3} dt = [\ln|t-1| + \ln|t-3|]_{-2}^0 = -\ln 5$$

- **Primitive de $\frac{t^3-5t^2+8t-5}{t^2-5t+6}$.** On a $t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$. D'après le résultat ci-dessus, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ et $R(t)$ de degré $3-2=1$ tels que

$$\frac{t^3-5t^2+8t-5}{t^2-5t+6} = \frac{t^3-5t^2+8t-5}{(t-2)(t-3)} = R(t) + \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-3} = at+b + \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-3}$$

On met tout le monde au même dénominateur pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{t^3-5t^2+8t-5}{(t-2)(t-3)} &= \frac{(at+b)(t^2-5t+6) + A(t-3) + B(t-2)}{(t-2)(t-3)} \\ &= \frac{at^3 + (b-5a)t^2 + (6a-5b+A+B)t + 6b-3A-2B}{(t-2)(t-3)} \end{aligned}$$

En identifiant, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} a=1 \\ b-5a=-5 \\ 6a-5b+A+B=8 \\ 6b-3A-2B=-5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \\ 6a-5b+A+B=8 \\ 6b-3A-2B=-5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \\ A+B=2 \\ -3A-2B=-5 \end{array} \right\}$$

et on obtient $A=B=1$. Du coup, on a

$$\frac{t^3-5t^2+8t-5}{t^2-5t+6} = t + \frac{1}{t-2} + \frac{1}{t-3} = \left(\frac{t^2}{2} + \ln|t-2| + \ln|t-3| \right)'$$

6.4. $\deg(Q) = 2$ avec aucun zéro réel. Le modèle est

$$\frac{1}{x^2+1} = (\arctan)'(x)$$

L'idée est de s'y ramener avec des changements de variables. Voici un exemple : calculons

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2+2x+10}$$

On a $x^2 + 2x + 10$ qui n'a pas de zéro, et on a $x^2 + 2x + 10 = (x + 1)^2 + 9$. Allons-y avec des changements de variables :

$$\begin{aligned}\int_1^{1+3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} &= \int_1^{1+3\sqrt{3}} \frac{dx}{(x+1)^2 + 9} = \int_0^{3\sqrt{3}\pi} \frac{dy}{y^2 + 9} \text{ avec } y = x + 1 \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{3dz}{9z^2 + 9} \text{ avec } y = 3z \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{3} [\arctan z]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\arctan(\sqrt{3})}{3} = \frac{\pi}{9}\end{aligned}$$

Equations différentielles

1. Contexte

1.1. Position du problème et des notions. Dans la nature, de nombreux phénomènes sont modélisés par des équations différentielles : trajectoire d'un objet, décroissance radioactive, dynamique des populations, dynamique des épidémies. Les résultats théoriques devront rendre compte le plus finement possible de ces phénomènes.

Un exemple à garder en tête : la trajectoire d'une flèche. Quand un archer vise une cible, ce n'est pas au hasard ! Il sait que pour une position de départ donnée (lieu, angle), et une certaine force, sa flèche atteindra son objectif, et n'ira pas ailleurs. On peut lancer dix fois une flèche avec les mêmes conditions initiales, elle ira toujours au même endroit : c'est l'unicité.

1.2. Définitions.

Definition 57. Une équation différentielle est une relation entre une fonction et ses dérivées successives.

Definition 58. Intégrer une équation différentielle : c'est la résoudre. Les courbes intégrales sont les représentations graphiques des solutions d'une équation différentielle.

2. Equations linéaires du premier ordre

2.1. Théorème fondamental.

THÉORÈME 59. Soient $a, b, c \in C^0(I)$ trois fonctions avec $a(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Soit $t_0 \in I$ et soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique solution $y \in C^1(I)$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 & \text{pour } t \in I, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

en abrégé, on note

$$\begin{cases} ay' + by + c = 0 & \text{sur } I, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

C'est un résultat d'existence et d'unicité : pour une condition initiale donnée ($y(t_0) = y_0$), on a existence d'une solution y , et elle est unique.

Ce résultat ne dit rien sur la forme de la solution. On va être plus précis

2.2. Equation de type $y' = ky$.

THÉORÈME 60. Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit $y \in C^1(\mathbb{R})$. Alors

$$y' = ky \Leftrightarrow \{ \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(t) = \lambda e^{kt} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \}$$

Pour déterminer λ , on utilise les conditions initiales.

Exemple : déterminons la solution de

$$\begin{cases} y' + y = 0 & \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

D'après le théorème, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel $y(t) = \lambda e^{-t}$ pour tout t . On a alors $2 = y(0) = \lambda$. Donc $y(t) = 2e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 20: Déterminez les solutions des ED suivantes :

$$y' = 3y, \quad 2y' + 3y = 0, \quad 4x + x = 0; \quad y' = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + 2y = 0 \\ y(0) = 3 \end{array} \right. \text{ sur } \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = 5y \\ y(1) = 2 \end{array} \right. \text{ sur } \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 2y' + 7y = 0 \\ y(-1) = 0 \end{array} \right. \text{ sur } \mathbb{R},$$

2.3. Equation de type $y' = a(t)y$.

THÉORÈME 61. Soit $a \in C^0(I)$. Soit $y \in C^1(\mathbb{R})$. Alors

$$y' = a(t)y \Leftrightarrow \{ \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(t) = \lambda e^{A(t)} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \}$$

où A est une primitive de a sur I .

Pour déterminer λ , on utilise les conditions initiales.

Exemple : déterminons la solution de

$$\begin{cases} y' + xy = 0 & \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

D'après le théorème, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel $y(x) = \lambda e^{-x^2/2}$ pour tout t . On a alors $2 = y(0) = \lambda$. Donc $y(t) = 2e^{-x^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 21: Déterminez les solutions des ED suivantes :

$$y' = x^2y, \quad \cos(x)y' + 3\sin(x)y = 0 \text{ sur }]-\pi/2, \pi/2[, \quad 4tx + x = 0 \text{ sur } [1, +\infty[;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + \tan^2(x)y = 0 \\ y(0) = 3 \end{array} \right. \text{ sur }]-\pi/2, \pi/2[, \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = \ln(x)y \\ y(1) = 2 \end{array} \right. \text{ sur }]0, +\infty[, \quad \left\{ \begin{array}{l} 2y' + 7e^x y = 0 \\ y(-1) = 0 \end{array} \right. \text{ sur } \mathbb{R},$$

3. Equations d'ordre 1 avec second membre**3.1. Solutions particulières pour des équations à coefficients constants.**

On va chercher une solution particulière de $2y' + 3y = 6x + 7$. Le plus simple, c'est d'essayer un polynôme. On tente avec un polynôme constant : $y(x) = k$, donc $2y' + 3y = 3k \neq 6x + 7$, ça ne marche pas. On tente un degré de plus : avec $y(x) = ax + b$, on obtient

$$2y' + 3y = 3ax + (2a + 3b) = 6x + 7 \text{ pour } a = 2 \text{ et } b = 1.$$

Donc une solution particulière est $y(x) = 2x + 1$.

Exercice 22: Pour chacune des équations suivantes, déterminez UNE solution sous forme de polynôme

- $y' + y = 1$
- $y' + 2y = 2x + 3$;
- $y' = 3x$;
- $y' + 2xy = x$;
- $2y' + xy = x^2 + x + 2$;

Lorsque le second membre est le produit d'un polynôme par une exponentielle, on tente justement polynôme par exponentielle.

Exemple : trouvons une solution de $y' + y = (3x + 4)e^{2x}$. On essaie $y(x) = ke^{2x}$: ça donne $y' + y = 3ke^{2x} \neq (3x + 4)e^{2x}$, donc ça ne marche pas. On essaie $y(x) = (ax + b)e^{2x}$: on obtient $y' + y = (3ax + 3b + a)e^{2x} = (3x + 4)e^{2x}$, donc il faut $3a = 3$ et $3b + a = 4$, donc $a = b = 1$, puis $y(x) = (x + 1)e^{2x}$ convient.

Exercice 23: Pour chacune des équations suivantes, déterminez UNE solution sous forme de polynôme multiplié par une exponentielle

- $y' + y = 2e^x$;
- $y' - y = e^x$;
- $3y' + 4y = xe^{2x}$;
- $y' = 3xe^{-x}$;
- $2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x}$;
- $y' + 4y = xe^{-4x}$.

3.2. Résolutions des équations avec second membre.

3.2.1. Méthode générale.

Proposition 62. Soient $a, b, c \in C^0(I)$ trois fonctions avec $a(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. On suppose qu'on a $\tilde{y} \in C^1(I)$ solution de $a\tilde{y}' + b\tilde{y} + c = 0$ sur I . Alors, toute solutions de

$$ay' + by + c = 0 \text{ sur } I,$$

s'écrit $y = \tilde{y} + \lambda z$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z \in C^1(I)$ est solution de l'équation sans second membre

$$az' + bz = 0.$$

3.2.2. Exemple. On cherche à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y' + 3y = 6x + 7, \\ y(0) = 2 \end{array} \right\}.$$

On a déjà trouvé une solution particulière : $2x + 1$. Les solutions de l'équation sans second membre $2z' + 3z = 0$ sont de la forme $\lambda e^{-3x/2}$. Du coup,

$2y' + 3y = 6x + 7 \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = 2x + 1 + \lambda e^{-\frac{3}{2}x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Avec la condition $y(0) = 2$, on a $2 = y(0) = 2 \times 0 + 1 + \lambda e^0 = 1 + \lambda$, et donc $\lambda = 1$. Ainsi

$$\boxed{y(x) = 2x + 1 + e^{-\frac{3}{2}x}.$$

Exercice 24: Déterminez toutes les solutions de

- $y' + y = 2e^x$;
- $y' - y = e^x$;
- $2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x}$.

Exercice 25: Effectuez la résolution sur $\mathbb{R}$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y = 2e^x, \\ y(0) = 3 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} 2y' + xy = x^2 + x + 2, \\ y(2) = 0 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} 2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x}, \\ y(1) = 3 \end{array} \right\}$$

4. La méthode dite de "variation de la constante"

C'est spécifique aux équations linéaires avec second membre. On la présente ici pour le premier ordre.

4.1. La méthode. Déterminons toutes les solutions de $y' + 2y = e^x$.

Etape 1 : résolution de l'équation sans second membre $y' + 2y = 0$. Les solutions sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{-2x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Etape 2 : Recherche d'une solution particulière y_p de l'équation avec second membre. On va poser $y_p(x) = \lambda(x)e^{-2x}$ (on a remplacé la constante λ par une **fonction** $\lambda(x)$). Alors si y_p est solution de l'équation, on a

$$e^x = y_p' + 2y_p = \lambda' e^{-2x} - 2\lambda(x)e^{-2x} + 2\lambda(x)e^{-2x} = \lambda'(x)e^{-2x},$$

et donc $\lambda'(x) = e^{3x}$, donc $\lambda(x) = \frac{e^{3x}}{3} + C$. On prend $C = 0$ et on a $y_p(x) = \frac{e^x}{3}$.

Etape 3 : Solutions générales. Les solutions de $y' + 2y = e^x$ sont de la forme

$$y(x) = \frac{e^x}{3} + \lambda e^{-2x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

4.2. Applications.

Exercice 26: Résolvez les équations suivantes avec la méthode de variation de la constante

$$y' - y = e^x \ln x; \quad y' + y = 3 \cos 2x - \sin 2x.$$

5. Equations du second ordre à coefficients constants

5.1. Le théorème général.

THÉORÈME 63. Soient $a, b, c, d \in C^0(I)$ trois fonctions avec $a(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Soit $t_0 \in I$ et soit $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique solution $y \in C^2(I)$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) + d(t) = 0 & \text{pour } t \in I, \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

En abrégé, on note

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy + d = 0 & \text{sur } I, \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

C'est un résultat d'existence et d'unicité : pour des conditions initiales données ($y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$), on a existence d'une solution y , et elle est unique.

ATTENTION : on a **deux** conditions initiales à donner ($y(t_0)$ et la dérivée). C'est parce qu'on a une équation d'ordre 2. Ordre 3 : 3 conditions, etc.

Là encore, ce résultat ne dit rien sur la forme de la solution. On va effectuer une résolution complète pour les coefficients constants.

5.2. Résolutions des équations sans second membre.

5.2.1. *Préliminaire.* On se donne $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ et on va résoudre

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Dans la section précédente, on a vu qu'il y avait beaucoup d'exponentielles. On va donc chercher des solutions sous la forme $y(x) = e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{R}$. On obtient alors

$$ay'' + by' + cy = (ar^2 + br + c)e^{rx} \text{ pour } x \in \mathbb{R},$$

et donc, pour que ça vaille 0 partout, on va demander $ar^2 + br + c = 0$. Cette équation s'appelle **l'équation caractéristique de l'équation différentielle**.

5.2.2. *Résolution.*

THÉORÈME 64. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$. On s'intéresse à l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (E)$$

Soit $ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique.

Si on a deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$, alors les solutions de (E) sont de la forme

$$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \text{ pour } A, B \in \mathbb{R}.$$

Si on a une racine réelle distincte r_1 , alors les solutions de (E) sont de la forme

$$y(x) = (Ax + B)e^{r_1 x} \text{ pour } A, B \in \mathbb{R}.$$

Si on a deux racines imaginaires $\alpha + i\omega$ et $\alpha - i\omega$, alors les solutions de (E) sont de la forme

$$y(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)) \text{ pour } A, B \in \mathbb{R}.$$

5.2.3. *Exemples :* • Déterminons les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Les solutions de l'ED sont alors $x \mapsto Ae^x + Be^{2x}$.

• Déterminons les solutions de $y'' + 2y' + y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$ dont la racine double est $r_1 = -1$. Les solutions de l'ED sont alors $x \mapsto (Ax + B)e^{-x}$.

• Déterminons les solutions de $y'' - 4y' + 5y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 5 = 0$ dont les racines complexes sont $r_1 = 2 + i$ et $r_2 = 2 - i$. Les solutions de l'ED sont alors $x \mapsto e^{2x}(A \cos x + B \sin x)$.

Exercice 27: Effectuez la résolution des équations différentielles suivantes :

$$y'' + 4y = 0; \quad y'' - 4y = 0; \quad y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Déterminez alors les solutions de chacune de ces équations telles que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 28 (Circuit RLC): Soient $L, C > 0$ et $R > 0$. Déterminez les solutions de l'équation

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$

Que se passe-t'il lorsque $t \rightarrow +\infty$?

Exercice 29: Quelles sont toutes les solutions de $y'' - 9y = 0$ qui ont une limite en $+\infty$??

5.3. Résolutions des équations avec second membre (hors-programme).

Même chose que pour les équations du premier ordre : on cherche une solution particulière et on lui ajoute les solutions de l'équation sans second membre.

Exercice 30: Déterminez les solutions des équations suivantes :

$$(a.) \left\{ \begin{array}{l} y'' - 3y' + 2y = xe^x \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{array} \right\}, \quad (b.) \left\{ \begin{array}{l} y'' + y = e^{2t} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{array} \right\}, \quad (c.) \left\{ \begin{array}{l} y'' + y = \cos x \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{array} \right\}.$$

6. Autres exercices et quelques équations non-linéaires

Exercice 31: Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{lll} a. \dot{x} = x + t^2 & b. y' \cos x + y \sin x = 1 & c. y' + 2y = \sin x \\ d. xy' = y \text{ sur }]0, +\infty[& e. xy' = y + x^2 \text{ sur }]0, +\infty[. \end{array}$$

Exercice 32: Résolvez l'équation différentielle $y' + y + xy^2 = 0$ à l'aide du changement de fonction $z = y^{-1}$.

Exercice 33: On cherche à résoudre l'équation différentielle $\dot{x} + x = x^3$.

- (a) Quelles sont les solutions constantes de l'équation ?
- (b) Soit $x \in C^1(I)$ une solution maximale strictement positive. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$: on pose $y = x^\alpha$. Montrez que pour une valeur de α bien choisie, y satisfait une équation différentielle linéaire simple qu'on résoudra. Déduisez-en x .
- (c) Déterminez toutes les solutions maximales de $\dot{x} + x = x^3$.

Exercice 34: On cherche à résoudre l'équation différentielle $\dot{x} - tx = t^3x^2$ avec la condition initiale $x(0) = 1/3$. On admet que $x(t) > 0$ pour tout $t \in I$ intervalle de définition.

- (a) Montrez que $x(t) > 0$ pour tout $t \in I$.
- (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$: on pose $y = x^\alpha$. Montrez que pour α bien choisi, y satisfait une équation différentielle linéaire simple
- (c) Déterminez une solution particulière de l'équation de y sous forme d'un polynôme du second degré. Résolvez l'équation de y .
- (d) Déduisez-en l'expression de x . Quelle va être la forme de l'intervalle I ?

Systemes linéaires

1. Qu'est-ce qu'un système linéaire ? D'où cela vient-il ?

1.1. Définition. Un système linéaire est un nombre fini d'équations linéaires en un nombre fini variables. On n'écrira pas la définition formelle.

1.2. Exemples. Voici quelques exemples en vrac :

- Système 2×2 : 2 équations avec 2 variables (inconnues)

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$$

- Système 3×2 : 3 équations avec 2 inconnues

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x - y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

- Système 1×2 : 1 équation avec 2 inconnues

$$\{x + 3y = 0\}$$

- Système 2×3 : 2 équations avec 3 inconnues

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 1 \end{cases}$$

- Système 3×3 : 3 équations avec 3 inconnues

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \\ -3x + y - 4z = 2 \end{cases}$$

Et ainsi de suite. Dans les équations, on ne doit pas avoir de x^2 , e^y , $\ln(z - x^7)$, etc car chacune doit être linéaire.

1.3. D'où viennent les systèmes ? On en a déjà vu pour trouver des primitives de fractions rationnelles, ou encore pour trouver des solutions d'équations différentielles avec conditions initiales. On va maintenant les étudier de façon plus systématique.

1.4. Les questions qu'on se pose. Un système étant donné, on va se poser les questions suivantes :

- (1) A-t-on au moins une solution ?
- (2) En a-t-on plusieurs ?

Voyons quelques situations auxquelles nous pouvons être confrontés :

1.4.1. *Un système 2×2 qui se résout bien.* Nous avons déjà résolu le premier système

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$$

pour les primitives de fractions rationnelles. En exprimant y en fonction de x , puis en remplaçant dans la seconde équation, on a

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ -2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ -2x - (-x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vérifions quand même que ce qu'on a trouvé est bien solution :

$$\begin{cases} (-1) + 1 = 0 \\ -2 \times (-1) - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow OK!$$

On a donc existence et unicité de la solution, à savoir $x = -1$ et $y = 1$.

Il faut toujours vérifier!!! Ça ne coûte pas grand-chose, et ça évite beaucoup de catastrophes.

Une petite remarque théorique : Dans le cas présent, on aurait pu raisonner par équivalence. En d'autres termes, on aurait pu remplacer les $\Rightarrow$ par des $\Leftrightarrow$. MAIS ce n'est pas toujours le cas (On va voir ci-dessous). Donc on va jouer la sécurité et systématiquement vérifier.

1.4.2. *Un système 2×2 qui ne marche pas.* Considérons le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

Supposons qu'on a une solution, alors, en multipliant la première ligne par 2, on obtient

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Contradiction!!!}$$

Et donc ce système n'a pas de solution.

1.4.3. *Un système 3×2 qui n'a pas de solution.* Considérons le système

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

Qui peut le plus peut le moins, si on a une solution, elle vérifie

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = x = 1 \end{cases},$$

Pas mal, donc, on un candidat. Cependant, n'oublions pas la dernière équation du système d'origine ! On a

$$2x + 3y = 2 \times 1 + 3 \times 1 = 5 \neq 6!!!!$$

Et donc ça ne marche pas. Il n'y a pas de solution à ce système.

Moralité : il faut toujours vérifier que le candidat est bien une solution du système.

1.4.4. *Pour finir : un système 2×2 qui a beaucoup de solutions.* Considérons le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

La seconde équation est le triple de la première. On a plein de solutions :

$$(0, 1); (1, 0); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); (2, -1) \dots$$

Plus généralement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x, 1 - x)$ est solution du système.

Ce qu'il faut retenir de ce panorama : il y a de nombreuses situations qui peuvent se produire. Donc il va falloir faire preuve de prudence.

2. Résolution des systèmes 2×2

On va faire la résolution sur des exemples, puis énoncer le résultat général

2.1. La méthode de substitution. Elle consiste à utiliser une ligne pour écrire une variable en fonction de l'autre, puis d'utiliser cette expression dans l'autre ligne.

Considérons par exemple le système

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

Là, il est très facile d'exprimer y en fonction de x dans la première ligne. Ensuite, on va injecter dans la seconde ligne :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ 3x - 2(5 - 2x) = 4 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ 7x = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ x = \frac{14}{7} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2 \times 2 = 1 \\ x = \frac{14}{7} = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On va quand même vérifier que c'est bien solution :

$$\begin{cases} 2 \times 2 + 1 = 5 \\ 3 \times 2 - 2 \times 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow OK!$$

Et donc

L'unique solution de $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ est $\{x = 2 \text{ et } y = 1\}$.

Il faut s'entraîner sur divers exemples. Il faut aussi savoir que ça marche presque tout le temps... On donnera plus tard un résultat théorique qui permet de savoir exactement quand la résolution par substitution fonctionne.

2.2. La méthode par élimination, dite "Pivot de Gauß". On va choisir une variable, appelée "pivot", et on va multiplier les lignes de façon à avoir le même coefficient devant le pivot. Ensuite, on soustraira les lignes, ce qui éliminera le pivot : il ne restera alors qu'une variable.

Reprenons notre système

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

On notera L_1 la première ligne, et L_2 la seconde ligne. Les notations vont être assez intuitives.

- Commençons par choisir y comme pivot :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \quad L_1 \times 2 \rightarrow L_1 \quad \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \\ & \Rightarrow \\ & L_1 + L_2 \rightarrow L_1 \quad \begin{cases} 4x + 2y + (3x - 2y) = 10 + 4 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \\ & \Rightarrow \end{aligned}$$

On a éliminé la variable y , la première ligne donne alors $x = 2$, la seconde donne

$$3 \times 2 - 2y = 4 \Rightarrow y = 1.$$

Bien entendu, on vérifie que $(2, 1)$ est solution comme pour la substitution ! Finalement, on obtient $\boxed{x = 2 \text{ et } y = 1}$

- On peut aussi choisir x comme pivot :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \times 3 \rightarrow L_1 \\ L_2 \times 2 \rightarrow L_2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 6x + 3y = 15 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases} \\ & \Rightarrow \\ & L_1 - L_2 \rightarrow L_1 \quad \begin{cases} 6x + 3y - (6x - 4y) = 15 - 8 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y = 7 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases} \\ & \Rightarrow \end{aligned}$$

On a éliminé la variable x dans la première ligne, et on obtient $y = 1$. En injectant $y = 1$ dans la seconde ligne, on récupère heureusement $x = 2$... On vérifie, comme d'habitude, et on a $\boxed{x = 2 \text{ et } y = 1}$

2.3. Le résultat théorique. Sur l'exemple, dans le cas des deux méthodes, on a trouvé exactement une solution (la même, sinon ce serait gênant). Ce n'est pas un hasard :

THÉORÈME 65. *On considère le système*

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = l \end{cases}$$

où les inconnues sont $x, y \in \mathbb{R}$ et a, b, c, d, k, l sont des paramètres. On suppose que

$$ad - bc \neq 0.$$

Alors la méthode de substitution ou bien le pivot de Gauß fonctionnent avec au moins une des deux inconnues.

En particulier, le système linéaire admet une unique solution (x, y) .

Dans notre exemple, on a $ad - bc = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7 \neq 0$. Et effectivement, tout a bien marché.

2.4. Et si $ad - bc = 0$? Si jamais $ad - bc = 0$, alors soit on n'a pas de solution, soit on a une infinité de solutions. Comment le savoir ? Il faut faire une des méthodes et deux cas se produisent :

- Si on arrive à une contradiction, alors il n'y a pas de solution ;
- Si après manipulations, une équation devient inutile et qu'on n'a pas de contradiction, alors on a une infinité de solutions.

Reprenons les exemples de la première partie de ce chapitre :

2.4.1. Effectuons le pivot de Gauß sur

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \times 2 \rightarrow L_1} \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_2 - L_1 \rightarrow L_2} \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Absurde!}$$

2.4.2. Par pivot de Gauß on a

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \times 3 \rightarrow L_1} \begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

On peut alors se passer de la seconde équation et on obtient seulement

$$3x + 3y = 3, \text{ ou bien } x + y = 1$$

Et on a une infinité de solutions.

3. Systèmes 3×2

Ce sont des systèmes comme

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

3.1. Le principe. Pour la résolution, on va prendre deux lignes, ce qui fera un système 2×2

- Si on trouve une solution unique : on teste la solution sur la troisième ligne. Si ça marche, alors on a la solution du système. Sinon, il n'y a pas de solution.
- Si on trouve une contradiction, alors il n'y a pas de solution.
- Si on tourne en rond, on essaie avec deux autres lignes.
- Si après avoir essayé toutes les combinaisons de deux lignes on ne s'en sort pas, c'est qu'il n'y a pas de solution.

3.2. Exemple 1. Voyons ce que ça donne sur notre exemple

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

On considère

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

La résolution par substitution ou pivot de Gauß donne $x = 2$ et $y = 1$. On considère la troisième ligne :

$$3 \times 2 - 2 \times 1 = 4 \Rightarrow OK!$$

On a donc une unique solution du système 3×2 : $x = 2$ et $y = 1$

3.3. Exemple 2. Voyons un autre exemple : on considère

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Pour commencer, prenons L_1 et L_2 ce qui donne le système

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

Par substitution, on a

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 2x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 2(1 + y) - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 2 = 2 \end{cases}$$

et donc on n'arrive pas à conclure. Changeons de lignes et considérons L_1 et L_3

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_1 + L_2 \rightarrow L_1} \begin{cases} 2x = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

puis on obtient $x = 2$ et $y = 1$. Il nous reste maintenant à considérer la ligne résiduelle

$$2x - 2y = 2 \times 2 - 2 \times 1 = 2 \Rightarrow OK!$$

On vérifie quand même que $(2, 1)$ est bien une solution du système d'origine (c'est le cas). On a donc

$$\text{L'unique solution de } \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \text{ est } x = 2 \text{ et } y = 1.$$

4. Systèmes 3×3

4.1. Méthode générale. Pour ces systèmes, à moins de trouver une substitution évidente, on utilisera le pivot de Gauß. Là encore, plutôt que de voir la théorie, on va traiter un exemple.

4.2. Un exemple qui marche. Considérons le système

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - y - 2z = -4 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

Prenons x comme pivot (y et z fonctionnent aussi) :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - y - 2z = -5 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 - 3L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3 \end{matrix}} \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - y - 2z - 3(x + y + z) = -5 - 3 \times 6 \\ 2x + 3y - z - 2(x + y + z) = 5 - 2 \times 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ -4y - 5z = -23 \\ y - 3z = -7 \end{cases}$$

On a donc éliminé x des deux dernières lignes, et on extrait un système 2×2 qu'on résout par pivot sur y :

$$\begin{cases} -4y - 5z = -23 \\ y - 3z = -7 \end{cases} \xrightarrow{L_1 + 4L_2 \rightarrow L_1} \begin{cases} -4y - 5z + 4(y - 3z) = -23 + 4 \times (-7) \\ y - 3z = -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -17z = -51 \\ y - 3z = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y - 3z = -7 \end{cases}$$

et donc $y = 3z - 7 = 2$. En reprenant le système d'origine, on obtient $x = 6 - y - z = 1$. Bien entendu, on vérifie que $(1, 2, 3)$ est solution. On a alors montré que

$$\text{L'unique solution de } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - y - 2z = -5 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases} \text{ est } x = 1, y = 2, z = 3.$$

4.3. Quand le pivot marche-t'il ? Tout comme pour les systèmes 2×2 , il n'y a pas toujours de solution. Cependant, il existe un critère pour avoir existence et unicité des solutions : il est plus compliqué à écrire que pour 2×2 et on ne le donnera pas.

Ce qu'il faut retenir : si le pivot de Gauß ne fonctionne pas avec une variable, il faut essayer les autres. Soit on arrivera à une contradiction (donc pas de solution), soit on va éliminer des lignes superflues.

Index

- Argument, 26
- Bijection, bijective, 22, 26
- Bijective, bijectivité, 45
- Cercle trigonométrique, 46
- Comparaison, 33
- Composée, 20, 40
- Condition d'ordre 0,1, 2, 43
- Conditions initiales, 63
- Conjugué, 10
- Continuité, continue, 30, 39
- Croissances comparées, 35
- Croissante, décroissante, 20, 40
- Début d'un carré, 5, 7
- Dérivée seconde, 40
- Dérivées successives, 40
- Dérivable, Dérivation, Dérivabilité, Dérivée, 19, 35, 37, 38, 40, 42, 45
- Discriminant, 6
- Ensemble d'arrivée, 13
- Ensemble de définition, 13
- Equation du second degré, 5, 10, 12
- Exponentielle, 25, 34, 35
- Extrema, Extremum, 42, 44
- Fonction, 13
- Fonction C^k , 40
- Fonction affine, 14, 38
- Fonction réciproque, 23
- Fonctions usuelles, 39
- Forme exponentielle, 26
- Forme indéterminée, 34
- Fraction rationnelle, 15, 33, 63
- Graphe, 14
- Heaviside (fonction), 17, 30, 41, 52
- Imaginaire pur, 9
- Limite, 29, 30
- Limites de référence, 33
- Logarithme, 25, 34, 35
- Maximum, Minimum, 42, 43, 45
- Module, 10, 26
- Nombres complexes, 9
- Partie entière, 41
- Partie imaginaire, 9, 27
- Partie négative, 16
- Partie positive, 16, 21
- Partie réelle, 9, 27
- Pivot de Gauß, 66, 67
- Pivot de Gauß, 66
- Point critique, 44
- Polynôme, 14, 15, 23, 30
- Quotient de Newton, 37, 39
- Réciproque/inverse, 45
- Racine carrée, 11, 15, 39
- Reciproque, 45
- Sinus et Cosinus hyperboliques, 46
- Strictement croissante, décroissante, 41
- Substitution, 65, 66
- Système 2×2 , 2×3 , etc, 63, 65
- Système linéaire, 63
- Tableau de signes, 6
- Tableau de variations, 14, 21, 42, 44, 47
- Tangente, 38
- Théorème d'encadrement, 33
- Trigonométrie, 26
- Trinôme, 5
- Valeur absolue, 16, 21