

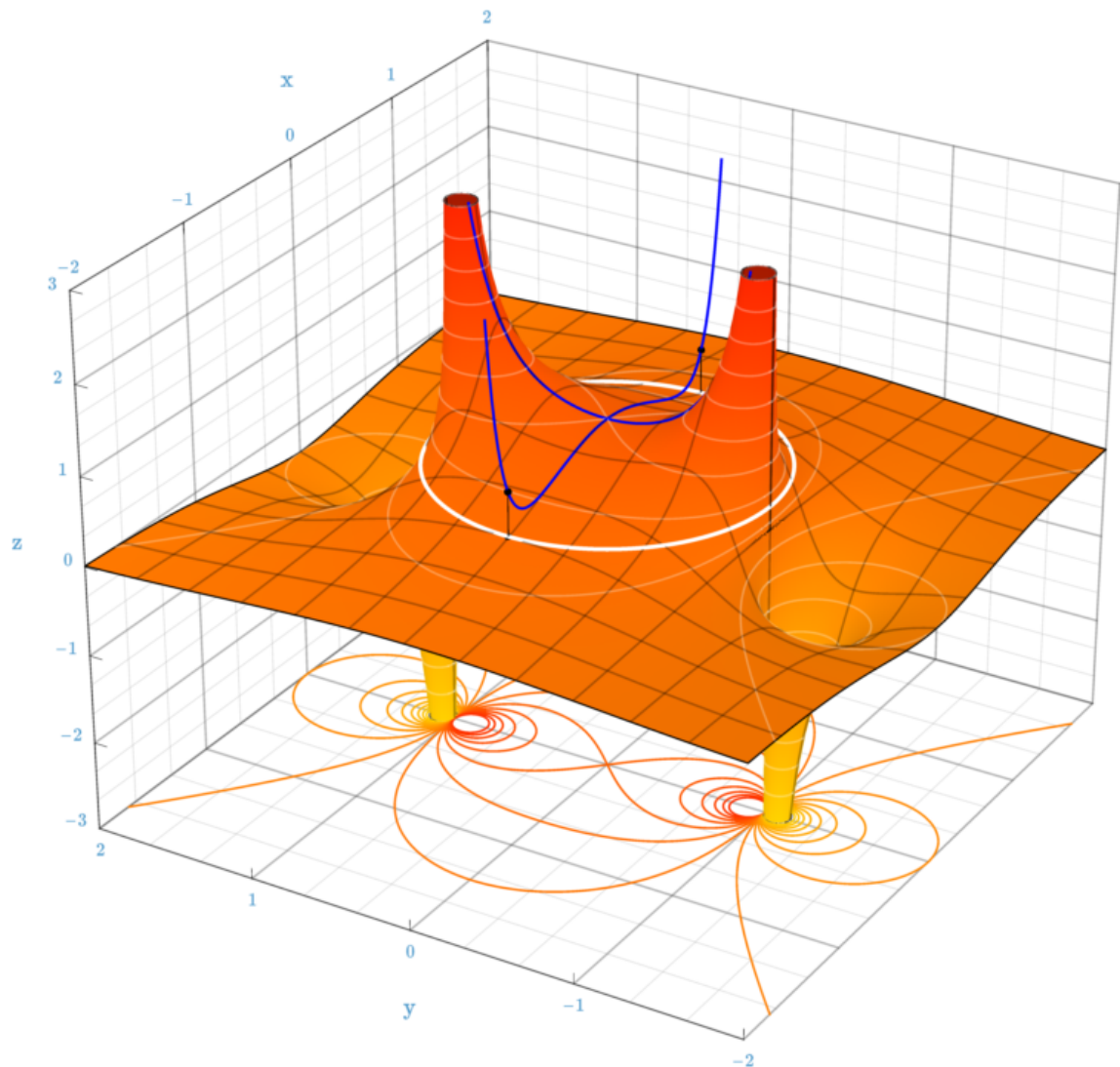


ENSEM 1A
ANALYSE COMPLEXE
2015-2016

Éléments d'Analyse Complexe

Bruno Duchesne

15 janvier 2016



1 Introduction

Le but de ce cours est de vous donner des bases d'analyse complexe qui pourront vous être utiles plus tard et surtout un bagage suffisant pour pouvoir aborder en cas de besoin des notions plus difficiles.

L'analyse complexe a de nombreuses conséquences importantes en mathématiques pures. En particulier, pour des questions qui ne font pas, a priori, appel aux nombres complexes, par exemple les nombres premiers. Hadamard (auteur du théorème des nombres premiers) a même écrit la célèbre phrase « *le plus court chemin entre des vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe* ».

Nous n'évoquerons pas ici ces conséquences et nous concentrerons plutôt sur quelques aspects physiques liés à l'analyse complexe. Les aspects topologiques qui apparaissent naturellement avec l'analyse complexe seront très peu abordés pour mettre en avant le lien entre holomorphie, harmonicité et applications conformes.

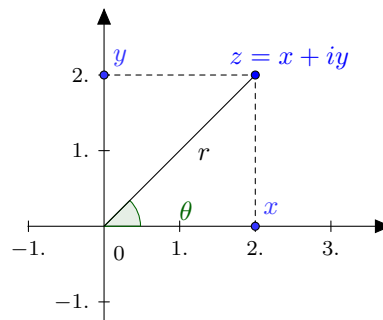
Les illustrations en trois dimensions sont dues à Sam Derbyshire et sont sous licence CC BY-SA 3.0. On pourra trouver sa galerie d'images wikipédia à l'adresse : http://en.wikipedia.org/wiki/User:Sam_Derbyshire/Gallery

2 Nombres Complexes et similitudes du plan

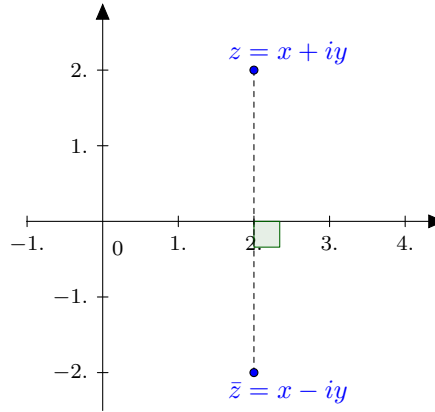
2.1 Quelques rappels sur les nombres complexes et leur interprétation dans le plan euclidien

Commençons par rappeler le vocabulaire et les propriétés de base sur les nombres complexes. Un nombre complexe z est un nombre qui s'écrit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ forme un corps pour les lois $(x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$, $(x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$ et $(x + iy)^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ (si $(x, y) \neq (0, 0)$).

Ce corps s'identifie aussi à un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 via l'application $(x, y) \mapsto x + iy$. Si $z = x + iy$ est un nombre complexe, le nombre réel $x = \Re(z)$ est la partie réelle de z et $y = \Im(z)$ est la partie imaginaire de z .



Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le nombre complexe $x - iy$ s'appelle le conjugué de z et est noté $\bar{z}$. Géométriquement, c'est le symétrique du point (x, y) par la symétrie d'axe Ox dans $\mathbb{R}^2$. Le module $|z|$ est la norme euclidienne de (x, y) ; c'est-à-dire $\sqrt{x^2 + y^2}$ et c'est aussi égal à la racine carrée de $z\bar{z}$ qui est un réel positif.



Le passage en coordonnées polaires donne l'écriture suivante : tout nombre complexe s'écrit $re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Le nombre r n'est rien d'autre que le module de z et θ est l'argument de z qui est bien défini à 2π près.

2.2 Similitudes de l'espace euclidien

Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, l'angle $\angle(u, v)$ entre deux vecteurs $u, v \neq 0$ est le nombre réel positif $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}$. L'angle entre trois points A, B, C de l'espace affine sous-jacent à E tels que $A \neq B$ et $C \neq B$ est défini comme étant $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Définition 1. Une *similitude* est une application injective de E dans E qui préserve les angles, c'est-à-dire que $g: E \rightarrow E$ est une similitude si et seulement si pour tout triplet de points distincts (A, B, C) , $\angle(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}) = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ où A', B', C' sont les images respectives de A, B, C par g .

Remarquons que les angles que l'on vient de définir sont toujours positifs et vérifient $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$. On parle alors d'*angle géométrique*. Dans le cas d'un plan euclidien orienté E , on peut tenir compte de cette orientation. Soit $A, B, C \in E$ tels que $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient non-nuls et soit $\theta \in [0, \pi]$, l'angle géométrique $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$. On définit alors l'angle orienté $\widehat{ABC}$ comme étant θ si $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est une base directe et $-\theta$ sinon. Ainsi on a $\widehat{CBA} = -\widehat{ABC} \in [-\pi, \pi]$.

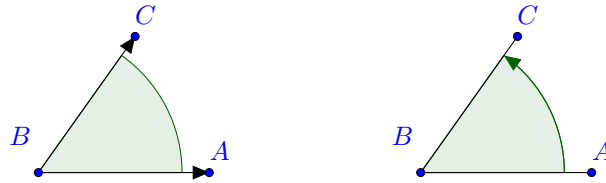


FIGURE 1 – L'angle non-orienté $\angle(BA, BC)$ et l'angle orienté $\widehat{ABC}$.

Voici quelques transformations simples de E pour lesquelles, on vérifie facilement qu'elles sont des similitudes.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'homothétie h_λ de rapport λ : $h_\lambda(u) = \lambda u$.
2. Pour $v \in E$, la translation τ_v de vecteur v : $\tau_v(u) = u + v$.
3. Une isométrie de E est une application f tel que $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$, c'est-à-dire $\|f(A) - f(B)\| = \|A - B\|$. Toutes les isométries sont des applications affines dont la partie linéaire est une isométrie linéaire (dans une base euclidienne, la matrice M représentant cette isométrie satisfait $M^t = M^{-1}$).

Le théorème suivant montre que les trois exemples ci-dessus fournissent les briques élémentaires pour former l'ensemble des similitudes de E .

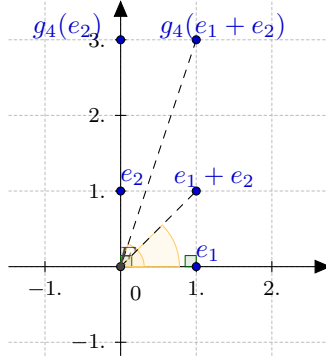
Théorème 2. *Toute similitude g s'écrit comme la composition d'une translation, une homothétie et une isométrie linéaire. En particulier, il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\|g(u)\| = \lambda\|u\|$. Ce nombre λ est appelé rapport de la similitude g .*

Les similitudes forment un sous-groupe du groupe des applications affines inversibles de E .

Démonstration. Nous donnons une preuve de ce résultat dans le cas de la dimension 2 qui sera le seul cas qui nous intéressera par la suite.

Commençons par remarquer que si g est une similitude alors g préserve les droites. En effet, la droite (AB) passant par les points A, B (distincts) est l'ensemble des C tels que $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 0$ ou π . Ainsi si $C \in (AB)$ alors $g(C) \in (g(A)g(B))$.

Nous allons effectuer des réductions successives en composant g avec les exemples précédents de similitude. Soit O l'origine de E et $\tau_{-g(O)}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{g(O)O}$ et $g_1 = \tau_{-g(O)} \circ g$. C'est une similitude telle que $g_1(O) = O$. Notons e_1, e_2 deux vecteurs formant une base orthonormée directe de E et $\lambda = \|g_1(e_1)\|$. Posons $g_2 = 1/\lambda g_1$, c'est une similitude tel que $g_2(O) = O$ et $\|g_2(e_1)\| = \|e_1\|$. Soit ρ la rotation centrée en l'origine telle que $\rho(g_2(e_1)) = e_1$ et $g_3 = \rho \circ g_2$. Maintenant g_3 est une similitude fixant O et e_1 . L'angle $\angle(\overrightarrow{Oe_1}, \overrightarrow{Og_3(e_2)}) = \angle(\overrightarrow{g_3(O)g_3(e_1)}, \overrightarrow{g_3(O)g_3(e_2)}) = \angle(\overrightarrow{Oe_1}, \overrightarrow{Og_3(e_2)})$. On sait alors qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $g_3(e_2) = \lambda e_2$. Si $\lambda > 0$, on pose $g_4 = g_3$ et sinon $g_4 = \sigma \circ g_3$. On obtient que g_4 est une similitude avec O, e_1 fixes et $g_4(e_2) = \lambda e_2$ avec $\lambda > 0$. En considérant le point $e_1 + e_2$ et la figure suivante avec les angles ci-dessous qui doivent être égaux, on obtient que $\lambda = 1$.



Montrons maintenant que g_4 est l'identité. De la même manière que pour e_2 , on montre que pour tout point $P \in (Oe_2)$, $g_4(P) = P$. En renversant les rôles de e_1 et e_2 , on obtient que la même chose est vraie pour les points $P \in (Oe_1)$. Pour le cas général, si P est un point du plan, on note P_1 et P_2 ses projetés orthogonaux sur (Oe_1) et (Oe_2) et on obtient que $g_4(P)$ est à l'intersection de la perpendiculaire à (Oe_1) passant par P_1 et la perpendiculaire à (Oe_2) passant par P_2 , c'est-à-dire $g_4(P) = P$. Au final, $g_4 = id$ et $g = \tau_{g(O)} \circ h_\lambda \circ \rho^{-1} \circ \sigma$.

Une conséquence de cette écriture de g est que g une composition d'applications affines et donc affine elle-même. Les applications affines injectives étant aussi surjectives, toutes les similitudes sont des applications affines inversibles. Il reste à vérifier que la composition de 2 similitudes est encore une similitude et l'inverse d'une similitude est aussi une similitude. Ce sont les calculs suivant pour A, B, C trois points du plan et g, h deux similitudes

$$\begin{aligned} \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) &= \angle(\overrightarrow{gg^{-1}(B)gg^{-1}(A)}, \overrightarrow{gg^{-1}(B)gg^{-1}(C)}) = \angle(\overrightarrow{g^{-1}(B)g^{-1}(A)}, \overrightarrow{g^{-1}(B)g^{-1}(C)}) \\ &= \angle(\overrightarrow{gh(B)gh(A)}, \overrightarrow{gh(B)gh(C)}) = \angle(\overrightarrow{h(B)h(A)}, \overrightarrow{h(B)h(C)}) = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}). \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des similitudes forme un sous-groupe des transformations affines inversibles. $\square$

Remarque 3. La preuve montre qu'en fait toute similitude du plan s'écrit comme la composition d'une symétrie orthogonale, d'une rotation, d'une homothétie et d'une translation.

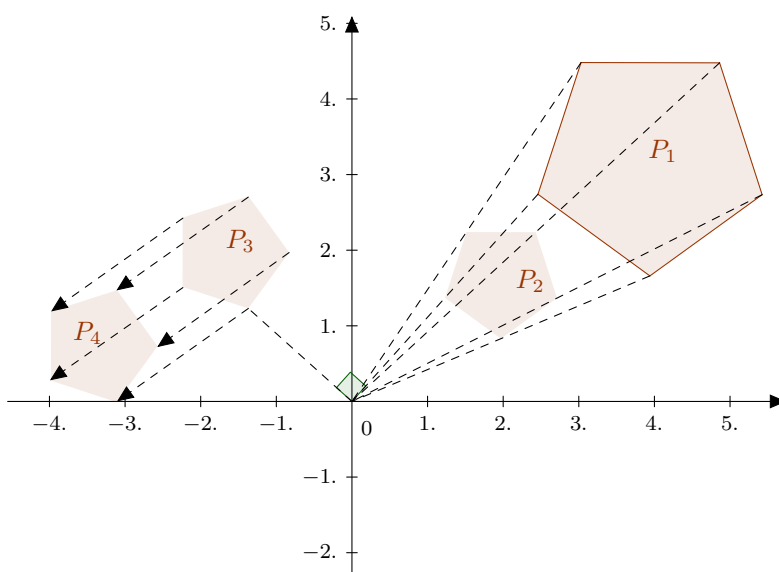


FIGURE 2 – Le polygone P_2 est l'image de P_1 par l'homothétie de centre O et de rapport $1/2$, P_3 est l'image de P_2 par la rotation d'angle $\pi/2$ et de centre O et finalement P_4 est un translaté de P_3 .

Remarque 4. La preuve pourrait s'effectuer en utilisant uniquement des angles droits. Ainsi, on pourrait définir de manière équivalente les similitudes comme les applications qui conservent l'orthogonalité.

La racine étymologique du mot similitude est le verbe latin *similare* qui signifie être semblable, se ressembler. Nous verrons un peu plus tard les termes *holomorphe* et *conforme*. Le premier vient du grec ὅλος (holos) et μορφή (-morphé) et signifie littéralement « forme entière ». Le second vient du latin conforme et signifie littéralement « avec la forme ». Les termes similitude et application conforme indique la même idée. Par contre, le terme holomorphe renvoie à l'idée que les fonctions holomorphes ressemble à des fonctions entières qui sont des fonctions données par une série entière sur tout le plan complexe.

Rappelons que dans le plan euclidien orienté, une transformation affine préserve l'orientation si le déterminant de sa partie linéaire est positif.

Définition 5. Une similitude du plan euclidien orienté est dite *directe* si elle préserve l'orientation et *indirecte* sinon.

2.3 Addition et multiplication complexes vues comme des similitudes

Les opérations élémentaires sur les nombres complexes sont l'addition d'un nombre complexe $z \mapsto z + b$, la multiplication par un nombre complexe $z \mapsto az$ et la conjugaison $z \mapsto \bar{z}$. Ce sont toutes des similitudes du plan euclidien.

Remarque 6. Une autre transformation de base pour les nombres complexes est l'inversion $z \mapsto z^{-1}$. Ce n'est pas une similitude, par exemple, par ce qu'elle n'est pas définie en 0 et n'est pas affine là elle est définie.

Lemme 7. Soient $b \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Si x et y sont les parties réelles et imaginaires de b alors la transformation $z \mapsto z + b$ est la translation de vecteur (x, y) . Si $\lambda > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ sont le module et l'argument de a alors la transformation $z \mapsto az$ est la similitude centrée en O de rapport λ et d'angle θ . La conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite Ox .

Démonstration. Si $a = \lambda e^{i\theta}$ et $z = x + iy$ alors $az = \lambda[(\cos(\theta)x - \sin(\theta)y) + i(\sin(\theta)x + \cos(\theta)y)]$, ce qui correspond à la composition de l'homothétie de centre O et de rapport λ avec la rotation

d'angle θ . Le fait qu'ajouter b correspond à une translation et que la conjugaison correspond à la symétrie d'axe Ox est immédiat dans les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^2$. $\square$

Remarque 8. La multiplication par le nombre complexe $z = a + ib = \lambda e^{i\theta}$ est donc une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $\begin{bmatrix} \lambda \cos(\theta) & -\lambda \sin(\theta) \\ \lambda \sin(\theta) & \lambda \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. Les deux colonnes de cette matrice sont donc image l'une de l'autre par la rotation d'angle $\pi/2$ puisque ce sont les images des vecteurs e_1, e_2 de la base canonique par une similitude directe.

La forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ est donc la forme générale d'une matrice de similitude directe linéaire (c'est-à-dire fixant O). Les matrices de similitude indirecte linéaire sont de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$. Par exemple, la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ de l'application $z \mapsto \bar{z}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. En effet c'est la symétrie par rapport à l'axe (Ox) .

L'addition des nombres complexes correspond alors à l'addition des matrices et la multiplication des nombres complexes à la multiplication matricielle. Ainsi l'ensemble des nombres complexes s'identifie à la sous-algèbre des matrices de similitudes directes (auxquelles on rajoute la matrice nulle) dans $M_2(\mathbb{R})$.

3 Fonctions holomorphes et différentiabilité au sens complexe

Dans ce chapitre, on introduit les fonctions holomorphes, le lien entre ce chapitre et les similitudes apparaîtra au chapitre suivant.

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, on peut penser à f comme une fonction de 2 variables et on écrira $f(z) = f(x + iy) = \tilde{f}(x, y)$ où x et y sont respectivement les parties réelles et imaginaires de z . Cette écriture est là pour marquer la différence entre f et $\tilde{f}$. La première est une fonction d'une variable complexe alors que la seconde est une fonction de deux variables réelles. En identifiant z à (x, y) , ces deux fonctions sont égales et on utilisera l'abus de notation $f(z) = f(x, y)$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1(U)$, on utilisera les notations

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y).$$

Ce sont des nombres complexes. La formule de Taylor à l'ordre 1 au point $z_0 \in U$ s'écrit alors

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)y + o(|z|)$$

où x et y sont les parties réelles et imaginaires de z .

La première idée de l'analyse complexe est de ne plus voir f comme une fonction de deux variables réelles mais comme une fonction de la variable complexe z (et de son complexe conjugué $\bar{z}$). Introduisons les notations suivantes.

Définition 9. Pour $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C})$, on pose

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1/2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1/2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Remarque 10. On peut penser à ces deux objets comme des dérivées partielles par rapport à z et $\bar{z}$ mais on prendra garde à ne pas considérer f comme une fonction de deux variables indépendantes z et $\bar{z}$. De plus, on notera bien qu'un signe moins apparaît dans $\frac{\partial f}{\partial z}$ et pas dans $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

Proposition 11. Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a les propriétés suivantes

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial(f+g)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z}, \quad \frac{\partial(\lambda f)}{\partial z} = \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

Sur l'ouvert de U où $f \circ g$ est bien définie

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial z}(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z)) \frac{\partial g}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g(z)) \frac{\partial \bar{g}}{\partial z}(z).$$

Des formules analogues existent aussi pour $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

Démonstration. On revient à la définition de $\frac{\partial f}{\partial z}$ et cela découle alors des propriétés bien connues de linéarité pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. $\square$

Proposition 12 (Formule de Taylor complexe). Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C})$ et $z_0 \in U$. Alors on a le développement limité

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\bar{z} + o(|z|).$$

De plus, cette écriture est unique.

Démonstration. Un calcul élémentaire donne l'existence de cette écriture à partir de la formule de Taylor rappelée ci-dessus. Réciproquement, l'unicité provient des formules d'inversion suivantes $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)$ et de l'unicité dans la formule de Taylor précédente. $\square$

Définition 13. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C})$. L'application f est *holomorphe* sur U si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$ pour tout $z \in U$.

Soit f une fonction holomorphe, on obtient alors comme formule de Taylor en z_0

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)z + o(|z|).$$

C'est-à-dire

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

Autrement dit, lorsque cette limite existe, on dit que f est *dérivable au sens complexe* (on dit aussi $\mathbb{C}$ -dérivable) et par analogie avec le cas réel, on note aussi $f'(z_0)$ cette limite.

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Avec cette notation, on retrouve la formule de Taylor suivante :

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + f'(z_0)z + o(|z|). \quad (1)$$

Proposition 14. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C})$. L'application f est dérivable au sens complexe en tout point de U si et seulement si f est holomorphe sur U .

Démonstration. On a vu que si f est holomorphe alors f est $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de U . Réciproquement si f est $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{C}$ -dérivable en $z_0 \in U$ alors on a la formule de Taylor $f(z_0 + z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)z + o(|z|)$, ce qui implique $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\bar{z} = o(|z|)$ et donc $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ i.e. f est holomorphe. $\square$

Dans la suite, on notera $\mathcal{H}(U)$ l'espace de fonctions holomorphes sur U .

Proposition 15. L'espace $\mathcal{H}(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{C})$.

Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$, $g \in \mathcal{H}(V)$ telle que $g(V) \subseteq U$ alors $f \circ g \in \mathcal{H}(V)$ et si f ne s'annule pas sur U alors $1/f \in \mathcal{H}(U)$.

Démonstration. Le fait que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel découle directement de la Proposition 11. Pour la stabilité par produit, si $f, g \in \mathcal{H}(U)$, on écrit les formules de Taylor

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + f'(z_0)z + o(|z|), \quad g(z_0 + z) = g(z_0) + g'(z_0)z + o(|z|)$$

que l'on multiplie pour obtenir

$$f(z_0 + z)g(z_0 + z) = f(z_0)g(z_0) + (f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0))z + o(|z|)$$

et donc $fg \in \mathcal{H}$ avec $(fg)' = f'g + fg'$.

En composant les formules de Taylor, on obtient de la même manière que pour $f \in \mathcal{H}(U)$ et $g \in \mathcal{H}(V)$ telles que $g(V) \subseteq U$, $f \circ g \in \mathcal{H}(V)$ avec $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$.

Pour le dernier point, il suffit de montrer que $z \mapsto 1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ de dérivée $z \mapsto \frac{-1}{z^2}$. Cela découle du développement limité suivant pour $z_0, z_0 + z \neq 0$

$$\frac{1}{z_0 + z} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 + \frac{z}{z_0}} = \frac{1}{z_0} \left(1 - \frac{z}{z_0} + o(|z|) \right) = \frac{1}{z_0} - \frac{z}{z_0^2} + o(|z|).$$

□

4 Applications conformes du plan et conditions de Cauchy-Riemann

On peut maintenant faire le lien entre les fonctions holomorphes et les similitudes du plan.

Définition 16. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. Une application $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ est *conforme* si sa différentielle en tout point est une similitude.

Proposition 17. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. L'application f est holomorphe si et seulement si sa différentielle en tout point est nulle ou est une similitude directe.

Démonstration. Grâce à l'Équation (1), on voit que la différentielle au point z_0 d'une application holomorphe f est la multiplication par le nombre complexe $f'(z_0)$. Ainsi, toute application holomorphe a pour différentielle une similitude ou l'application nulle (si $f'(z_0) = 0$).

Réciproquement si la différentielle de f en z_0 est une similitude directe, il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $f(z_0 + z) = f(z_0) + \alpha z + o(|z|)$. Par unicité du développement de Taylor (en $z, \bar{z}$), $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ et $\alpha = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$. □

Corollaire 18. Toute application holomorphe f est conforme partout là où $f'(z) \neq 0$.

Écrivons P et Q pour les parties réelles et imaginaires d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C})$. On alors l'écriture $f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$. La matrice de la différentielle (c'est-à-dire la jacobienne) de f en $z = x + iy$ est

$$Jf(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}.$$

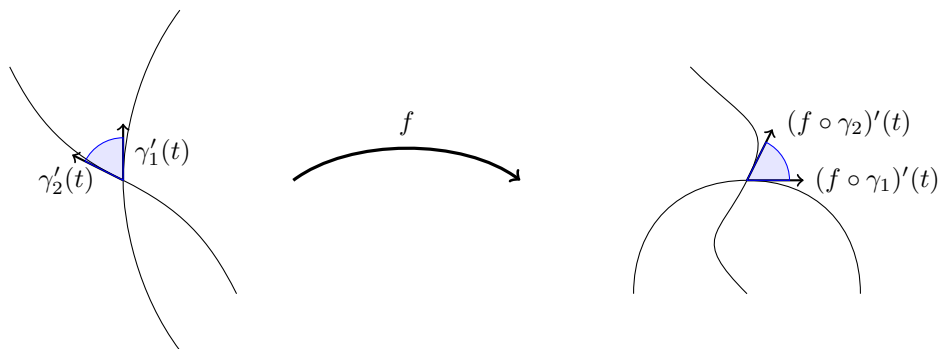
La première colonne de cette matrice correspond à $\frac{\partial f}{\partial x}$ et la seconde à $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Proposition 19 (Conditions de Cauchy-Riemann). La fonction f est holomorphe sur U si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

Démonstration. La condition $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ s'écrit $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$. En écrivant coordonnée par coordonnée cette égalité on obtient les conditions ci-dessus. Une autre manière équivalente de voir tout ça est de dire que Jf est une matrice de similitude et donc la seconde colonne est l'image par la rotation d'angle $\pi/2$ de la première (voir Remarque 8). □

Une conséquence de la Proposition 17 est que les transformations holomorphes préservent *infinitésimalement* les angles. Ainsi si γ_1 et γ_2 sont deux courbes régulières qui se rencontrent en $z = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ formant un angle $\angle(\gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2))$ alors leurs images $f \circ \gamma_i$ par une fonction holomorphe f tel que $f'(z) \neq 0$ forment un angle aussi égal à $\angle(\gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2))$.



En particulier l'image d'un quadrillage du plan par des droites verticales et horizontales et un nouveau quadrillage (courbe cette-fois) tel que l'image d'une droite verticale rencontre orthogonalement l'image de toute droite horizontale. Voir, par exemple, la Figure 4 pour le cas de l'application $z \mapsto \exp(z)$ dont nous verrons qu'elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

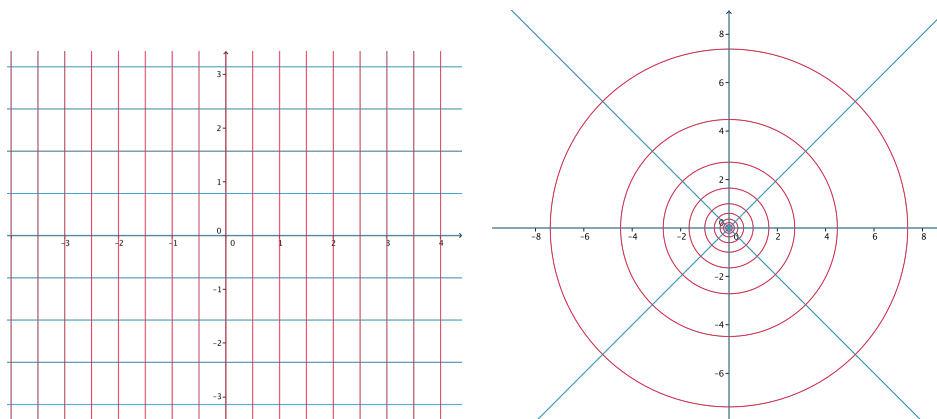


FIGURE 3 – L'image de la grille par l'application $z \mapsto \exp(z)$

5 Exemples de fonctions holomorphes

Nous avons déjà vu des fonctions holomorphes : les applications affines sur $\mathbb{C}$ $z \mapsto az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. En effet, la différentielle est la multiplication par a . En revanche l'application $z \mapsto \bar{z}$ est bien une similitude de $\mathbb{R}^2$ mais elle n'est pas directe et donc n'est pas holomorphe (on peut aussi voir directement que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1$). Par ordre de complexité, les fonctions holomorphes qui viennent ensuite sont les applications polynomiales sur $\mathbb{C}$.

Lemme 20. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ alors l'application $z \mapsto P(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.*

Démonstration. Par linéarité il suffit de voir que l'application $f: z \mapsto z^n$ est holomorphe. La formule du binôme donne $(z_0 + z)^n = z_0^n + nz_0^{n-1}z + o(|z|)$. Ainsi f est bien holomorphe de dérivée $f'(z) = nz^{n-1}$. $\square$

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe. On rappelle que le rayon de convergence de cette série est $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+, \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n < \infty\}$. Si $R > 0$, la série entière converge normalement sur le disque ouvert $D(0, r)$ pour tout $0 < r < R$. Il existe plusieurs règles pour déterminer le rayon de convergence. On rappelle uniquement la formule suivante

$$R = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}.$$

La série entière dérivée $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ a même rayon de convergence et converge donc aussi normalement sur le disque ouvert $D(0, r)$ pour tout $0 < r < R$.

Proposition 21. La série entière $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ définit une fonction holomorphe sur $B(0, R)$ de dérivée $f'(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1) a_{n+1} z^n$.

Démonstration. Soit $z_0, z \in \mathbb{C}$ tels que $|z_0| + |z| < R$. On a alors pour $z \neq 0$

$$\frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z} = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n [(z_0 + z)^n - z_0^n]}{z}$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a_n [(z_0 + z)^n - z_0^n]}{z} \rightarrow n a_n z^{n-1}$. Posons $r = R - |z_0|$ et observons que $|z| < r$. Comme on a la majoration

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n [(z_0 + z)^n - z_0^n]}{z} \right| &\leq n |a_n| |z_0|^{n-1} + \sum_{k=2}^n |a_n| \binom{n}{k} |z_0|^{n-k} r^{k-1} \\ &\leq n |a_n| |z_0|^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} |a_n| r (|z_0| + r)^{n-2} \end{aligned}$$

et les séries entières $\sum n a_n z^{n-1}$ et $\sum \frac{n(n-1)}{2} a_n z^{n-2}$ ont aussi R pour rayon de convergence. On sait alors que la série $\sum n |a_n| r^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} r (|z_0| + r)^{n-2}$ est convergente et donc on peut appliquer le théorème d'interversion somme-limite et on obtient que

$$\frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z} \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n a_n z_0^{n-1}.$$

Ce qui montre que f est holomorphe sur $D(0, R)$ et de dérivée $f'(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1) a_{n+1} z^n$. $\square$

Définition 22. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est *analytique* si pour tout $z_0 \in U$, il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R et $r \in]0, R[$ tel que $D(z_0, r) \subset U$ et $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$ pour tout $z \in D(z_0, r)$.

Proposition 23. Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique alors f est holomorphe.

Démonstration. L'holomorphie est une propriété locale et comme localement f coïncide avec une série entière sur un voisinage de $z_0 \in U$, c'est alors une conséquence de la proposition 21. $\square$

Cette dernière proposition nous fournit une large classe d'exemples de fonctions holomorphes. Par exemple, les applications $\exp, \cos, \sin, \sinh, \cosh$ sont données par des séries entières de rayon de convergence infini et donc des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ tout entier.

6 Formule de Cauchy

La formule de Cauchy est une des formules les plus importantes de l'analyse complexe. Elles possèdent de nombreuses (parfois surprenantes) applications. Elle repose sur des intégrales le long de chemins continus. Le lecteur pourra se reporter au cours MI 1 pour la notion d'intégrale le long d'un chemin. On fixe un ouvert U de $\mathbb{C}$. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ d'image Γ et f une fonction continue sur U , on notera l'intégrale de chemin

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

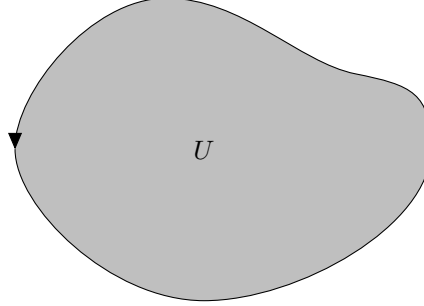
Cette définition appelle deux remarques. Tout d'abord, il s'agit d'un nombre complexe et la formule de dérivation des applications composées montre que cette formule est indépendante du choix de paramétrisation γ : deux paramétrages $\mathcal{C}^1$ -équivalents donne la même valeur à l'intégrale.

Un résultat qui sera important pour nous est la formule de Green-Riemann que nous avons vu en MI1. Rappelons que pour un ouvert U de $\mathbb{C}$ on appelle *bord* de U l'ensemble $\partial U = \bar{U} \setminus U$ où $\bar{U}$ est l'adhérence de U , c'est-à-dire que $\bar{U}$ est l'ensemble des points qui sont des limites de suites dans U . Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de $\bar{U}$, s'il existe V ouvert contenant $\bar{U}$ et $g \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{C})$ telle que f est la restriction de g sur $\bar{U}$. Voici l'énoncé que nous avons vu en MI1.

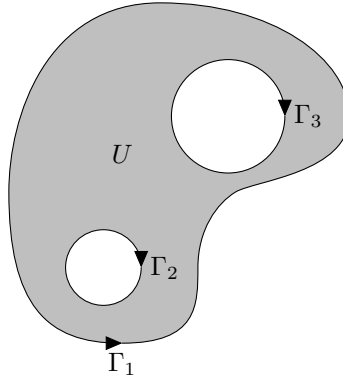
Théorème 24. Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont le bord est une courbe fermée simple Γ de classe $\mathcal{C}_m^1$. Alors pour des fonctions $R, S \in \mathcal{C}^1$ sur un voisinage de $\bar{U}$ on a

$$\int_{\Gamma} R(x, y)dx + S(x, y)dy = \iint_U \frac{\partial S}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial R}{\partial y}(x, y) dx dy.$$

Nous avons montré la formule de Green-Riemann dans le cas où U est compris entre le graphe de 2 fonctions (à la fois en x et en y).



On aura besoin de la formule de Green-Riemann pour des ouverts comme celui-ci, c'est-à-dire des ouverts bornés dont le bord est une réunion finie de courbe fermées simples $\mathcal{C}_m^1$. Dans ce cas, on dira que le bord est $\mathcal{C}_m^1$.



À partir du théorème 25, on peut démontrer l'énoncé un peu plus général suivant. Les difficultés étant uniquement techniques.

Théorème 25. Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont le bord est une réunion finie de courbes fermées simples $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$ de classe $\mathcal{C}_m^1$. Alors pour des fonctions $R, S \in \mathcal{C}^1$ sur un voisinage de $\bar{U}$ on a

$$\int_{\Gamma} R(x, y)dx + S(x, y)dy = \iint_U \frac{\partial S}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial R}{\partial y}(x, y) dx dy.$$

L'intégrale sur Γ s'écrit comme une somme d'intégrale sur chacun des Γ_i . On prêtera bien garde à l'orientation du bord! Si on munit $\mathbb{C}$ de l'orientation canonique qui correspond au sens trigonométrique, le bord de U est orienté de telle sorte qu'en le parcourant, U se trouve toujours « à gauche ».

Définition 26. Soit $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{C})$. On dit que f admet une primitive holomorphe s'il existe $f \in \mathcal{H}(U)$ telle que $f = \frac{\partial F}{\partial z}$.

Lemme 27. Soit $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{C})$ admettant une primitive holomorphe F et $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ d'image Γ . Alors

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particulier, si γ est fermé

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Démonstration.

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d(F(\gamma(t)))}{dt} dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

Théorème 28 (Théorème de Cauchy). *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{C}$ dont le bord $\Gamma = \partial U$ est de classe $\mathcal{C}_m^1$. Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\bar{U}$. Alors avec l'orientation directe du bord*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Démonstration. On définit $R(x, y) = f(x + iy)$ et $S(x, y) = if(x, y)$. La formule de Green-Riemann donne

$$\int_{\Gamma} Rdx + Sdy = \iint_U \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) dx dy.$$

En écrivant $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$, on obtient $\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} = -\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)$. Les équation de Cauchy-Riemann (2) implique que ce terme est nul et donc $\int_{\Gamma} Rdx + Sdy = 0$. Or en écrivant $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$ où chaque Γ_i est une courbe fermée simple, image d'un chemin $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de parties réelles et imaginaires γ_1 et γ_2 , on obtient

$$\int_{\Gamma_i} Rdx + Sdy = \int_{[0,1]} (f(\gamma(t))\gamma_1'(t) + if(\gamma(t))\gamma_2'(t)) dt = \int_{[0,1]} f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_{\Gamma_i} f(z)dz.$$

D'où le résultat. □

Si $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on note $C(z, r)$ pour le cercle de rayon r centré en z , $D(z, r)$ pour le disque ouvert et $\bar{D}(z, r)$ pour le disque fermé.

Théorème 29 (Formule de Cauchy). *Soit U un ouvert borné avec un bord $\mathcal{C}_m^1$, f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\bar{U}$ et $z \in U$. Alors*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Démonstration. Comme U est ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que $\bar{D}(z, r_0) \subset U$. Pour $r \in]0, r_0[$, on considère l'ouvert $U_r = U \setminus \bar{D}(z, r)$. On applique le théorème de Cauchy à U_r et à la fonction $w \mapsto \frac{f(w)}{w - z}$ qui est bien holomorphe sur un voisinage de U_r . Comme $\partial U_r = \Gamma \cup C(z, r)$, on a

$$\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw + \int_{C(z, r)^-} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0.$$

Le signe $-$ dans $C(z, r)^-$ signifie que l'on parcourt ce cercle dans le sens horaire et non trigonométrique. En notant $C(z, r)^+$ pour le même cercle parcouru dans le sens trigonométrique, on obtient

$$\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{C(z, r)^+} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Maintenant, remarquons qu'en paramétrant le cercle $C(z, r)$ par $\gamma(t) = z + re^{2i\pi t}$, on a $\int_{C(z, r)} \frac{1}{w - z} dw = \int_0^1 \frac{2i\pi r e^{2i\pi t}}{re^{2i\pi t}} dt = 2i\pi$. Ainsi

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z, r)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en z , il existe $r > 0$ tel que $|w - z| < r \implies |f(w) - f(z)| < \varepsilon$. Donc

$$\left| \int_{C(z,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \right| \leq \int_0^1 \frac{|f(z + re^{2i\pi t}) - f(z)| 2\pi r}{|z + re^{2i\pi t} - z|} dt \leq 2\pi\varepsilon.$$

Ainsi, $\int_{C(z,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \rightarrow f(z)$ quand $r \rightarrow 0$ et on a la formule attendue. $\square$

7 Égalité de la moyenne et principe du maximum

Définition 30 (Égalité de la moyenne). Soit f une fonction continue d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que f satisfait l'égalité de la moyenne si pour tout disque fermé $\overline{D}(z, r)$ inclus dans U on a

$$f(z) = \int_0^1 f(z + re^{2i\pi t}) dt.$$

Autrement dit, une fonction possède la propriété de la moyenne (satisfait l'égalité de la moyenne) si la valeur en un point $z \in U$ coïncide avec la moyenne sur un cercle centré en z et dont l'intérieur est entièrement inclus dans U .

Proposition 31. Les fonction holomorphes possèdent la propriété de la moyenne.

Démonstration. Par la formule de Cauchy, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{f(z + re^{2i\pi t})}{re^{2i\pi t}} 2i\pi re^{2i\pi t} dt = \int_0^1 f(z + re^{2i\pi t}) dt.$$

$\square$

Soit U un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, on rappelle que $z \in U$ est un maximal local s'il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset U$ et $f(z') \leq f(z)$ pour tout $z' \in D(z, r)$.

Définition 32 (Principe du maximum). Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. On dit que f satisfait le principe du maximum si

$$f \text{ admet un maximum local} \implies f \text{ est constante.}$$

Théorème 33. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Si f est une fonction holomorphe sur U alors $z \mapsto |f(z)|$ satisfait le principe du maximum.

Démonstration. Soit $z \in U$ maximum local de f . Il existe $r_0 > 0$ tel que $\overline{D}(z, r_0) \subset U$ et $|f(w)| \leq |f(z)|$ pour tout $w \in D(z, r_0)$. La formule de la moyenne pour $0 < r < r_0$ donne alors $f(z) = \int_0^1 f(z + re^{2i\pi t}) dt$ et donc

$$|f(z)| \leq \int_0^1 |f(z + re^{2i\pi t})| dt$$

et ainsi

$$\int_0^1 |f(z)| - |f(z + re^{2i\pi t})| dt \leq 0.$$

Comme $t \mapsto |f(z)| - |f(z + re^{2i\pi t})|$ est une fonction continue positive, on obtient que cette fonction est identiquement nulle. Ce qui signifie que $|f|$ est constante sur le cercle $C(z, r)$ égale à $|f(z)|$. Ainsi $|f|$ est constante sur $D(z, r_0)$ et par connexité f est constante sur U . (voir exercice 5) $\square$

8 Fonctions analytiques complexes

On a vu que les fonctions analytiques étaient toutes des fonctions holomorphes (Proposition 23). Nous allons maintenant voir que la réciproque est aussi vraie grâce à la formule de Cauchy.

Théorème 34. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$ alors f est $\mathbb{C}$ -dérivable une infinité de fois sur U et pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $z \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z, r) \subset U$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Démonstration. Le résultat suit d'une récurrence à partir de l'égalité pour $n = 1$. Par la formule de Cauchy,

$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{f(w)}{(w-z)} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} \gamma'(t) dt$. En appliquant deux fois (une pour x et une pour y) le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} \right) \gamma'(t) dt$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} \right) \gamma'(t) dt$. Ainsi

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} \right) \gamma'(t) dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.$$

□

Corollaire 35 (Inégalités de Cauchy). Sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème 34, on a

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{w \in C(z,r)} |f(w)|.$$

Démonstration. Paramétrons le cercle $C(z, r)$ par la courbe $\gamma(t) = z + re^{2i\pi t}$. On a alors

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw = \frac{n!}{2i\pi} \int_0^1 \frac{f(z + re^{2i\pi t})}{(re^{2i\pi t})^{n+1}} 2i\pi r e^{2i\pi t} dt.$$

En majorant le module de l'intégrale par l'intégrale du module, on aboutit à la majoration attendue. □

Théorème 36. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C})$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}$. La fonction f est analytique sur U si et seulement si f est holomorphe sur U .

Démonstration. Grâce à la Proposition 23, il reste à montrer que toute fonction holomorphe est analytique. Soit $z_0 \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Pour z tel que $|z - z_0| < r/3$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Développons $1/(w-z)$ en série entière :

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n.$$

Cette série est bien absolument convergente puisque $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| \leq 1/3$. En paramétrisant $C(z_0, r)$, on obtient,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 f(z_0 + re^{2i\pi t}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0 + re^{2i\pi t})^{n+1}} 2i\pi r e^{2i\pi t} dt.$$

Comme $\left| f(z_0 + re^{2i\pi t}) \frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0 + re^{2i\pi t})^{n+1}} 2i\pi r e^{2i\pi t} \right| \leq \sup_{C(z_0,r)} |f(w)| \frac{3}{2^{n+1}} 2\pi r$, on peut invoquer le théorème d'inversion somme-intégrale et on obtient

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n.$$

□

Remarque 37. La preuve montre en fait que f coïncide avec une série entière sur tout disque inclus dans U . De plus, la série entière en z_0 a un rayon de convergence au moins égal à l'inverse de la distance de z_0 au complémentaire de U .

Si f est fonction sur U , un point $z \in U$ est un zéro de f si $f(z) = 0$.

Proposition 38 (Principe des zéros isolés). *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U et $z \in U$ un zéro de f . Si f n'est pas identiquement nulle sur un voisinage de z alors il existe $r > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $D(z, r) \setminus \{z\}$.*

Démonstration. On sait qu'il existe $r_0 > 0$ tel que $f(z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (z' - z)^n$ pour $|z' - z| < r$. Si $f^{(n)}(z) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors f est nulle sur $D(z, r_0)$, ce qui est contraire à notre hypothèse. Soit n minimal tel que $f^{(n)}(z) \neq 0$. La formule de Taylor donne alors

$$f(z') = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (z' - z)^n + \varepsilon(|z' - z|)(z' - z)^n$$

avec $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$. Ainsi, il existe $r \in]0, r_0]$ tel que $\varepsilon(|z' - z|) < \frac{|f^{(n)}(z)|}{2n!}$ pour $|z' - z| < r$ et on obtient que $|f(z')| > \frac{|f^{(n)}(z)|}{2n!} |z' - z|^n$ pour $|z' - z| < r$. $\square$

9 Fonctions harmoniques

L'opérateur de Laplace, le laplacien, $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ pour une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ apparaît de manière fréquente dans des problèmes physiques qui se modélisent par des équations aux dérivées partielles avec de la diffusion. Par exemple, deux équations aux dérivées partielles très classiques sont l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f$$

et l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f.$$

Une autre équation particulièrement intéressante est l'équation de Laplace

$$\Delta f = 0.$$

C'est l'équation de la chaleur en régime stationnaire.

Définition 39. Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{C})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est harmonique si $\Delta f = 0$ en tout point de U .

Voyons maintenant le lien avec les fonctions holomorphes. Les deux lemmes suivants font l'objet de l'exercice 12.

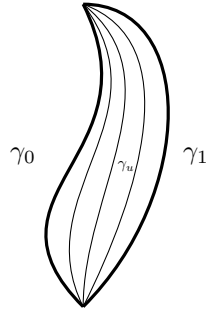
Lemme 40. Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{C})$. Alors

$$\Delta f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

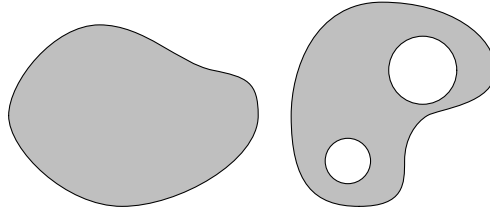
Lemme 41. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors $f, \bar{f}$ sont harmoniques et donc $\Re(f), \Im(f)$ aussi.

Définition 42. Un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est simplement connexe, si pour tous chemins continus $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$, il existe $c : [0, 1]^2 \rightarrow U$ continu tel que $c(0, t) = \gamma_0(t)$ et $c(1, t) = \gamma_1(t)$ pour tout t .

Cette définition signifie que tout chemin peut se déformer continûment en un autre chemin tout en restant dans U . Voici un exemple où γ_0 et γ_1 ont des extrémités communes et $\gamma_u(t) = c(u, t)$.



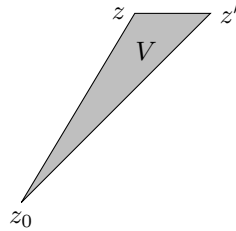
Le fait qu'un ouvert soit simplement connexe signifie concrètement qu'il est en un seul morceau et n'a pas de « trou ». Par exemple l'ouvert de gauche est simplement connexe alors que celui de droite ne l'est pas.



Théorème 43. Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. La fonction f est harmonique si et seulement si f est la partie réelle d'une fonction holomorphe F sur U .

Démonstration. On donne la preuve dans le cas où U est un disque. Cette hypothèse simplifie la preuve en la rendant moins technique, ne fait pas ressortir l'hypothèse de simple connexité mais repose sur la même méthode.

Par le Lemme 41, on sait que la partie réelle d'une holomorphe est harmonique. Réciproquement, soit f harmonique réelle sur U . On fixe $z_0 \in U$ et pour $z = x + iy \in U$, on définit $g(x, y) = \int_{[z_0, z]} -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy$. Soit $z' \in U$ et V l'ouvert dont le bord est $\Gamma = [z_0, z'] \cup [z', z] \cup [z', z_0]$. On est alors dans la situation suivante



La formule de Green-Riemann donne alors $\int_{\Gamma} -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy = \iint_V \Delta f dx dy = 0$ et ainsi on obtient

$$g(z') - g(z) = \int_{[z, z']} -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy.$$

Par exemple, si $z' = z + h$ avec $h \in \mathbb{R}$ on obtient

$$g(z + h) - g(z) = \int_0^h -\frac{\partial f}{\partial y}(x + t, y) dt.$$

Ce qui montre que g admet une dérivée partielle continue en la première variable x et que $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$. De même (en considérant $z' = z + ih$ avec h réel), on montre que $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$. Ainsi, en posant $F = f + ig$, $F \in \mathcal{C}^1(U)$, F vérifie les équations de Cauchy-Riemann et a f pour partie réelle. $\square$

Corollaire 44. Les fonctions harmoniques réelles satisfont l'égalité de la moyenne.

Démonstration. Une fonction harmonique f est la partie réelle d'une fonction holomorphe F sur un ouvert U . Ainsi pour $z \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z, r) \subset U$, on a

$$f(z) = \Re(F(z)) = \Re\left(\int_0^{2\pi} F(z + re^{it}) dt\right) = \int_0^{2\pi} \Re(F(z + re^{it})) dt = \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt.$$

□

Corollaire 45. *Les fonctions harmoniques réelles satisfont le principe du maximum.*

Démonstration. La preuve est identique à celle du Théorème 33. Le point clé étant que les fonctions harmoniques vérifient l'égalité de la moyenne. □

10 Fonctions méromorphes

Définition 46. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On dit que φ est *méromorphe* si pour tout point $z \in U$, il existe $r > 0$ et $f, g \in \mathcal{H}(D(z, r))$ tels que $\varphi(w) = f(w)/g(w)$ pour tout $w \in D(z, r) \cap U$. Si $g(z) = 0$ alors on dit que z est un *pôle* de φ et par convention $\varphi(z) = \infty$. On note $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U .

Remarque 47. Le terme *méromorphe* vient du grec μέρος (partie) et μορφή (-morphe), et signifie littéralement « forme partielle ». L'idée derrière ce nom est que les fonctions méromorphes sont aux fonctions holomorphes, ce que les fractions rationnelles sont aux polynômes.

Proposition 48. *Soit $f \in \mathcal{M}(U)$, les pôles de f forment un ensemble de points isolés.*

Démonstration. Soit z_0 un pôle de f . On sait par définition, qu'il existe $r > 0$ et $g, h \in \mathcal{H}(U)$ tel que $|z - z_0| < r$ implique $f(z) = g(z)/h(z)$. Maintenant, un pôle de f dans $C(z_0, r)$ est un zéro de h et par la Proposition 38, il existe $0 < r' < r$ tel que $D(z_0, r')$ ne contient pas de zéro de h et donc pas de pôle de f . □

Proposition 49 (Développement en série de Laurent). *Soit $f \in \mathcal{M}(U)$. Alors pour tout $z_0 \in U$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $(a_n)_{n \geq m}$ avec $a_n \in \mathbb{C}$ et $a_m \neq 0$, et $r > 0$ tel que*

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Pour $z \in D(z_0, r) \cap U$. De plus, un tel développement est unique et la fonction f est holomorphe au voisinage de z_0 si et seulement si $m \geq 0$.

Démonstration. On sait qu'au voisinage de $z_0 \in U$, f s'écrit g/h avec $g, h \in \mathcal{H}(C(z_0, r))$ pour $r > 0$ assez petit. Écrivons les développements en série entière de g et h au voisinage de z_0 , $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n (z - z_0)^n$ et $h(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z - z_0)^n$. Soit $l = \min\{n \in \mathbb{N}, c_n \neq 0\}$ et écrivons $h(z) = c_l (z - z_0)^l \left(1 + \sum_{n>0} \frac{c_{n+l}}{c_l} (z - z_0)^n\right)$. Comme $\left(1 + \sum_{n>0} \frac{c_{n+l}}{c_l} (z - z_0)^n\right)$ ne s'annule pas sur un voisinage de z_0 , l'application $z \mapsto \left(1 + \sum_{n>0} \frac{c_{n+l}}{c_l} (z - z_0)^n\right)^{-1}$ est holomorphe sur un voisinage de z_0 et ainsi

$$f(z) = \frac{1}{c_l (z - z_0)^l} g(z) \left(1 + \sum_{n>0} \frac{c_{n+l}}{c_l} (z - z_0)^n\right)^{-1}.$$

Si on appelle d_n les coefficients dans le développement en série entière de la fonction holomorphe $z \mapsto g(z) \left(1 + \sum_{n>0} \frac{c_{n+l}}{c_l} (z - z_0)^n\right)^{-1}$, on obtient

$$f(z) = \frac{\sum_{n \geq k} d_n (z - z_0)^n}{c_l (z - z_0)^l}.$$

avec $k = \min\{n \in \mathbb{N}, b_n \neq 0\}$. Finalement, en posant $a_n = \frac{d_{n-k}}{c_l}$ et $m = l - k$, on obtient

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

L'unicité de ce développement découle directement de l'unicité de l'unicité du développement en série entière de la fonction holomorphe $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ au voisinage de z_0 . Si f est holomorphe en z_0 alors elle admet un développement en série entière et donc $m \geq 0$. La réciproque découle de la Proposition 21. $\square$

Remarque 50. Un tel développement de f sous forme d'une série avec des puissances négatives (plus généralement de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$) s'appelle un *développement en série de Laurent*. Dans la proposition précédente, si $m < 0$ est dit que z_0 est un pôle d'ordre m .

Définition 51. Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert U et $z_0 \in U$ un pôle de f avec un développement en série de Laurent $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. On appelle *résidu* de f en z_0 le coefficient a_{-1} . On le note parfois $\text{Res}(f, z_0)$.

Exemple 52. L'homographie $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un unique pôle en $-d/c$ pour $c \neq 0$. De plus le résidu en ce pôle est $\frac{bc-ad}{c^2}$. En effet,

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}.$$

L'application $z \mapsto \exp(\frac{1}{z})$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais pas méromorphe car $\exp(\frac{1}{z}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n! z^n}$. En effet, si cette application était méromorphe, on devrait avoir un coefficient nul devant $\frac{1}{z^n}$ pour n assez grand.

Proposition 53. Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert U et $z_0 \in U$ un pôle de f . Alors pour $r > 0$ suffisamment petit, on a

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(r, z_0)} f(z) dz.$$

Démonstration. Il existe $R > 0$ tel que sur $D(z_0, R)$, on a le développement en série de Laurent

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n \geq m, n \neq -1} a_n (z - z_0)^n.$$

Posons $g(z) = \sum_{n \geq m, n \neq -1} a_n (z - z_0)^n$. La fonction g est holomorphe sur une couronne $D(z_0, r_1) \setminus \overline{D}(z_0, r_2)$ pour tout r_1, r_2 tels que $R > r_1 > r_2 > 0$. Maintenant, g possède une primitive holomorphe sur cette couronne donnée par la formule $z \mapsto \sum_{n \geq m, n \neq -1} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$. Pour $r \in]r_2, r_1[$,

$$\int_{C(z_0, r)} f(z) dz = \int_{C(z_0, r)} \frac{a_{-1}}{z - z_0} dz + \int_{C(z_0, r)} g(z) dz.$$

Par le Lemme 27, $\int_{C(z_0, r)} g(z) dz = 0$ et par un calcul analogue à celui de la preuve de la formule de Cauchy, on obtient $\int_{C(z_0, r)} \frac{a_{-1}}{z - z_0} dz = 2i\pi a_{-1}$. $\square$

11 Théorème des résidus

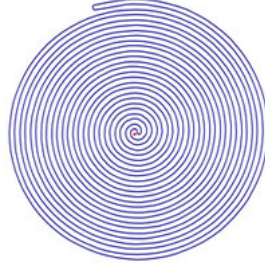
11.1 Énoncé du théorème

Voici un théorème intuitif que nous démontrerons pas.

Théorème 54 (Théorème de Jordan). Soit Γ une courbe fermée simple de $\mathbb{C}$. Alors le complémentaire de Γ possède deux composantes connexes, l'une bornée et l'autre non.

Cela signifie qu'une courbe fermée sépare le plan en deux morceaux, l'intérieur et l'extérieur de la courbe.

Remarque 55. L'exemple ci-dessous montre que finalement, ce n'est pas si intuitif que ça. On appellera *intérieur* de Γ , la composante connexe bornée du complémentaire. Le point rouge est-il à l'intérieur ou à l'extérieur de Γ ?



On rappelle qu'un ouvert U de $\mathbb{C}$ est simplement connexe si l'on peut déformer continûment un chemin de U en un autre en restant dans U . Intuitivement cela signifie que U n'a pas de trou (voir la définition 42).

Théorème 56 (Formule des résidus). *Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(U)$ et Γ une courbe fermée simple $\mathcal{C}_m^1$ incluse dans U ne contenant pas de pôle de f . Si P est l'ensemble des pôles de f inclus dans l'intérieur de Γ , on a*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{z \in P} \text{Res}(f, z).$$

Démonstration. Soit I l'intérieur de Γ . Comme $\bar{I}$ est compact, P qui est discret dans I est fini. On peut énumérer $P = \{z_1, \dots, z_n\}$ et trouver $r > 0$ tel que $\bar{D}(z_i, r) \subset I$ et les $D(z_i, r)$ sont 2-à-2 disjoints. La fonction f est holomorphe sur un voisinage de $V = I \setminus (\bar{D}(z_1, r) \cup \dots \cup \bar{D}(z_n, r))$ et la formule de Cauchy donne

$$\int_{\partial V} f(z) dz = 0.$$

Comme $\partial V = \Gamma \cup C(z_1, r) \cup \dots \cup C(z_n, r)$. On a

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{C(z_j, r)} f(z) dz = \sum_{j=1}^n 2i\pi \text{Res}(f, z_j).$$

La dernière égalité résultant de la Proposition 53 (quitte à prendre r encore un peu plus petit). $\square$

Remarque 57. Il existe une formule des résidus plus générale pour des courbes non nécessairement simples. En découpant une courbe non simple en parties simples, on peut retrouver la formule générale à partir de notre formule plus simple. Dans la pratique, c'est la formule simple qui est utile.

La formule générale fait intervenir l'*indice* d'un point par rapport à une courbe qui est intuitivement le nombre de fois (avec orientation) que la courbe s'enroule autour du point. Cette notion d'indice permet de montrer le théorème de Jordan, par exemple.

11.2 Calcul pratique d'un résidu

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe sur U avec un pôle en $a \in U$.

Le cas le plus simple est celui d'un pôle simple (d'ordre 1). Alors, on sait dans ce cas que $f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$ sur un voisinage de a avec g holomorphe sur ce voisinage (et non-nul en a). Le résidu en a est alors $g(a)$ qui peut s'obtenir le passage à la limite suivant

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z).$$

Exemple 58. La fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z^2 + a^2}$ possède deux pôles qui sont $\pm ia$ et on a $\text{Res}(\frac{1}{z^2 + a^2}, ia) = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{z + ia} = \frac{1}{2ia}$ et $\text{Res}(\frac{1}{z^2 + a^2}, -ia) = \lim_{z \rightarrow -ia} \frac{1}{z - ia} = \frac{1}{-2ia}$.

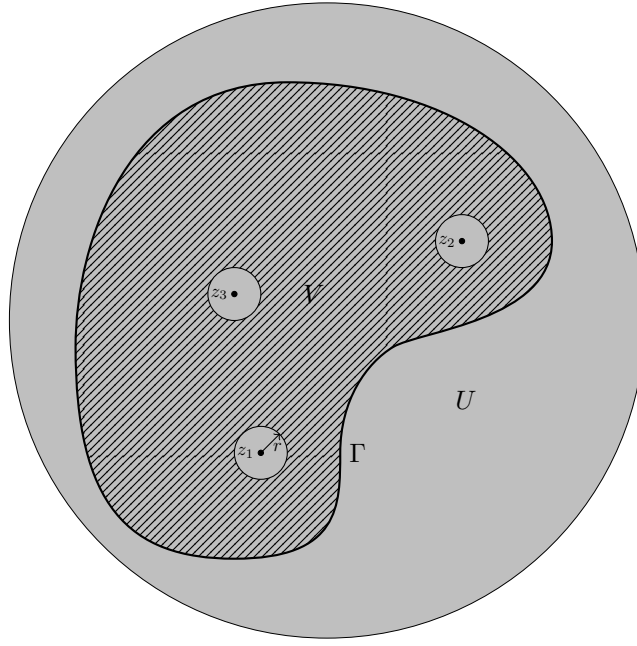


FIGURE 4 – Illustration de la preuve du théorème des résidus avec trois pôles.

Dans le cas d'un pôle simple, on peut aussi calculer le résidu de la manière suivante. Si $f(z) = h(z)/g(z)$ avec $h(a) \neq 0$ alors

$$\text{Res}(f, a) = \frac{h(a)}{g'(a)}.$$

Plus généralement, si a est un pôle d'ordre $m > 1$ alors $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ avec g holomorphe sur un voisinage de a et $g(a) \neq 0$. En écrivant le développement en série entière de g en a , $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$, par unicité du développement en série de Laurent, on obtient

$$\text{Res}(f, a) = b_{m-1} = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

12 Application de la formule des résidus au calcul d'intégrales

On donne ici quelques exemples classiques de calcul d'intégrales à l'aide de la formule des résidus. Il existe bien d'autres exemples avec des choix de *contours* (chemin fermé d'intégration) plus ou moins astucieux.

12.1 Intégrale d'une fraction rationnelle sans pôle réel

Soit P, Q deux polynômes tels que $d^\circ Q - d^\circ P \geq 2$. Dans la pratique, les polynômes seront réels mais les calculs marchent de la même manière pour les polynômes complexes. On suppose que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et on souhaite calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt$. Remarquons que la condition sur les degrés montre que l'intégrale est bien convergente.

On utilise le contour suivant pour $R > 0$ où Γ_R est le demi-cercle de rayon R situé dans le demi-plan supérieur $P^+ = \{z, \Im(z) > 0\}$ et parcouru dans le sens horaire.

Les pôles de $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ sont en nombre fini puisque ce sont les zéros de Q . On choisit R plus grand que le plus grand module d'un pôle. Alors en notant $\mathcal{P}^+$ l'ensemble des pôles dans le demi-plan P^+ , la formule des résidus donne

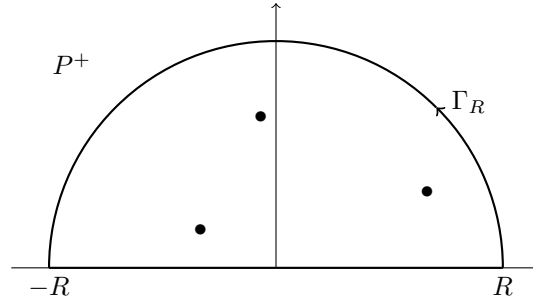


FIGURE 5 – Contour d'intégration pour une fraction rationnelle P/Q .

$$\int_{-R}^R \frac{P(t)}{Q(t)} dt + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2i\pi \sum_{z \in \mathcal{P}^+} \text{Res}(P/Q, z).$$

Or $\int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_0^\pi \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} iRe^{i\theta} d\theta$ et comme $\left| \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} \right| = O(1/R^2)$, cette intégrale converge vers 0 et on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt = 2i\pi \sum_{z \in \mathcal{P}^+} \text{Res}(P/Q, z).$$

Exemple 59. Avec le calcul de résidu de la partie précédente, on obtient pour $a > 0$

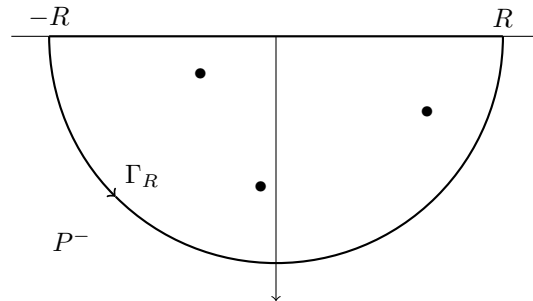
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = 2i\pi \text{Res} \left(\frac{1}{z^2 + a^2}, ia \right) = \frac{2i\pi}{2ia} = \frac{\pi}{a}.$$

12.2 Intégrales de Fourier

Pour une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable, la transformée de Fourier de f est donnée par la formule

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt.$$

Ce qui après changement de variable $x = -2\pi\nu$ revient à calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt$. Lorsque f est la restriction d'une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ sans pôle sur $\mathbb{R}$, on peut calculer cette intégrale de Fourier grâce à la formule des résidus appliquée à la fonction $z \mapsto f(z) e^{izx}$. Pour $x > 0$ on utilisera un contour identique à celui de la Figure 5. Dans le cas où $x < 0$, on utilise le contour suivant.



Avec le théorème des résidus et un lemme de Jordan (voir Exercice 26) dans le cas où $f(z) \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow \infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) e^{ixt} dt = \pm 2i\pi \sum_{z \in \mathcal{P}^\pm} \text{Res}(f(z) e^{iz}, z).$$

Exemple 60. On cherche, pour $k \in \mathbb{R}$ à calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 + a^2} dx.$$

On remarque que c'est la partie réelle de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx)}{x^2 + a^2} dx$. Comme cette dernière a une partie imaginaire nulle ($x \mapsto \frac{\sin(kx)}{x^2 + a^2}$ est impaire), on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 + a^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx)}{x^2 + a^2} dx.$$

Comme $z \mapsto \frac{\exp(ikz)}{z^2 + a^2}$ a des pôles simples en $\pm ia$, on obtient pour $k > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx)}{x^2 + a^2} dx = 2i\pi \operatorname{Res} \left(\frac{\exp(ikz)}{z^2 + a^2}, ia \right) = \frac{\pi}{a} e^{-ka}$$

et pour $k < 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx)}{x^2 + a^2} dx = -2i\pi \operatorname{Res} \left(\frac{\exp(ikz)}{z^2 + a^2}, ia \right) = \frac{\pi}{a} e^{ka}$$

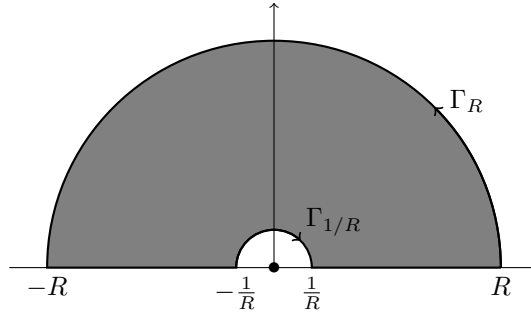
Ainsi pour $k \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-|k|a}.$$

12.3 Intégrale du sinus cardioïde

La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0 en prenant la valeur 1 en 0. La fonction prolongée n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ mais la limite $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(x)}{x} dx$ existe. Nous allons calculer cette intégrale impropre grâce à la formule des résidus. Pour on considère la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, $z \mapsto e^{iz}/z$ dont la partie imaginaire sur l'axe réel est exactement $x \mapsto \sin(x)/x$.

La fonction $z \mapsto e^{iz}/z$ possède un unique pôle en 0. On utilise le contour suivant.



Le théorème de Cauchy pour le domaine grisé donne

$$\int_{-R}^{-1/R} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\Gamma_{1/R}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{1/R}^R \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Par un lemme de Jordan (Exercice 26) on sait que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$. De plus, $\int_{-R}^{-1/R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{1/R}^R \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$. Il reste à comprendre $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{1/R}} \frac{e^{iz}}{z} dz$.

En paramétrant cette dernière intégrale, on obtient

$$\int_{\Gamma_{1/R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi \frac{e^{i \frac{e^{i\theta}}{R}}}{R e^{i\theta}} R i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi e^{i \frac{e^{i\theta}}{R}} d\theta.$$

Comme $|e^{i\frac{e^{i\theta}}{R}}| \leq e$ pour $R > 1$ et $e^{i\frac{e^{i\theta}}{R}} \rightarrow 1$ quand $R \rightarrow \infty$, le théorème de convergence dominée s'applique et on obtient

$$i \int_0^\pi e^{i\frac{e^{i\theta}}{R}} d\theta \rightarrow i\pi.$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi$ et

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi.$$

13 Théorème de l'application conforme de Riemann et conséquences

13.1 Énoncé du théorème

Définition 61. Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. On dit que U et V sont *biholomorphes* s'il existe deux applications holomorphes $\phi: U \rightarrow V$ et $\psi: V \rightarrow U$ inverses l'une de l'autre.

Théorème 62 (Théorème de l'application conforme de Riemann). *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ simplement connexe et différent de $\mathbb{C}$ tout entier. Alors U est biholomorphe au disque unité $D(0, 1)$*

Ce théorème a pour conséquence pratique la chose suivante. Si on cherche les fonctions harmoniques (ou les solutions d'une équation qui fait intervenir le laplacien) f sur un ouvert U alors si $\phi: D(0, 1) \rightarrow U$ est un biholomorphisme alors $f \circ \phi$ est une fonction harmonique. En effet, localement f est la partie réelle d'une fonction holomorphe ψ et donc $f \circ \phi$ est la partie réelle de $\psi \circ \phi$.

L'avantage c'est que l'on peut utiliser la géométrie du disque pour calculer les fonctions harmoniques répondant au problème (par exemple si elles sont radiales). On pourra consulter l'Exercice 28 pour avoir un exemple.

13.2 Exemples d'applications

13.2.1 Surfaces minimales

Voici une définition intuitive de ce que sont les surfaces minimales

Définition 63. Les surfaces minimales sont les surfaces d'aire minimale pour un contour donné.

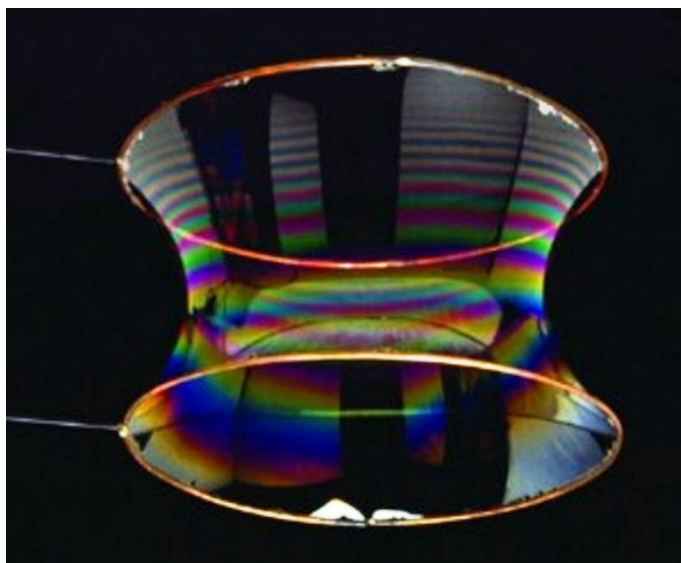


FIGURE 6 – Ce film de savon est une surface minimale sur le contour constitué des deux cercles.

Le lien entre les surfaces minimales est donné par la paramétrisation d'Enneper-Weierstrass. La formule n'est pas particulièrement intéressante en elle-même, ce qui est important c'est qu'elle dépend d'une fonction holomorphe et d'une fonction méromorphe.

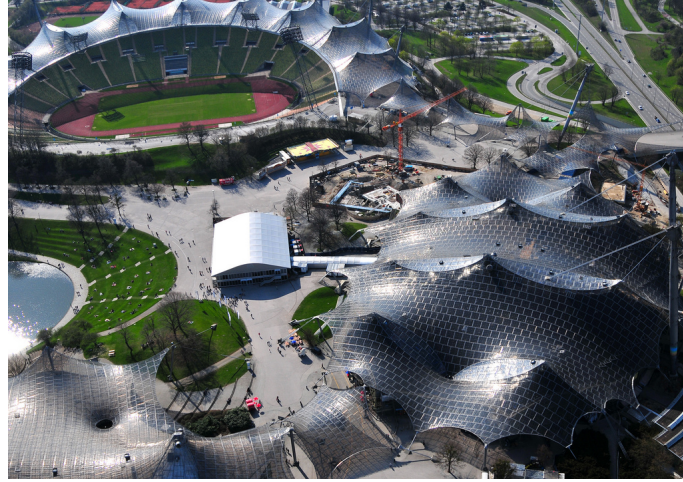


FIGURE 7 – Le toit du stade olympique de Munich est constitué de surfaces minimales.

13.2.2 Écoulement fluide irrotationnel incompressible

Soit v le champ des vitesses alors $\text{rot}(v) = 0$ donc il existe ϕ tel que $v = \nabla\phi$. De plus $\text{div}(v) = 0$ donc $\Delta\phi = 0$. Ainsi, ϕ est harmonique et c'est la partie réelle d'une fonction holomorphe f !

Si on remplace ϕ par $\phi \circ g$ avec g conforme alors on a toujours une application harmonique. En choisissant bien g , on peut simplifier le problème.

Par exemple, avec l'application $\phi: z \mapsto \exp(\alpha/2\pi \ln(z))$, on peut calculer l'écoulement fluide dans un coin d'angle α . Voir la Figure 13.2.2

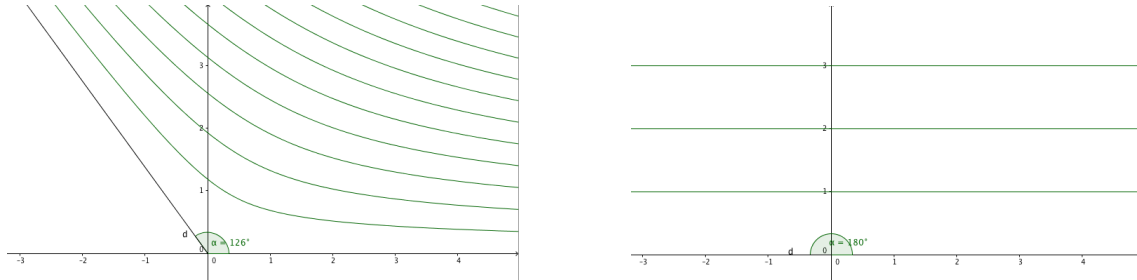


FIGURE 8 – Écoulement dans un coin calculé à partir d'un écoulement le long d'une droite.

Un autre exemple est donné par la transformation de Joukowski $z \mapsto z + 1/z$ qui permet de calculer l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion à partir de l'écoulement autour d'un cercle. Voir la figure 13.2.2

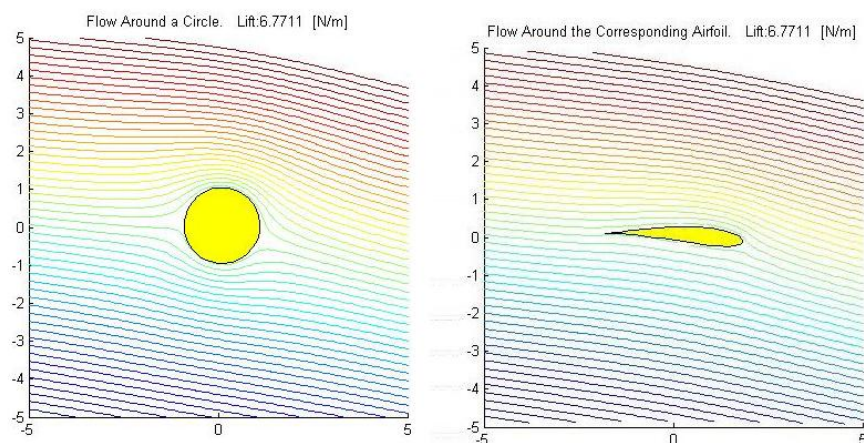


FIGURE 9 – Transformation de Joukowski pour calculer l'écoulement autour d'un profil d'aile d'avion.

14 Exercices

Exercice 1. Trouver les nombres complexes a et b donnés par le Lemme 7 pour exprimer la similitude directe de la Figure 2. Que se passe-t-il si on effectue la translation avant la rotation et l'homothétie ?

Exercice 2. Démontrer la formule pour $\frac{\partial(f \circ g)}{\partial z}$ dans la Proposition 11 et découvrir celle qui donne $\frac{\partial(f \circ g)}{\partial \bar{z}}$. On utilisera les développements de Taylor à l'ordre 1 en $z, \bar{z}$ de f et g .

Exercice 3. Les applications $z \mapsto z^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto |z|$ sont-elles holomorphes ? Sont-elles conformes ?

Exercice 4. Ecrire la condition d'holomorphic $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ en coordonnées polaires. Pour cela on notera $f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$ et on fera le changement de variables $\tilde{P}(r, \theta) = P(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ et $\tilde{Q}(r, \theta) = Q(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. On donnera une formule analogue aux conditions de Cauchy-Riemann pour les dérivées partielles de $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$.

Exercice 5. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$. On suppose que l'une des conditions suivantes est vérifiée

- $\Re(f)$ est une fonction constante.
- $\Im(f)$ est une fonction constante.
- $|f|$ est une fonction constante.
- $\bar{f}$ est holomorphe.

Montrer que f est constante.

Exercice 6. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Existe-t-il des fonctions holomorphes $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $f(z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$?

Exercice 7. Tracer l'image de la grille donnée par les droites verticales et horizontales à coordonnées entières par l'application $z \mapsto z^2$. Faire de même pour la grille constituée des droites horizontales d'ordonnées $k\pi/3$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et les droites verticales d'abscisse entier. On hachurera l'image d'une bande verticale et d'une bande horizontale dans les 2 cas. Comment se voit le fait que ce sont des applications conformes ?

Exercice 8. Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{H}(U)$ de partie réelle P . Montrer que la partie imaginaire de f est déterminée à une constante près par la donnée de P . On retrouvera $Q = \Im(f)$ à partir de P .

Exercice 9. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$ telle que $f'(z) \neq 0$ pour un $z \in U$. Montrer que f est inversible au voisinage $U' \subset U$ de z et que $f^{-1}: f(U') \rightarrow U'$ est holomorphe. Que vaut $(f^{-1})'(w)$ pour $w \in f(U')$. On utilisera le théorème d'inversion locale.

Exercice 10. La transformée de Cayley est définie par $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ pour z dans le demi-plan supérieur P défini par $\Im(z) > 0$.

1. Montrer que f est holomorphe.
2. Montrer que l'image de f est le disque unité ouvert $D = D(0, 1)$.
3. Montrer que $f: P \rightarrow D$ est inversible, expliciter son inverse et montrer que cet inverse est aussi holomorphe.

Exercice 11. Montrer que toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{H}(U)$ possède localement une primitive holomorphe. C'est-à-dire que pour tout $z \in U$, il existe $r > 0$ et $F \in \mathcal{H}(D(z, r))$ telle que $F' = f$.

Exercice 12. Démontrer les lemmes 40 et 41. En déduire que les fonctions harmoniques sont automatiquement $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 13. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Calculer $\Delta|f|^2$ en fonction de f' .

Exercice 14 (Théorème de dérivation sous le signe intégral pour les fonctions holomorphes). Démontrer le théorème suivant.

Soit I un intervalle réel, U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f: U \times I \rightarrow \mathbb{C}$ une application qui vérifie les hypothèses suivantes :

- $\forall t \in I$, l'application $z \mapsto f(z, t)$ est holomorphe sur U ,
- $\forall z \in U$, $t \mapsto f(z, t)$ est continue par morceaux,
- $\forall z_0 \in U$, $\exists r > 0$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable tels que pour tout $t \in I$, $z \in D(z_0, r)$, $\left| \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) \right| \leq g(t)$.

Alors l'application φ donnée par $\varphi(z) = \int_I f(z, t) dt$ est holomorphe sur U .

En déduire les deux énoncés suivants :

1. Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ admettant un ordre exponentiel fini. Soit p_f l'abscisse de convergence de la transformée de Laplace F de f . Montrer que F est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > p_f\}$.
2. L'application d'erreur $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-w^2} dw$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 15. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $z_0 \in U$ tel que $f'(z_0) = 0$ et $f''(z_0) \neq 0$. Donner un développement limité de f au voisinage de z_0 . Donner l'allure des lignes de niveaux des parties réelles et imaginaires de f au voisinage de $f(z_0)$ et donner une esquisse du graphe de $\Re(f)$ au voisinage de z_0 .

Exercice 16. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur U . On suppose que (f_n) converge vers une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ de manière uniforme sur tout compact $K \subset U$. Démontrer que f est en fait holomorphe. Comparer avec le cas réel (on donnera un exemple de suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec une limite qui est une fonction non dérivable).

Exercice 17. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z \in U$ et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{z_0\})$. On suppose que f est bornée au voisinage de z_0 . Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe sur U tout entier. On suivra la méthode suivante. Soit $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_{C(z_0, \rho)} \frac{f(w)}{w - z_0} dw$ ne dépend pas de ρ pour $\rho \in]0, r[$. Si f est la restriction d'une fonction holomorphe, que vaut cette intégrale? Prolonger alors f en z de manière judicieuse (on notera aussi f le prolongement).
2. Pour $z \in D(z_0, r/2)$, montrer que l'intégrale $\int_{C(z, \rho)} \frac{f(w)}{w - z} dw$ ne dépend pas de ρ pour $\rho \in]0, r/2[$.
3. A l'aide de ce qui précède, donner une formule intégrale pour $f(z)$ quand $z \in D(z_0, r/2)$. L'intégrale sera sur un certain cercle de rayon $r/2$.
4. Montrer avec cette formule intégrale que f est bien holomorphe sur U .

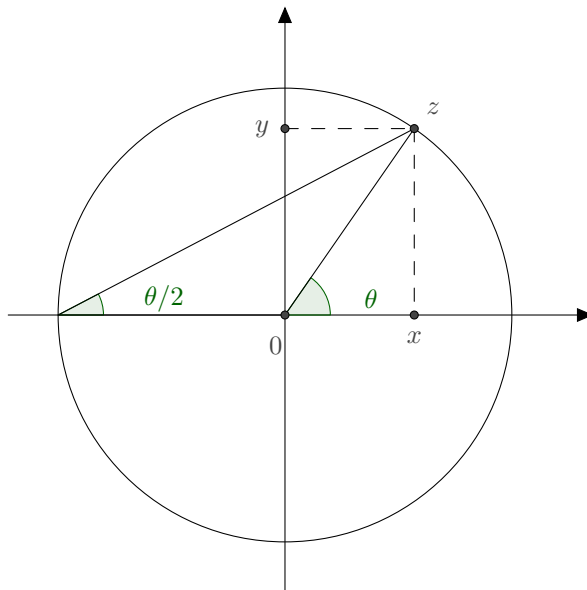
Exercice 18. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U et $z \in U$ tel que $f'(z) \neq 0$. Soit P, Q les parties réelles et imaginaires de f . Que signifie les conditions de Cauchy-Riemann sur ∇P et ∇Q ?

Le théorème des fonctions implicites permet de montrer qu'au voisinage de $f(z)$ les lignes de niveau de P et Q sont paramétrées par des courbes $\mathcal{C}^1$. Soit γ_1, γ_2 courbes de niveaux respectivement de P et Q telles que $\gamma_1(0) = f(z)$ et $\gamma_2(0) = f(z)$. Que pouvez-vous dire de $\gamma_1'(0)$ et $\gamma_2'(0)$?

Exercice 19 (Déterminations principales de l'argument et du logarithme). Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle *détermination principale de l'argument* de z , l'unique nombre $\text{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$ tel que $z = |z| \exp(i \text{Arg}(z))$ et *détermination principale du logarithme*, le nombre $\ln(z) = \ln(|z|) + i \text{Arg}(z)$.

1. Que pouvez-vous dire de $\ln(z)$ si $z \in \mathbb{R}^+$?
2. En vous inspirant de la figure suivante, montrer que

$$\text{Arg}(z) = \theta = 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$



3. En déduire que Arg et $\ln$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. En utilisant la relation $\exp(\ln(z)) = z$, démontrer que $\ln$ est holomorphe de dérivée $\frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.
4. Peut-on prolonger Arg et $\ln$ de manière continue à $\mathbb{C}^*$?
5. Montrer que si $\text{Arg}(a) + \text{Arg}(b) \in]-\pi, \pi[$ alors $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. Cette dernière relation est-elle toujours vraie?

Exercice 20. On définit $\text{arctanh}(z)$ par la formule $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$. Pour quels z , cette formule a-t-elle un sens? Quelle est alors l'image de arctanh ?

Montrer alors que $\tanh$ et arctanh sont inverses l'une de l'autre lorsque l'on restreint $\tanh$ à $\{z \in \mathbb{C}, |\Im(z)| < \pi/2\}$. On utilisera la formule $\tanh(z) = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$ après l'avoir justifiée.

Justifier que les lignes de niveaux de $\Im(\text{arctanh}(z))$ et $\Re(\text{arctanh}(z))$ sont orthogonales. Faire le lien avec les équipotentielles et les lignes de champs électriques dans un plan orthonormal à des fils électriques parcourus par des courants d'intensités égales dans des directions opposées.

Exercice 21. Trouver le plus grand ouvert $U \subset \mathbb{C}$ tel que la formule $\frac{z}{\sin(z)}$ définisse une fonction holomorphe. Cette formule définit-elle une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$? Calculer l'ordre et le résidu associé à chacun des pôles.

Exercice 22. Calculer l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^6} dt$.

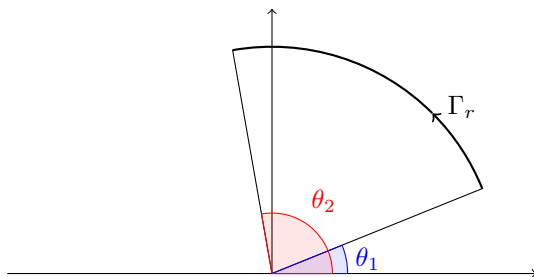
Exercice 23. Soit f une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(P) - \deg(Q) \leq 2$. Soit S l'ensemble des pôles de f montrer que $\sum_{a \in S} \text{Res}(f, a) = 0$.

Exercice 24. Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{C}$ tels qu'il existe $\varphi: U \rightarrow V$ bijection holomorphe d'inverse holomorphe. Montrer que l'application $f \mapsto f \circ \varphi$ définit une bijection entre l'ensemble des fonctions harmoniques sur V et l'ensemble des fonctions harmoniques sur U .

Exercice 25. Exprimer $\cos(z)$ à l'aide d'un cosinus hyperbolique. Même questions avec les sinus. Résoudre les équations $\cos(z) = 0$, $\sin(z) = 0$, $\cosh(z) = 0$ et $\sinh(z) = 0$. Montrer que $z \mapsto \tanh(z)$ définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Quels sont ses pôles ?

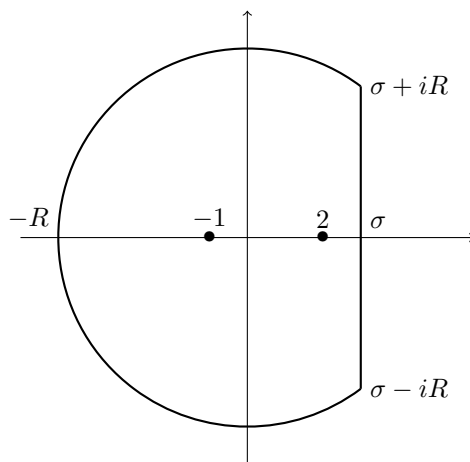
Exercice 26 (Lemmes de Jordan). Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur le secteur $\{z \in \mathbb{C}, \text{Arg}(z) \in [\theta_1, \theta_2]\}$ avec $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$.

1. Si $\lim_{|z| \rightarrow 0} zf(z) = 0$, montrer que $\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_r} f(z) dz = 0$.
2. De même si $\lim_{|z| \rightarrow \infty} zf(z) = 0$, montrer que $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} f(z) dz = 0$.
3. Si $\lim_{|z| \rightarrow 0} zf(z) = 0$, montrer que $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} f(z) e^{iz} dz = 0$.



Exercice 27. Soit f une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ dont la transformée de Laplace $F(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-tz} dt$ possède une abscisse de convergence $p_f < +\infty$.

1. Rappeler la formule d'inversion (formule de Mellin-Fourier) pour la transformée de Laplace
2. Justifier que l'abscisse σ sur lequel, on effectue l'intégration, n'a pas d'importance (tant que celui-ci est supérieur à p_f).
3. On veut illustrer la formule des résidus pour le calcul de l'inverse de $F(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)^2}$. On utilisera le contour suivant.

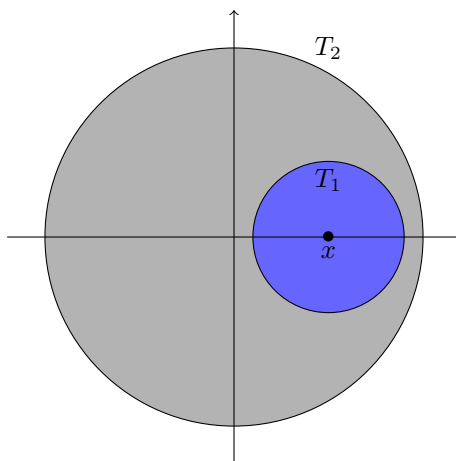


remarque : On aurait bien sûr pu décomposer F en éléments simples et utiliser les formules connues pour les transformées de Laplace usuelles.

Exercice 28 (Fonctions harmoniques et équation de la chaleur). Montrer que les fonctions harmoniques réelles sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Le reste de l'exercice concerne un problème de thermodynamique qui va être résolu en utilisant l'analyse complexe. On considère une conduite d'eau chaude entourée d'une gaine isolante (modélisées par deux cylindres infinis parallèles et emboîtés l'un dans l'autre). On suppose que dans un plan de coupe orthogonal aux cylindres, le cylindre extérieur est centré en 0 et de rayon 1 et le cylindre intérieur est centré en $(x, 0)$ avec un rayon $\rho \in]0, 1[$. On note $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^+$ les températures (constantes) sur les bords intérieurs et extérieurs de la gaine.

Le but du problème est de trouver la température en tout point de la gaine (représentée en gris ci-dessous)



1. Rappeler l'équation de la chaleur (en fixant toutes les constantes physiques égales à 1). Quelle est l'équation satisfaite par la température T dans la gaine en régime stationnaire ?
2. En utilisant les symétries, donner une forme particulière sous laquelle chercher la solution quand $x = 0$.
3. On rappelle que le Laplacien en coordonnées polaires s'écrit

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

pour f fonction de classe $\mathcal{C}^2$ des variables polaires (r, θ) . Résoudre l'équation avec les données ci-dessus.

4. Montrer que pour tout $a \in]-1, 1[$, l'application $\phi_a: D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par la formule

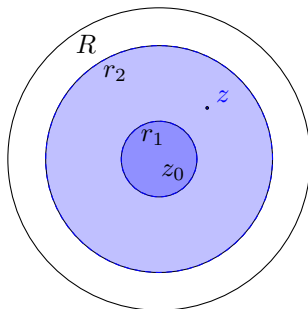
$$\phi_a(z) = \frac{z - a}{1 - az}$$

est holomorphe et d'image $D(0, 1)$.

On ne suppose plus que $x = 0$. On peut montrer qu'il existe un unique $a \in]-1, 1[$ tel que $\phi_a(D(0, r')) = D(x, r)$ pour un certain $r' \in]0, 1[$. C'est ce a que l'on considère dans la suite de l'exercice.

5. Montrer que si T est solution du problème pour x alors $S = T \circ \phi_a$ est solution du problème pour $x = 0$ et en déduire une formule pour T .

Exercice 29. Soit f une fonction holomorphe sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. On veut montrer que f possède un développement en série de Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ et que la convergence est normale sur toute couronne $\overline{D}(z_0, r_2) \setminus \overline{D}(z_0, r_1)$ pour $0 < r_1 < r_2 < R$. Pour cela, on appliquera la formule de Cauchy pour un z dans une couronne comme ci-dessus.



Donner un exemple d'une telle fonction f qui n'est pas méromorphe sur $D(z_0, R)$.

Références

- [1] W. Appel. *Mathématiques pour la physique et les physiciens*. H&K éditions, 2008.
- [2] Henri Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Avec le concours de Reiji Takahashi. Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1961.
- [3] E. Matheron E. Amar. *Analyse complexe*. Cassini, 2004.
- [4] W. Rudin. *Analyse réel et complexe*. Dunod, 1998.