

0

```
if
tex.enableprimitives
then $\Omega$ tex.enableprimitives( $\Omega$ 'pdf@', $\Omega$ 'primitive',
'if-
prim-
i-
tive',
'pdf-
draft-
mode','draftmode' $\Omega$ ) $\Omega$ tex.enableprimitives("
'lu-
aescapestring') $\Omega$ end $\Omega$ 
```

Autour d'une lettre envoyée par Édouard Goursat à Henri Poincaré

1^{er} novembre 2021

Une première lecture - on n'y comprend pas grand chose

Toulouse, 27 Mars 1882

Monsieur,

Je reçois à l'instant un exemplaire de **votre travail sur les fonctions à espaces lacunaires**. Comme je ne suis pas encore très au courant de tout ce qui se publie en Mathématiques, surtout de ce qui se **publie à l'étranger**, il m'arrive quelquefois de faire des découvertes comme celle-là. Je vous prie de croire que, lorsque **j'ai adressé ma note à M^r Hermite**, je n'avais aucune connaissance de votre méthode ; je regrette que M^r Hermite ne m'ait pas prévenu immédiatement au lieu de communiquer à l'Académie des Sciences une démonstration qui me paraît, quant au fond, identique à la vôtre.

En terminant cette lettre, permettez-moi de vous dire que, tout en regrettant de m'être laissé devancer dans cette voie, je ne puis m'empêcher **d'être fier de m'être rencontré avec vous**.

Veuillez agréer, Monsieur et cher collègue, l'assurance de mes sentiments distingués.

E. Goursat

Les éléments d'une lettre

- ▶ Le contenu - les références - les acteurs cités - les éléments de contexte.
- ▶ L'expéditeur et le destinataire - leurs réseaux.
- ▶ La date d'expédition, la date de réception, le lieu d'expédition, le lieu de réception.
- ▶ La circulation et les réseaux de lettres et échanges.

L'expéditeur et son réseau

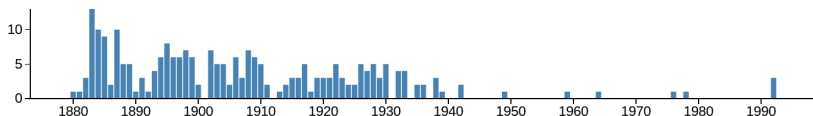
- ▶ 1858 (Lanzac) - 1936 (Paris) - une famille de moyenne bourgeoisie rurale.
- ▶ Études secondaires à Brives, ENS (1876-79), des postes éphémères à Paris, une charge de cours à la Faculté des sciences de Toulouse (1881-85), une maîtrise de conférences à l'ENS (1885-1897), une chaire à la Sorbonne (1897) et à l'ENS (1900); ami de Émile Picard, repéré très vite par Charles Hermite et Gaston Darboux.
- ▶ Thèse en 1881.
- ▶ Membre de l'Académie des sciences en 1919.



Goursat mathématicien

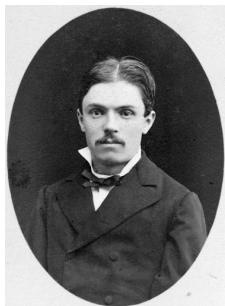
- ▶ Analyse complexe, théorie des équations différentielles, équations intégrales, de la géométrie infinitésimale...
- ▶ De nombreuses publications (plus de 240) – *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* (une petite centaine), *Bulletin de la SMF* (une trentaine), *Bulletin des sciences mathématiques* (une dizaine), *Annales scientifiques de l'ENS* (une dizaine), *Acta mathematica* (une dizaine), *Journal de mathématiques pures et appliquées* (une dizaine).
- ▶ Le *Cours d'analyse mathématique* (3 tomes - 1917-1923) réédité et traduit (allemand, anglais) de nombreuses fois.

Publications by Year



Poincaré

- ▶ 1854 (Nancy) - 1912 (Paris) - une famille de notables provinciaux.
- ▶ Études secondaires à Nancy, École polytechnique (1873-75), École des mines (1875-1878), ingénieur des mines (1879), chargé de cours à la Faculté des sciences de Caen (1879-1881), maître de conférences à la Sorbonne (1881-1885), professeur à la Sorbonne (1885-1912).
- ▶ Thèse en 1879.
- ▶ Membre de l'Académie des sciences en 1887.

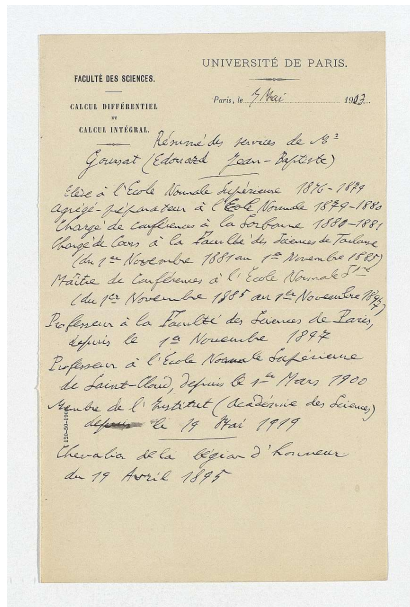


Poincaré, jeune mathématicien dans les années 1880

- ▶ Très soutenu par Hermite.
- ▶ Des contributions majeures dans trois domaines très valorisés dans le champ mathématique : la théorie des formes algébriques, la théorie qualitative des équations différentielles (les courbes définies par une équation différentielle avec déjà des déclarations d'intention vers la mécanique céleste), la théorie des équations différentielles linéaires et la théorie des fonctions fuchsienues.
« Je sais résoudre toutes les équations différentielles. »
(Poincaré à Lecornu, Appell 1925, p. 33).
- ▶ Un flot de notes aux *Comptes rendus*, une mention très honorable aux concours des sciences mathématiques, une reconnaissance nationale et internationale.
- ▶ Une discussion rugueuse avec Felix Klein, l'investissement de Mittag-Leffler sur Poincaré.

Quelques sources

- Les sites Mactutor, Leonore.
- Les dossiers F17 et AJ16 (pour les enseignants parisiens).
- Les sites bibliographiques mathématiques (zbMath, Numdam...).
- Le site de l'INRP (agrégation, biographies de professeur); le site "Prosopomath".
- Des fonds personnels.



Les deux acteurs en 1882

- ▶ Poincaré est légèrement un aîné.
- ▶ Goursat est dans une université de province, Poincaré vient de rejoindre la Sorbonne - tous les deux plus ou moins dans l'orbite de Charles Hermite.
- ▶ Goursat a une réputation d'excellent étudiant de l'ENS (un peu premier partout). En mars 1882, Poincaré est au centre de l'attention de la communauté mathématique internationale (Fonctions fuchsiennes).
- ▶ Poincaré est une des trois « étoiles » mathématiques (avec Émile Picard et Paul Appell) ; Goursat est encore un jeune homme qui vient de passer une excellente thèse :
« La thèse de M. Goursat que je vous envoie mérite toute votre attention, c'est une des plus remarquables de ces dernières années. » (Lettre adressée par Hermite à Mittag-Leffler le 20 janvier 1882)

Les fonctions (à espace) lacunaires

- ▶ Théorie des fonctions analytiques - des exemples de fonctions « qui n'existent que dans une région du plan ». Un sujet qui dans les années 1880, intéresse Weierstrass, Hermite, Mittag-Leffler et quelques autres.
- ▶ Un sujet qui occupe les premiers moments de la correspondance entre Poincaré et Mittag-Leffler (avec des échos dans la correspondance entre Hermite et Mittag-Leffler).



Les fonctions à espace lacunaire dans les bibliographies mathématiques

D_{4eα}

- Une entrée « fonctions à espace lacunaire ».
- Classe D2 (Théorie des fonctions au point de vue de M. Weierstrass) - Sous-classe D2e (coupures naturelles) - section D2eα.

DESSAINT. — Sur les zéros de certaines fonctions discontinues. Principe de la méthode pour trouver les zéros de certaines fonctions (*C. R.*, **119**, 364-367; 1894).

G. HERMITE. — Sur quelques points de la théorie des fonctions (*Cr.*, **91**, 54-78; 1881).

J. GILLET. — Sur les fonctions à espaces lacunaires (*P. M. S.*, **3**, 139-141; 1893).

E. GOURSAT. — Sur les fonctions uniformes présentant des lacunes (*C. R.*, **94**, 715-718; 1882).

E. GOURSAT. — Sur les fonctions à espaces lacunaires (*B. D.*, **11**, 109-114; 1887).

E. GOURSAT. — Sur une fonction à espace lacunaire (*B. D.*, **17**, 247-248; 1893).

LERCH. — [Contribution à la théorie des fonctions] (*S. G. P.*, 571-582; 1886. — Addition : *ibid.*, 423-426; 1887).

LERCH. — Ueber Functionen mit beschränktem Existenzbereiche (*A. G. P.*, **27**, 1-20; 1888).

H. POINCARÉ. — Sur les fonctions à espaces lacunaires (*C. R.*, **96**, 1134-1136; 1883).

T.-J. STIELTJES. — Exemple d'une fonction qui n'existe qu'à l'intérieur d'un cercle (*B. D.*, **11**, 46-50; 1887).

F. GOMES TEIXEIRA. — Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite (Fonctions analytiques admettant pour espace lacunaire un cercle) (*B. D.*, **17**, 29-32; 1893).

Une lecture rapide de la lettre

- ▶ Goursat vient de recevoir un travail de Poincaré sur les fonctions à espace lacunaire.
- ▶ Goursat vient de publier dans les *Comptes rendus* une note « Sur les fonctions uniformes présentant des lacunes » (t. 94 (1882), 715-718). La note est présentée par Hermite à la séance du 13 mars 1882.
- ▶ Goursat constate qu'un travail de Poincaré est très proche du sien et il regrette cette publication.
- ▶ Une question : de quel travail de Poincaré parle Goursat ?
 - Sur les fonctions à espaces lacunaires, *Acta Societatis scientarum Fennicae*, 12 (1883), 343-350.
 - Sur les fonctions à espaces lacunaires, *Comptes rendus*, 96 (1883), 1134-1136.
 - Sur les fonctions à espace lacunaires, *American Journal of Mathematics*, 14 (1892), 201-221.

Comment Poincaré a été amené à s'intéresser à cette question ?

- ▶ Un résultat de sa thèse (expression analytique d'une solution d'équations aux dérivées partielles) - idem pour Goursat (fonction hypergéométrique).
- ▶ Le sujet intéresse Hermite. De nombreuses allusions aux « espaces lacunaires » dans sa correspondance des années 1880 avec Mittag-Leffler :

« Voici au sujet de ces fonctions présentant des espaces lacunaires, des résultats extrêmement intéressants qui m'ont été communiqués par un de mes élèves, M. Poincaré. » (Un article d'Hermite publié dans les *Acta societatis scientiarum Fennicae* en 1881 à l'invitation de Mittag-Leffler).

« C'est ce me semble un point nouveau et important dans la théorie des fonctions d'une variable que ce nouveau genre de discontinuités. [...] Vous apprendrez je pense avec intérêt qu'un de mes élèves, à qui j'ai communiqué cette remarque, est parvenu de son côté au même résultat sous une forme entièrement explicite. » (Lettre adressée par Hermite à Mittag-Leffler le 8 mars 1881)

« Dites moi ce que vous pensez des fonctions de Poincaré avec des lacunes. » (Lettre adressée par Hermite à Mittag-Leffler le 11 mars 1881).

- Le sujet intéresse Mittag-Leffler – en tant qu'élève de Weierstrass et des liens avec ses travaux :

« La fonction de M. Poincaré me paraît fort intéressante, mais pourtant je dois vous avouer que l'existence des fonctions à espaces lacunaires me paraît avoir été démontrée auparavant par les recherches de M. Weierstrass. » (Lettre de Mittag-Leffler adressée à Hermite le 15 mars 1881)

« Permettez-moi de vous envoyer sous bande quelques exemplaires d'un mémoire que notre maître vénéré M. Hermite a voulu bien me faire l'honneur de publier ici. M. Hermite y communique entre autres choses un résultat qui m'a paru d'un très grand intérêt. Le résultat m'intéresse autant plus comme je me suis occupé depuis longtemps avec des fonctions d'une nature analogue avec la votre. Voyez là dessus quelques mots dans une lettre de moi à M. Hermite publiée dans les annales de Monsieur Darboux. » (Lettre de Mittag-Leffler adressée à Poincaré le 11 avril 1881)

- Un article de Poincaré accepté les *Acta societatis scientarum Fennicae* :

« À ma dernière rencontre avec lui [Poincaré] avec lui, je lui ai demandé une note dans laquelle il expose complètement ce qu'il a trouvé de si remarquable sur l'équation aux différences partielles dont la solution est une fonction avec un espace lacunaire, pour être présentée, de sa part, à la Société des Sciences, et il m'a promis de la rédiger sans retard. » (Lettre de Hermite à Mittag-Leffler datée du 19 avril 1881)

« Monsieur Hermite m'a envoyé votre travail « Sur les fonctions à espaces lacunaires » et il m'a prié de la présenter dans son nom et le vôtre à notre société des sciences. [...] Vous avez tort quand vous dites que Monsieur Hermite a mis le premier en lumière l'existence des fonctions à « espaces lacunaires ». Vous ne pouvez pas savoir que Monsieur Weierstrass a parlé de telles fonctions depuis des années dans son cours mais dans le travail « Zur Functionenlehre » il en donne l'exemple et met en lumière justement cette propriété. » (Lettre de Mittag-Leffler à Poincaré datée du 22 mai 1881)

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{x^v + x^{-v}}$$

► Quelques échanges au sujet de la priorité de Weierstrass :

« Je viens vous déclarer que je n'entends aucunement attribuer la première idée des lacunes à M. Poincaré ou à moi-même, et que j'aurai soin en corrigeant les épreuves de dire explicitement que nous venons après M. Weierstrass en donnant de nouveaux exemples. » (Lettre d'Hermite à Mittag-Leffler datée du 22 mars 1881.

« [...] je suis enchanté du moyen que vous me fournissez de rectifier une erreur historique. » (Lettre de Poincaré à Mittag-Leffler datée du 1er juin 1881)

Un article de Mittag-Leffler dans le *Bulletin des sciences mathématiques*

Présentation de quelques points récents en analyse complexe en insistant sur un article essentiel de Weierstrass « Zur Functionenlehre » (une traduction est parue dans le *Bulletin*, 5 (1881), 157-183). Poincaré est cité après Weierstrass et Hermite.

M. Weierstrass a joint à cela un autre résultat, qu'il avait déjà communiqué à l'Académie de Berlin. La série de puissances

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^{\nu} x^{a^{\nu}},$$

dans laquelle a est un nombre entier impair et positif, b une quantité positive, moindre que l'unité, avec la condition

$$ab > 1 + \frac{3}{2} \pi,$$

série dont ainsi les divers termes sont encore des fonctions algébriques rationnelles, définit une fonction qui n'existe pas en dehors de la région de convergence de la série, et qui, par suite, existe seulement pour les valeurs de x dont le module ne surpasse pas l'unité.

« Dans le mémoire que M. Hermite a récemment publié dans les *Actes* de la société, le grand géomètre français a éclairé d'un point de vue nouveau les deux découvertes de M. Weierstrass que nous venons de citer. Il [...] indique aussi comment il est vraisemblablement possible de former d'autres expressions intégrales, définissant des fonctions qui n'existent que dans une certaine région du plan et pour lesquelles les autres régions, comme cela a lieu pour la série de puissances de Weierstrass, forment un *espace lacunaire*. Dans une note du même Mémoire, il communique encore une formule remarquable, due à M. Poincaré, professeur à la Faculté des Sciences de Caen, connu aussi par d'autres recherches, récemment publiées, sur la théorie des fonctions, d'un caractère profond et original. » (p. 390-392)

Dans un Mémoire que m'a envoyé M. Poincaré, et dont j'ai aujourd'hui l'honneur de proposer l'insertion dans les *Actes* de la Société, cette question trouve une explication aussi complète qu'ingénieuse. M. Poincaré montre comment la formule dont il s'agit est, en réalité, une expression d'une seule fonction analytique, pour laquelle le polygone P est un véritable « espace lacunaire », et, par cette remarque, il est le premier qui, après Weierstrass, ait donné un exemple concret de l'existence de fonctions de cette nature. M. Poincaré étudie également, en partant de la conception de la théorie des fonctions, propre à M. Weierstrass, certaines autres fonctions de même nature, ayant des « espaces lacunaires ».

Une question

- ▶ Goursat parle d'un travail publié « à l'étranger » et il est donc question de l'article publié dans le volume de l'année 1883 des *Acta societatis scientarum Finnea*.
- ▶ Comment Goursat peut parler en 1882 d'un article de Poincaré publié en 1883.
- ▶ Une impression et l'envoi de tirés à part – Les fascicules sont imprimés au fur et à mesure que les articles arrivent. Les tirés à part arrivent sitôt l'impression faite, bien avant la parution du fascicule. Des chronologies fines.

« Votre travail sera bientôt imprimé et alors je me permettrai de vous en envoyer 50 exemplaires. » (Lettre de Mittag-Leffler à Poincaré datée du 22 juin 1881)

« Je vous ai envoyé, il y a quelques jours, 50 exemplaires de votre travail. Je vous enverrai de même demain ou après demain quelques exemplaires d'une note de moi où je cherche de faire valoir votre travail. » (Lettre de Mittag-Leffler à Poincaré datée du 9 août 1881)

« Je vous remercie bien des 50 exemplaires que vous avez bien voulu m'envoyer ainsi que de votre lettre qui m'a fait le plus grand plaisir. » (Lettre de Poincaré à Mittag-Leffler datée du 19 août 1881)

La pratique des tirés à part

- « Si les auteurs sont généralement pressés d'avoir leur tirage à part, ce n'est pas pour faire une ample distribution à tous leurs amis, mais pour envoyer aussitôt que possible un exemplaire à une dizaine de grands noms à qui ils désirent faire connaître leurs travaux. La combinaison que je vous propose donnerait complète satisfaction aux auteurs » (Lettre de Poincaré à Eneström datée du 3 juin 1885)
- Les tirés à part de l'article de Poincaré circulent depuis la fin 1881. Goursat a eu connaissance du travail de Poincaré par ce vecteur. En l'occurrence, la circulation n'a pas fonctionné de manière idéale puisque Goursat apprend l'existence de la note de Poincaré un peu tard à son goût.

Que dire d'un tel épisode

- ▶ Il ne s'agit pas de question de plagiat.
« [...] la belle note de Mr. Poincaré sur les espaces lacunaires ne lui [Goursat] était point connue, lorsqu'il a envoyé aux Comptes rendus l'article où il trouve les mêmes choses, et qu'il s'en est amicalement expliqué avec l'inventeur des fonctions fuchsiennes. » (Lettre adressée par Hermite à Mittag-Leffler le 6 avril 1882)
- ▶ Un problème de bibliographie liée à la multiplication des acteurs impliqués dans la recherche mathématique et par l'augmentation et la diversification des journaux mathématiques. Des outils de recherche bibliographique :
« Il y a lieu de publier un répertoire bibliographique des Sciences mathématiques, destiné à épargner aux travailleurs de longues et pénibles recherches. » (Résolution votée par le Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques - Paris - 16-19 juillet 1889)

« Au point où en est arrivé aujourd'hui le développement des sciences, il est devenu impossible à un homme d'étude, même en se spécialisant, de lire tout ce qui se rapporte à une des grandes branches des mathématiques. Ces travaux sont trop étendus ; ils sont absolument disséminés, souvent peu connus et inaccessibles dans des collections étrangères ou sous la forme de brochures très rares. [...] Il en résulte que, de plus en plus fréquemment, le chercheur dans l'ignorance de ce qui a été déjà avant lui sur le terrain où il se place, use en pure perte des efforts précieux, et n'aboutit qu'à retrouver des choses connues qui n'ajoutent rien au domaine scientifique de l'humanité, ni à sa propre réputation. Lorsque plus heureux, il se trouve réellement sur un filon nouveau, bien des secours accessoires, bien des résultats intermédiaires nécessaires et déjà connus lui manquent faute de savoir où les trouver, et il est obligé de renoncer à sa recherche, ou de surmonter lui-même de nouveau ces divers obstacles. » (Lettre de Haton de la Goupillière, président de la SMF au Ministre de l'Instruction publique - 1890)

Comment lit-on les articles de mathématiques ?

- ▶ Ne pas oublier 1) que les journaux étaient publiés sous forme de fascicules. Nos acteurs devaient plus souvent avoir accès à ces fascicules qu'aux recueils que nous connaissons, 2) sauf à être personnellement abonné, on ne disposait de ces fascicules que dans les bibliothèques.
- ▶ Les tirés à part, une forme non-négligeable d'accès aux textes.

En conclusion

Cette lettre ouvre

- sur un chapitre de l'histoire des fonctions d'une variable complexe à la fin du 19e siècle,
- sur des questions de priorité, d'originalité en mathématiques à la fin du 19e siècle ; quelques années plus tard, Poincaré sera à l'initiative de l'entreprise du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques,
- sur des questions de circulation des mathématiques par les tirés à part,
- sur des questions de réseaux et de fonctionnement de la communauté mathématique,
- sur des questions de pratiques d'édition de notes aux *Comptes rendus*.