

Précis de philosophie
de la logique et des mathématiques

Vol. 2 : philosophie des mathématiques

sous la direction de
Andrew Arana et Marco Panza

Éditions de la Sorbonne

8 Idéaux de preuve : explication et pureté

Andrew Arana

Le problème suivant a été publié dans la revue *American Mathematics Monthly* :

Problem 10830. Proposed by Floor van Lamoën, Goes, The Netherlands. A triangle is divided by its three medians into 6 smaller triangles. Show that the circumcenters of these smaller triangles lie on a circle. (Cf. Edgar *et al.* [2002], pp. 396–397).

Les éditeurs ont ensuite fait un commentaire des solutions envoyées par les lecteurs :

The submitted solutions used analytic geometry (or complex numbers) and involved lengthy computations (some done with Maple or Mathematica). The editors felt that a coordinate-free statement deserves a coordinate-free solution ; such a solution may shed more light on why the result is true. (*Ibid.*)

Alors qu'ils pensaient que les solutions reçues étaient correctes, les éditeurs ont néanmoins demandé des autres solutions. Ils préféraient des solutions plus « proches » au problème, en évitant les coordonnées, et des solutions qui montrent « pourquoi » le résultat soit correct. Les preuves satisfaisant ces critères sont respectivement appelées preuves *pures* et preuves *explicatives*.

Ces demandes sont fréquentes en mathématiques. Une fois prouvé, les mathématiciens demandent souvent d'autres preuves du résultat qui donnent une *compréhension* du résultat. On croit que les preuves pures et explicatives contribuent à notre compréhension. On dit que l'explication et la pureté sont des « idéaux de preuve » : « il s'agit d'explicitier les fins spécifiques et les vertus épistémiques qui caractérisent la preuve mathématique envisagée comme norme justificative de la pratique mathématique elle-même » (cf. Gandon et Smadja [2011], p. 148). Ce chapitre discutera comment ses idéaux contribuent à la compréhension mathématiques, en utilisant le cadre d'une enquête sur les *valeurs*

épistémiques.

Qu'est-ce que c'est une valeur épistémique? Considérons une activité centrale de la pratique mathématique : la solution de problèmes mathématiques au moyen de *preuve*. Cette activité vise à *soulager l'ignorance* des questions mathématiques particulières, par exemple, si il y a une infinité de nombres premiers. Un critère minimal de succès pour ce soulagement est une preuve qui *justifie la croyance* dans la réponse de la solution. Pour ce faire, les mathématiciens limitent leurs investigations à des preuves logiquement *correcte*. Cependant, les mathématiciens ont souvent des objectifs *autres* que la justification. Par exemple, certains mathématiciens cherchent des preuves qui *expliquent* leurs théorèmes. D'autres cherchent des preuves qui sont *pures*, en tirant ses étapes des choses « proches » ou « intrinsèque » à la conclusion de la preuve. D'autres encore cherchent des preuves qui *construisent* les objets ou les propriétés de l'enquête, ou qui sont *efficaces* pour les humains pour produire, suivre et comprendre. Chacun de ces objectifs exprime une *valeur* de la preuve autre que la justification. La réalisation de ces valeurs contribue à la compréhension des mathématiques. Ainsi, l'étude de la compréhension des mathématiques devrait être au moins en partie une étude des valeurs de la pratique mathématique.

Ce cadre philosophique est bien décrit par Gaston Bachelard :

Dans le destin des sciences les valeurs rationnelles *s'imposent*. Elles s'imposent historiquement. L'histoire des sciences est menée par une sorte de nécessité autonome. La philosophie des sciences devrait prendre systématiquement pour tâche la détermination et le classement hiérarchique des valeurs épistémiques. Bien vaines sont les discussions générales sur la *valeur de la science*, si l'on n'entre pas dans le détail de la valeur des pensées scientifiques, si l'on ne voit pas que toute pensée scientifique sensibilise une valeur psychique de plus haut niveau. (Cf. Bachelard [1965], pp. 47–48.)

Selon Bachelard, pour comprendre la rationalité d'une science (et donc, des mathématiques), il faut identifier et classer les valeurs épistémiques de cette science. L'identité d'une science est déterminée, au moins en partie, par les modes de connaissance de cette science. Une telle enquête exige à la fois des travaux historiques et philosophiques, pour identifier et analyser les valeurs épistémiques particulière à une science.

Dans ce chapitre on discutera deux idéaux de preuve : l'*explication* et la *pureté*. Il y a d'autres idéaux ; on se focalise sur ces deux pour les développer suffisamment. On conclura en faisant mention d'autres idéaux de preuve et en

expliquant comment la pratique mathématique peut admettre cette pluralité.

1. L'explication

Les exemples de judgments de l'explication par des mathématiciens sont nombreux. On ne donne qu'un, de Egbert Brieskorn dans un article de la topologie algébrique :

Nous avons prouvé avec le théorème 1.2 que le rang de la cohomologie de de Rham relative d'une singularité isolée de f en x est égal à $b_{f,x}$. Pour cela nous avons utilisé le théorème de Milnor qui affirme que ce $b_{f,x}$ est égal à un certain nombre de Betti. Nous donnons ici une démonstration simple de ce théorème. Cette preuve explique [*erklärt*] de manière particulièrement claire [*anschaulich*] pourquoi le nombre $b_{f,x}$ intervient. (Cf. Brieskorn [1970], p. 51)

Il juge que la preuve explique le théorème en disant *pourquoi* le théorème est correct. La forme de ce jugement exemplifie la structure d'explication habituelle de philosophes (voir par exemple l'entrée sur l'explication de Engel [2012], p. 412). Comme réponse à une question de « pourquoi », une explication donne la *cause* ou la *raison* d'une proposition.

Il est évident que l'explication est valorisée par des mathématiciens. Mais est-elle une valeur épistémique ? Existe-il une seule caractéristique définissant une preuve explicative ? On démontra que, jusqu'à ce jour, l'explication n'est qu'un air de famille entre différentes propriétés distinctes.

1.1 L'explication comme généralisation

Une première tentative identifie l'explication avec la *généralité*. Selon Solomon Feferman,

Abstraction and generalization are constantly pursued as the means to reach really satisfactory explanations which account for scattered individual results. In particular, extensive developments in algebra and analysis seem necessary to give us real insight into the behavior of the natural numbers. (Cf. Feferman [1964], p. 3)

Mark Steiner a répondu en observant que « There *is* something general and abstract about complex analysis, which at present provides the greatest insight into

the prime numbers, especially their aggregate behavior » (cf. Steiner [1978a], pp. 135–6). Il a en tête la théorie analytique des nombres, qui porte l'analyse complexe à l'arithmétique des entiers. Par exemple, le théorème des nombres premiers, qui dit que le nombre de premiers jusqu'à un entier n est environ $\frac{n}{\log n}$, est démontré par Hadamard et de la Vallée Poussin en utilisant des méthodes analytiques de Riemann. Cette application de l'analyse complexe dans la théorie des nombres, utilisant une théorie plus générale que l'arithmétique et l'analyse réelle, n'est pas choisie par hasard ; par contre, la théorie analytique des nombres est riche et fructueuse jusqu'ici, avec avec de nombreuses applications même aux problèmes élémentaires, et donc est plus générale que l'arithmétique élémentaire au sens qu'elle démontre plus que la dernière. En particulier, les preuves analytiques permettent les calculs des limites de suites d'entiers qui ne sont pas fiables sans l'analyse complexe.¹ Il semble que ceci justifie le jugement de Feferman.

Steiner donne un autre tel exemple : que la formule

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

pour x une variable réel est valide quand la suite converge. « We can prove that the series does not converge for $|x| = 1$ » continue Steiner, « but we have no *explanation* of the non convergence, since the fraction $\frac{1}{1+x^2}$ does not seem to behave badly as $|x|$ approaches 1. » On doit encore porter l'analyse complexe pour expliquer ce théorème :

The “true” explanation appears only in the theory of *complex* variables, where Cauchy demonstrates that a power series in one complex variable must converge in a circular region about zero in the complex plane. Since the fraction $\frac{1}{1+x^2}$ —now a complex variable—has a singularity when $x = i$, the series cannot converge when $x = 1$ (since the region would not take the shape of a circle). (Cf. Steiner [1978b], pp. 18–19.)

Ici encore, pour dire pourquoi la suite converge, il suffit d'encadrer la question dans un contexte plus général.²

Néanmoins, Steiner affirme, le critère de généralité ne suffit pas pour ana-

1. Cf. Mancosu [2001], Part III, pour une autre discussion de l'explication engendrée par l'analyse complexe.

2. Pincock [2015] développe aussi un critère de généralité et abstraction pour l'explication, étudiant une notion de « dépendance abstraite ». Il discute le critère en utilisant pour étude de cas l'impossibilité de résoudre par des radicaux l'équation générale du cinquième degré. D'Alessandro [2019] fait une analyse et critique du critère de Pincock.

lyser l'explication. Dans Steiner [1978a] il discute le théorème que $\sqrt{2}$ est irrationnel, et trois preuves du théorème. La première, appelée la preuve pythagoricienne, est bien connue; elle utilise la proposition que si a^2 est pair, alors a est pair, démontrant cette dernière proposition par des calculs de divisibilité des entiers. La deuxième preuve et la troisième preuve utilisent la proposition (†) que si $a^2 = nb^2$, pour des entiers a, b, n , alors n est un carré parfait, une proposition plus générale que l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Donc ces dernières preuves sont des candidats d'être explicatives, par le critère de généralité. Or, Steiner argue que la troisième preuve, attribuée à Hardy, n'est pas plus explicative que la preuve pythagoricienne. Elle prouve (†) de la façon suivante : supposons que $a^2 = nb^2$ et que $\frac{a}{b}$ est irréductible. Si un nombre premier p divise b et donc b^2 , alors p divise a^2 et donc a , une contradiction. Étant un nombre divisible par aucun premier, $b = 1$; donc n est un carré parfait. Steiner dit que cette preuve n'est pas plus explicative que la preuve pythagoricienne, au cause de sa dépendance vis-à-vis de calculs de divisibilité. Par contre, Steiner affirme que la deuxième preuve, attribuée à Kreisel, est explicative. Elle utilisent le théorème fondamental de l'arithmétique pour conclure que les exposants de la décomposition en produit de facteurs premiers de n dans a^2 et b^2 sont pairs. Quand n est un carré parfait, on n'additionne que 2 à cet exposant dans b^2 , donnant encore un exposant pair. Alors la deuxième preuve est plus explicative de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ que la première preuve et la troisième preuve; mais on ne peut justifier ce fait par le critère de généralité. Steiner dit plutôt que la deuxième preuve est explicative parce qu'elle démontre (†) « swiftly and decisively » (p. 138). Donc la généralité de (†) n'est pas la chose qui rend la preuve de Kreisel explicative.

1. 2 L'explication comme unification

La valeur épistémique de l'unification est formulée par Kant dans l'appendice de la Dialectique Transcendantale de la première Critique. Il dit que l'unité systématique de la connaissance est idéal de la raison. Selon Kant, au niveau le plus général de la cognition, la raison exige l'unité de la connaissance, même si dans un rôle régulateur. La cognition doit imposer cette unité, il affirme, pour faire compte de la cognition comme système intégré et réglé par des lois rationnels (cf. Grier [1997]).

L'importance de l'unification pour l'explication scientifique, dans l'esprit kantien, est souligné par Carl Hempel. Par rapport à une compréhension subjective, l'explication scientifique nous donne « an objective kind of insight that

is achieved by a systematic unification, by exhibiting the phenomena as manifestations of common, underlying structures and processes that conform to specific, testable, basic principles » (cf. Hempel [1966], p. 66). Herbert Feigl ajoute que « The aim of scientific explanation throughout the ages has been *unification*, i.e. the comprehending of a maximum of facts and regularities in terms of a minimum of theoretical concepts and assumptions » (cf. Feigl [1970], p. 12). Michael Friedman saute sur l'analyse *quantitative* de l'explication de Feigl, et donne son analyse célèbre :

This is the essence of scientific explanation—science increases our understanding of the world by reducing the total number of independent phenomena that we have to accept as ultimate or given. A world with fewer independent phenomena is, other things equal, more comprehensible than one with more. (Cf. Friedman [1974], p. 15.)

Philip Kitcher donne une précification de cette idée de Hempel, Feigl et Friedman, qu'on peut appliquer aussi aux mathématiques. Soit K un ensemble de croyances consistante et fermé déductivement. On peut considérer K comme les propositions admis par une communauté idéale à un moment précis. Soit $E(K)$, la « réserve explicative sur » K , l'ensemble des arguments acceptables pour servir de base aux acts d'explication par la communauté idéale dont les éléments de K sont exactement leurs croyances. Kitcher argue que pour tout K , $E(K)$ se compose de l'ensemble des arguments qui unifient le mieux les éléments de K (cf. Kitcher [1981], p. 512). Il donne l'essentiel de son argument de la façon suivante :

Understanding the phenomena is not simply a matter of reducing the “fundamental incomprehensibilities” but of seeing connections, common patterns, in what initially appeared to be different situations... *Science advances our understanding of nature by showing us how to derive descriptions of many phenomena, using the same patterns of derivation again and again, and, in demonstrating this, it teaches us how to reduce the number of types of facts that we have to accept as ultimate (or brute)*. So the criterion of unification I shall try to articulate will be based on the idea that $E(K)$ is a set of derivations that makes the best tradeoff between minimizing the number of patterns of derivation employed and maximizing the number of conclusions generated. (Cf. Kitcher [1989], p. 432.)

Alors Kitcher analyse l'explication comme stratégie d'optimiser les types de démonstration et les conclusions de ces démonstrations : à minimiser les pre-

miers et maximiser les derniers. Son critère de l'explication, l'unification, est bien quantitatif.

Dans la pratique mathématique on trouve nombreux exemples de l'unification. Par exemple, le mathématicien Felice Casorati affirme l'importance de l'unification dans l'analyse :

Nous pensons qu'il faut vraiment admirer ce pouvoir d'assimilation avec lequel [Riemann] sut recueillir et fondre dans une théorie compacte et simple, ainsi que la sienne, toutes les recherches de tiers ayant suscitées une grande attention; dont les nombreux de Cauchy, dispersés... dans de nombreuses publications, avaient été menés avec des intentions diverses. De plus, ils étaient enveloppés d'une variété hétérogène de noms et de notations spéciales. Il est particulièrement intéressant d'observer en particulier qu'il établit toujours ses propres conventions et définitions, de sorte que chaque théorème puisse être déclaré vrai sans exception, ou que plusieurs formules ou théorèmes, considéré d'ordinaire comme différent les uns des autres, puissent être assemblés en une seule formule ou théorème. (Cf. Casorati [1868], p. 140, notre traduction; cité en anglais par Tappenden [2005], p. 14)

Un autre exemple de l'unification dans la pratique mathématique, noté aussi par Tappenden [2005], est le *principe de dualité* de la géométrie projective. Considérons le théorème de Pascal (si un hexagone est inscrit sur une conique propre, alors les points d'intersection des côtés correspondants sont alignés) et le théorème de Brianchon (si un hexagone a tous ses côtés tangents à une conique propre, alors ses diagonales sont concourantes). Pour obtenir l'un de l'autre, c'est simplement une question d'échanger les mots géométriques comme *point* et *droite*, et *relier* et *se rencontrer*. On dit que le théorème de Brianchon est le *dual* du théorème de Pascal. Le principe de dualité dit que le dual de tout théorème concernant des points, droites, et leurs propriétés projectives, est lui-même un théorème. Gergonne affirme la valeur de dualité en termes quantitatifs :

Une science d'ailleurs se recommande peut-être moins encore par la multitude des propositions dont se compose son domaine que par la manière dont ces propositions sont liées et enchaînées les unes aux autres. Or, il est dans chaque science certains points de vue élevés où il suffit de se placer pour embrasser d'un même coup-d'oeil un grand nombre de vérités que, dans une position moins favorable, on aurait pu croire indépendantes les unes des autres, et que l'on reconnaît des lors dériver toutes d'un principe commun,

souvent même incomparablement plus facile à établir que les vérités particulières dont il est l'expression abrégée. (Cf. Gergonne [1826–1827], pp. 214–5.)

Tappenden note que le principe de dualité est « une exemplification frappante » de l'analyse de Kitcher (cf. Tappenden [2005], p. 30).

Cependant, Paolo Mancosu et Johannes Hafner ont identifié un problème pour l'analyse de Kitcher (cf. Mancosu et Hafner [2008]). Ils considèrent la perspective du mathématicien Gregory Brumfiel dans son livre *Brumfiel* [1979] sur la géométrie algébrique réelle. Pour comprendre leur objection, il faut discuter la notion d'un *corps réel clos* : un corps ordonné tel que tout élément positif admet une racine carrée et tout polynôme de degré impair admet une racine. La théorie RCF est l'ensemble des conséquences logiques des axiomes du premier ordre qui expriment ces propriétés. Des exemples importants de modèles de RCF sont les nombres réels et les réels algébriques. Or, les nombres complexes ne sont pas un modèle de RCF, parce qu'ils ne sont pas ordonnables.

Brumfiel fait ressortir le contraste entre trois différentes méthodes pour prouver des théorèmes sur les corps réels clos. La première méthode emploie la procédure effective de Tarski [1951] et Seidenberg [1954] pour décider les théorèmes du langage de RCF : ils développent un algorithme qui se termine en un nombre fini d'étapes qui décide oui ou non à toute question de démontrabilité des énoncés de RCF. Brumfiel dit que les preuves rendues par cette méthode ne sont pas explicatives : elles sont trop fastidieuses, au cause de leur longueur. Ensuite il présente une deuxième méthode : un « principe de transfert » qui utilise la complétude de RCF pour inférer la validité d'une proposition dans tout modèle de RCF de la validité de cette proposition dans un modèle particulier, les réels. Sur cette méthode, Brumfiel affirme que ses preuves ne sont pas explicatives :

In this book we absolutely and unequivocally refuse to give proofs of this second type. Every result is proved uniformly for all real closed ground fields. Our philosophical objection to transcendental proofs is that they may logically *prove* a result but they do not *explain* it, except for the special case of real numbers. (Cf. Brumfiel [1979], p. 166.)

Brumfiel préfère une troisième méthode, purement algébrique, qui est appliquée à tout modèle de RCF d'une manière uniforme. Elle utilise des propriétés des ensembles semi-algébriques.

Hafner et Mancosu évaluent comment la théorie de Kitcher fait compte de

cet exemple de Brumfiel. La méthode la plus unificatrice qui réduit au maximum « the number of patterns of derivation employed » est la méthode de Tarski-Seidenberg : une procédure *uniforme* pour tout théorème. Mais Brumfiel dit que cette méthode n'est pas explicative. Pour distinguer entre la deuxième méthode et la troisième méthode, il faut distinguer entre des différences *qualitatives* de preuves. Les preuves de la deuxième méthode utilisent des propriétés d'un certain corps réel clos, et par la complétude de RCF, généralisent la validité pour ceci à la validité pour tout corps réel clos. Par contre, les preuves de la troisième méthode utilisent les propriétés des ensembles semi-algébriques. Ces distinctions ne concernent pas « minimizing the number of patterns of derivation employed » mais plutôt le type des propriétés utilisées. Mais la théorie de Kitcher n'est pas sensible à cette façon qualitative de distinguer les preuves explicatives, mais uniquement les différences quantitatives. Donc, concluent Mancosu et Hafner, l'analyse de Kitcher manque de faire compte de ce cas.

1.3 L'explication comme l'essentialisme

Dans la prochaine section, nous discuterons des tentatives d'analyser l'explication mathématique comme démonstrations qui emploient les *essences* de ce qui est démontré. On considérera trois développements de ce type : la version aristotélicienne, la version de Steiner, et enfin une version introduite par les mathématiciens à rebours.

L'essentialisme aristotélicien

L'explication joue un rôle important pour la théorie de la connaissance d'Aristote. Il distingue la connaissance quotidienne et la connaissance « scientifique », où la dernière se distingue par l'identification de la *cause* de ce qui est connu. Pour connaître une cause, on cherche une réponse à une question du type *pourquoi*, et donc, selon les critères contemporaines, une explication. En mathématique les questions de « pourquoi » sont résolues par les *définitions* : « Par exemple en mathématiques, c'est, en effet, à une définition du droit, du commensurable ou de quelque chose d'autre de ce genre que se ramène le pourquoi ultime » (Cf. *Physique* 198a17–18; Aristote [2014], p. 549). Il faut comprendre la notion de « définition » ici dans une perspective métaphysique : « une définition, en effet, porte sur le « ce que c'est », c'est-à-dire sur l'essence » (Cf. *Seconds Analytiques* 90b31; *Ibid.*, p. 268). Donc une explication mathéma-

tique d'une proposition chez Aristote est une démonstration de la proposition qui part des définitions réelles, c'est-à-dire qui exprime les essences des genres desquels la proposition traite.

Aristote prend pour exemple d'une proposition admettant une démonstration scientifique, que la somme des angles d'un triangle soit égale à deux droits (cf. *Métaphysique* 1025a30–4), bien qu'on n'ait qu'une idée sommaire de la démonstration voulue. Dans la littérature on trouve des avis contradictoires : par exemple Steinkrüger affirme que la démonstration réalise le critère aristotélicien (cf. Steinkrüger [2018], pp. 135–141), tandis que Tiles s'inquiète que la démonstration utilise des primitifs qui ne sont pas des définitions (cf. Tiles [1983], p. 3 ; Tiles note que Kant utilise ce cas pour arguer que la proposition ne soit pas analytique). Cette dispute illustre le désespoir de plusieurs aristotéliens de comprendre l'essentialisme aristotélicien. Il n'est pas clair comment identifier les définitions réelles, qui exprime les essences. David Charles note cette controverse :

While some (optimists) invoke metaphysical intuition, claiming that we can simply see which features are essential, many reject this account as mysterious, concluding that we lack the epistemic resources needed to know which features are essential and which are necessary. Indeed, for these reasons, Aristotelian essentialism has been widely regarded as a failure. (Cf. Charles [2014], p. 324.)

Néanmoins, la notion d'explication aristotélicienne reste séduisante pour les philosophes et mathématiciens. Un exemple est Proclus dans son commentaire sur le premier livre de Euclide, discuté dans chapitre 1. Un autre est Bolzano (bien discuté par Sebastik [1992]) :

En effet, dans la science, les démonstrations ne doivent nullement être de simples procédés de « fabrication d'évidences » [*Gewißmachung*], mais doivent être bien plutôt des fondements [*Begründung*] ; il faut exposer le fondement objectif que possède la vérité à démontrer : celui qui se rend compte de lui-même de cela saura qu'une démonstration véritablement scientifique, c'est-à-dire le fondement objectif d'une vérité valable pour toutes les grandeurs, qu'elles soient ou non dans l'espace, ne peut pas se trouver dans une vérité valable seulement pour les grandeurs qui appartiennent à l'espace. (Cf. Bolzano [1964], p. 137.)

Pour Bolzano, comme Aristote, le but d'une démonstration scientifique n'est pas son évidence mais finalement ses fondements objectifs : les vérités responsables pour la vérité de la conclusion en fin de compte.

On va ensuite discuter deux comptes rendus de l'explication de la façon essentialiste qui essaient de surmonter les problèmes de la version aristotélicienne, par Mark Steiner et ensuite par les mathématiciens à rebours.

L'essentialisme de Steiner

Comme Aristote, Steiner voudrait avancer une analyse de l'explication en termes essentialists : « My view exploits the idea that to explain the behavior of an entity, one deduces the behavior from the essence or nature of the entity » (cf. Steiner [1978a], p. 143). Admettant les problèmes contemporains avec l'essentialisme, Steiner propose qu'on remplace la notion de l'essence avec la notion d'une « propriété caractérisante », « by which I mean a property unique to a given entity or structure within a *family* or domain of such entities of structures » (*Ibid.*, p. 143). Alors une preuve explicative d'une proposition doit montrer que la proposition « dépende » sur une propriété caractérisante d'un objet ou structure figurant sur la proposition. Il précise la notion de dépendance de la façon suivante :

It must be evident, that is, that if we substitute in the proof a different object of the same domain, the theorem collapses; more, we should be able to see as we vary the object how the theorem changes in response. In effect, then, explanation is not simply a relation between a proof and a theorem; rather, a relation between an array of proofs and an array of theorems, where the proofs are obtained from one another by [a] “deformation”. . . . (Cf. *Ibid.*, p. 143.)

En variant les preuves, on trouve des nouvelles preuves de nouveaux théorèmes dans une façon systématique.

Pour illustration cette analyse de l'explication, Steiner présente pour exemple la proposition que la somme des premiers n nombres impairs est n^2 . Il compare la preuve par récurrence à la preuve attribuée à Gauss :

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3) + (2n - 1) &= S \\ (2n - 1) + (2n - 3) + \cdots + 5 + 3 + 1 &= S \end{aligned}$$

On peut additionner les deux lignes, colonne par colonne, obtenant

$$\underbrace{2n + 2n + \cdots + 2n}_{n \text{ fois}} = 2S$$

et alors $2n \cdot n = 2S$, et donc $S = n^2$, l'objectif.

Steiner dit que cette preuve utilise pour propriété caractérisante les propriétés de symétrie de la somme $1 + 2 + \dots + n$; et qu'on peut varier la symétrie pour obtenir des nouveaux théorèmes. Par contre, la preuve par récurrence n'utilise aucune propriété caractérisante. Elle caractérise l'ensemble des entiers, mais cet ensemble ne figure pas sur le théorème (cf. Lange [2009] aussi).

Steiner suggère aussi que son analyse comprend l'explication par généralisation. Il réexamine la preuve du théorème des nombres premiers par l'analyse complexe et observe que « to characterize the primes may take the full resources of complex analysis » (*Ibid.*, p. 146). Donc la généralisation semble indiquer les propriétés caractérisantes, selon Steiner.

Ensuite on considère l'objection à cette théorie de l'explication de Resnik et Kushner [1987]. L'objection traite le théorème des valeurs intermédiaires : si une fonction réelle f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a) < c < f(b)$, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = c$. En gros, la preuve commence avec l'ensemble A de tout réel $t \in [a, b]$ tel que $f(t) < c$. Il existe une borne supérieure de A , soit x . Puisque f est continue, $f(x)$ est définie. On prouve par l'absurde que $f(x) = c$. Si $f(x) < c$, alors par continuité on peut choisir un point y à la droite de x tel que $f(y) < c$. Cela contredit la supposition que x est une borne supérieure. On argue de la même façon pour $f(x) > c$.

De cette preuve, Resnik and Kushner disent :

We find it hard to see how someone could understand this proof and yet ask *why* the theorem is true (or what makes it true). The proof not only demonstrates how each element of the theorem is necessary to the validity of the proof but also what role each feature of the function and the interval plays in "making" the theorem true. Moreover, it is easy to see that the theorem fails to hold if we drop any of its conditions. (Cf. *Ibid.*, p. 149.)

Donc ils concluent que cette preuve est explicative. Or, la preuve ne vérifie pas les conditions de l'analyse de Steiner. Ils disent que la preuve n'est pas déformable; on ne peut pas varier la preuve pour trouver des nouvelles preuves de nouveaux théorèmes. De plus, il n'est pas clair que la preuve utilise une propriété caractérisante, parce qu'il est difficile d'identifier quelles fonctions ou intervalles particulières sont pertinentes, et donc quelles propriétés caractérisantes sont pertinentes.

L'essentialisme de mathématiques à rebours

Ensuite on discutera une autre tentative de réaliser l'analyse essentialiste de l'explication d'Aristote, par des gens improbables : les mathématiciens à rebours, en particulier Stephen Simpson et Harvey Friedman. On présentera le projet des mathématiques à rebours d'abord, et ensuite on liera ces travaux au cadre aristotélicien.

Le langage de l'arithmétique de second ordre est ordonné en deux parties. Il existe deux sortes de variables qui se réfèrent à deux types d'objets. Les variables de la première sorte sont les variables d'individu, notées par $i, j, k, m, n \dots$, et se réfèrent aux entiers. Les variables de la deuxième sorte sont les variables d'ensemble, notée par $X, Y, Z, \dots$, et se réfèrent aux ensembles d'entiers. Les deux sortes de variables peuvent être quantifiées universellement ou existentiellement. Enfin, les constantes du langage sont 0, 1, les fonctions sont $S, +, \cdot$, et la relation est $<$. L'arithmétique de second ordre (appelée Z_2) est une théorie de ce langage dont les axiomes sont en gros ceux de l'arithmétique de Peano.

Un sous-système de Z_2 est une théorie dont les axiomes sont des théorèmes de Z_2 . On discutera certains sous-systèmes de Z_2 qui se caractérisent par ses axiomes d'existence d'ensembles, et donc par leurs instances du schéma de compréhension. Les sous-systèmes de Z_2 d'intérêt sont suffisants par la formalisation d'une partie importante des mathématiques ordinaires.

Pour discuter un premier sous-système de Z_2 il faut introduire la notion d'une formule *arithmétique*, une formule sans quantificateurs d'ensembles, c'est-à-dire. Une formule arithmétique n'a que des quantificateurs d'individus, des entiers. Considérons par exemple $\forall n(n \in X \rightarrow \exists m(m + m = n))$ qui dit que tout élément de l'ensemble X est pair, et $\forall m \forall k(n = m \cdot k \rightarrow (m = 1 \vee k = 1)) \wedge n > 1 \wedge n \in X$ qui dit que n est premier et élément de X . Par contre, une formule non arithmétique est

$$\exists Y \forall n(n \in X \leftrightarrow \exists i \exists j(i \in Y \wedge j \in Y \wedge i + n = j))$$

qui dit que X est l'ensemble de différences d'éléments d'un certain ensemble Y .

Le schéma de la *compréhension arithmétique* est la limitation du schéma de compréhension aux formules arithmétiques :

$$\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$$

où $\varphi(n)$ est une formule arithmétique de $\mathcal{L}_{Z_2}$. On appelle ACA_0 le sous-système de Z_2 dont on limite la portée du schéma de compréhension aux formules arithmétiques. Ainsi le nom ACA_0 signifie « arithmetical comprehension axiom ». Dans ACA_0 on peut définir l'ensemble $\mathbb{N}$, les entiers, par la formule $n = n$. Donc par le schéma de compréhension arithmétique, ACA_0 implique que l'ensemble $\mathbb{N}$ existe. On peut ensuite définir les relatifs $\mathbb{Z}$ et les rationnels $\mathbb{Q}$. On peut ensuite définir les nombres réels comme suites de Cauchy de nombres rationnels. Parce que les nombres réels sont des suites et donc des ensembles, on ne peut pas définir l'ensemble $\mathbb{R}$ dans ACA_0 : il serait un ensemble d'ensembles. Quand même, une grande partie de l'analyse dénombrable est formalisée dans ACA_0 , et en fait dans des sous-systèmes de ACA_0 , qui seront discutés plus tard.

Pour distinguer les prochains sous-systèmes de Z_2 , il faut introduire la *hiérarchie arithmétique*. Les expressions $\forall n < t, \exists n < t$ sont des quantificateurs bornés ; du coup la formule $\forall m < 2n (m \in X \leftrightarrow \exists k < m (m = 2k + 1))$ qui dit que les premiers n éléments de X sont $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$, emploie des quantificateurs bornés. En général on a la hiérarchie suivante :

- formules Δ_0^0 : des formules atomiques du premier ordre avec des quantificateurs bornés
- formules Σ_1^0 : $\exists x \varphi(x, \bar{y})$, pour $\varphi \in \Delta_0^0$
- formules Π_1^0 : $\forall x \varphi(x, \bar{y})$, pour $\varphi \in \Delta_0^0$
- formules Δ_1^0 : Σ_1^0 et Π_1^0 à la fois
- formules Σ_n^0 : $\exists x \varphi(x, \bar{y})$, pour $\varphi \in \Pi_{n-1}^0$
- formules Π_n^0 : $\forall x \varphi(x, \bar{y})$, pour $\varphi \in \Sigma_{n-1}^0$
- formules Δ_n^0 : Σ_n^0 et Π_n^0 à la fois

On peut classer la complexité d'une formule par sa place dans cette hiérarchie, qui mesure le nombre de d'alternance de blocs de quantificateurs qui précèdent une formule Δ_0^0 .

Cette hiérarchie permet la limitation des schémas d'induction et de compréhension, de la façon suivante. Le schéma d'induction Σ_1^0 est la limitation de l'axiome d'induction aux formules Σ_1^0 de $\mathcal{L}_{Z_2}$. C'est-à-dire,

$$(\varphi(0) \wedge \forall n (\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1))) \rightarrow \forall n \varphi(n)$$

où $\varphi(n)$ est une formule Σ_1^0 de $\mathcal{L}_{Z_2}$. Ensuite, le schéma de compréhension Δ_1^0 est la limitation du schéma de compréhension aux formules Δ_1^0 de $\mathcal{L}_{Z_2}$. C'est-à-dire, il se compose des formules de la forme

$$\forall n (\varphi(n) \leftrightarrow \psi(n)) \rightarrow \exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$$

où $\varphi(n)$ est une formule Σ_1^0 et $\psi(n)$ est une formule Π_1^0 .

Alors on peut définir un autre sous-système important de Z_2 . RCA_0 est le sous-système de Z_2 dont on limite le schéma de compréhension arithmétique au schéma de compréhension Δ_1^0 et l'induction au schéma d'induction Σ_1^0 . Le nom RCA_0 signifie « recursive comprehension axiom », parce qu'on dit qu'un ensemble Δ_1^0 est recursive au sens de la théorie de la calculabilité. Dans RCA_0 on peut faire une grande partie des mathématiques calculables. On peut prouver aussi, par exemple, le théorème de Baire, le théorème des valeurs intermédiaires, les théorèmes de validité et complétude, et l'existence d'un clôture d'un corps dénombrable (tous suffisamment formalisés).

Considérons ensuite le théorème de Bolzano et Weierstrass (BW) : de toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente. On peut prouver BW dans ACA_0 . On peut prouver aussi que BW n'est pas démontrable dans RCA_0 .³ Il est remarquable qu'on puisse prouver aussi que BW implique ACA_0 , et que cette implication soit valide dans RCA_0 , ayant suffisamment de ressources pour travailler avec les ensembles pertinents. Ainsi on a démontré les axiomes en utilisant un théorème. On a ainsi « renversé » l'ordre normal de la pratique mathématique, et ceci justifie le nom « mathématiques à rebours » (« reverse mathematics »).

Parce qu'on peut formuler la preuve de BW dans ACA_0 comme une preuve que ACA_0 implique BW dans RCA_0 , on écrit le résultat de ce « renversement » dans la façon suivante : le théorème de Bolzano et Weierstrass est *équivalent* à ACA_0 , cette équivalence étant démontrable dans RCA_0 . On dit par conséquent que ACA_0 est le sous-système de Z_2 le plus faible dans lequel on peut démontrer le théorème de Bolzano et Weierstrass. De même, on a des renversements pour Π_1^1 - CA_0 dans RCA_0 : par exemple, le théorème de Cantor et Bendixson.

Un autre sous-système de Z_2 important pour les renversements des théorèmes des mathématiques ordinaires est WKL_0 : RCA_0 augmenté par le lemme faible de König, qui assure l'existence de chemins à travers les arbres binaires infinis. Le nom de ce sous-système indique « weak König's lemma » en anglais. On peut prouver que le théorème des valeurs extrêmes, qui dit qu'une fonction réelle continue sur $[0, 1]$ possède un maximum, est équivalent à WKL_0 dans RCA_0 ; de même pour le théorème de Heine-Borel, le théorème de complétude de Gödel, le théorème de Hahn-Banach, que toute fonction réelle continue sur

3. En général on peut formaliser les « contre-exemples brouweriens » (cf. Mandelkern [1989]) pour prouver des résultats de non démontrabilité dans RCA_0 : par exemple, pour le théorème de Heine-Borel et le théorème des valeurs extrêmes qui dit qu'une fonction réelle continue sur $[0, 1]$ possède un maximum.

$[0, 1]$ admet une intégrale de Riemann, que tout corps dénombrable de caractéristique 0 admet un clôture algébrique unique, etc. WKL_0 est beaucoup plus fort que RCA_0 par rapport à sa force logique. En particulier il permet la démonstration des résultats non constructifs.

Il existe aussi d'autres sous-systèmes importants de Z_2 , par exemple ATR_0 , pour « arithmetic transfinite recursion ». Sa définition est trop compliquée pour ce livre, mais pour illustrer sa puissance, notons que l'existence d'un ensemble parfait est équivalent à ATR_0 dans RCA_0 , par exemple. On dit que RCA_0 , WKL_0 , ACA_0 , ATR_0 , et $\Pi^1_1\text{-}CA_0$ composent ensemble le « Big Five », les sous-systèmes de Z_2 les plus importants par rapport au grand nombre des théorèmes admettant un renversement dans RCA_0 .⁴

Le projet de mathématiques à rebours est important pour la philosophie des mathématiques de plusieurs façons. D'abord, Simpson [2009] (p. 42) dit qu'on peut « calibrer » un grand nombre de théorèmes des mathématiques ordinaires en cherchant auquel sous-système de Z_2 un théorème est équivalent sur RCA_0 . Les sous-systèmes de Z_2 peuvent être ordonnés par leur *force logique*, où une théorie est plus forte qu'une autre si la première peut prouver la consistance de la seconde. Simpson soutient aussi que les sous-systèmes du Big Five correspondent aux programmes célèbres de la philosophie des mathématiques : en particulier, RCA_0 correspond au constructivisme de Bishop [1967] ; WKL_0 au finitisme de Hilbert (argué par Simpson [1988]) ; et ACA_0 au prédicativisme de Weyl [1918] et Feferman [2005]. Eastaugh [2019] discute cette position et des autres sur la signification de renversements.

Mais l'objectif de cette section est de souligner comment les mathématiques à rebours réalisent l'analyse aristotélicienne de l'explication mathématique comme démonstration de l'essence. On note, d'abord, que les créateurs des mathématiques à rebours ont envisagé leur projet comme une recherche des essences mathématiques. La section I.9 de Simpson [2009] s'ouvre avec la citation suivante d'Aristote :

Or la conversion a plutôt lieu en mathématique, parce qu'on n'y admet rien d'accidentel (c'est encore une différence avec les discussions dialectiques), mais <seulement> des définitions. (Cf. *Seconds Analytiques* 78a11–12; Aristote [2014], p. 232.)

Cette citation philosophique est frappant pour un texte mathématique. Elle

4. Cf. Dean et Walsh [2017] pour une discussion de pourquoi ces cinq sous-systèmes sont l'objet d'attention de nombreux logiciens même avant les mathématiques à rebours. Pour des autres sous-systèmes remarquable de Z_2 et leurs relations entre-eux, on peut regarder le site web <https://rmzoo.math.uconn.edu>, le « Reverse Mathematics Zoo ».

indique un objectif crucial pour les mathématiques à rebours : de trouver les définitions réelles chez Aristote, en trouvant les renversements (les « conversions » dont parle Aristote). Dans la Section 1. 3, la question de comment identifier les définitions réelles, qui exprime les essences, se pose.

Simpson et Friedman ont fait claire leur intention de répondre à cette question. Friedman décrit ses travaux des mathématiques à rebours dans la façon suivante :

The questions underlying the work presented here on subsystems of second order arithmetic are the following. What are the proper axioms to use in carrying out proofs of particular theorems, or bodies of theorems, in mathematics? What are those formal systems which isolate the essential principles needed to prove them?...When the theorem is proved from the right axioms, the axioms can be proved from the theorem. (Cf. Friedman [1975], p. 235.)

Et Simpson parle de ses travaux d'une façon analogue :

What are the appropriate axioms for mathematics ? We undertake a series of case studies to discover what are the appropriate axioms from proving particular theorems in core mathematical areas such as algebra, analysis, and topology. (Cf. Simpson [2009], p. xiii.)

Selon les créateurs des mathématiques à rebours affirment qu'un renversement révèle quels axiomes sont « right », « proper », « essential », et « appropriate ».

Que les démonstrations scientifiques elles-mêmes puissent jouer un rôle dans la recherche des essences, est déjà admis par Aristote, qui écrit :

[D]u « ce que c'est » il n'y a ni syllogisme ni, plus précisément, démonstration, et pourtant c'est à travers un syllogisme et plus précisément une démonstration qu'il devient évident. De sorte que ni il n'est possible de connaître le « ce que c'est »...sans démonstration, ni il n'y a de démonstration du « ce que c'est »... (Cf. *Seconds Analytiques* 93b15–19; Aristote [2014], p. 276)

Ainsi les démonstrations scientifiques aident à révéler les essences, en identifiant les premiers principes exigés d'une déduction causale. C'est ici où la citation aristotélicienne de Simpson joue son rôle : un renversement, une « conversion », indique qu'une définition réelle, qui exprime le « ce que c'est », est trouvée. Une condition nécessaire et suffisante du type donnée par un renversement indique qu'une cause est trouvée.

Cette proposition, que le projet des mathématiques à rebours réalise l'analyse aristotélicienne de l'explication, n'est qu'une tentative. On peut reconsidérer le théorème de Bolzano et Weierstrass (BW), et demander la question : pourquoi peut-on extraire de toute suite bornée de nombres réels une sous-suite convergente ? On a le théorème que BW est équivalent à ACA_0 sur RCA_0 . Donc la réponse à la question de pourquoi, la cause de BW, est ACA_0 . Ce sous-système est la définition réelle, exprimant l'essence, d'une suite (calculable) de nombres réels (calculables), comme suite de Cauchy de nombres rationnels.

On peut riposter en notant les propositions des mathématiques à rebours sont toutes formalisées d'une manière arithmétique, et que cette formalisation dénature ces propositions à tel point que les essences identifiées n'ont aucun rapport clair avec les « vraies » essences mathématiques. Friedman et Simpson notent que le codage arithmétique de l'analyse engendre des différences entre les propositions formelles qui n'existent pas au niveau informel (cf. Friedman et Simpson [2000], p. 134). Par exemple, les réels peuvent être définis comme suites de Cauchy et comme coupures de Dedekind. Ces constructions sont équivalentes dans le cadre de l'analyse informelle. Toutefois, dans RCA_0 ces définitions ne sont pas équivalentes, une conséquence du codage. Friedman et Simpson posent la question de l'optimalité d'un codage, que aucun autre codage fait mieux, et conjecturent que leur codage est optimal. Mais ce problème est un cas d'un problème plus général : la relation entre les mathématiques informelles et les mathématiques formalisées. Toute tentative d'utiliser les moyens formels pour analyser les phénomènes informels se trouve confrontée à ce problème. Donc aucune solution à ce problème général se présente ici.

1. 4 Conclusions sur l'explication

On a considéré de nombreuses tentatives d'analyser l'explication mathématiques. Malgré ses aspects positifs, chaque tentative est bien limitée. Il semble que la position la plus rationnelle jusqu'ici est cela de Hafner et Mancosu [2005] (p. 222) : « We maintain that mathematical explanations are heterogeneous ». Plutôt que d'essayer de justifier une seule analyse de l'explication, on devrait essayer de classifier les variétés de l'explication mathématique, notant les connections avec des autres valeurs mathématiques comme la pureté des méthodes, vers laquelle nous tournons notre attention.

2. La pureté

Dans *The Educational Times*, une revue connue pour ses listes de problèmes pour les étudiants de mathématiques, J.J. Sylvester a publié le problème suivant : « Prove that it is not possible to arrange any finite number of real points so that a right line through every two of them shall pass through a third, unless they all lie in the same right line » (cf. Sylvester [1893], p. 98). Apparemment ignorant du problème de Sylvester, Paul Erdős a publié le même problème dans le *American Mathematics Monthly* (AMM) cinquante ans plus tard : « If a finite set of points in the plane are not all on one line then there is a line through exactly two of the points » (cf. Erdős [1943], p. 65).

L'AMM demande à ses contributeurs de problèmes qu'ils fournissent aussi une solution. Erdős a fourni une solution *affine* par Tibor Gallai, utilisant des propriétés de parallèles. En 1944 l'AMM publie une solution *projective*, trouvée indépendamment par Robert Steinberg, R.C. Buck, et Norman Steenrod. En 1948 l'AMM a publié une autre solution, par L.M. Kelly, dans le cadre d'une discussion entre Kelly et le géomètre célèbre H.S.M. Coxeter. Selon Coxeter,

Synthetic geometry is ultimately based on certain primitive concepts and axioms, appropriate to the particular kind of geometry under consideration (e.g. projective or affine, real, complex, or finite). Each problem belongs to one kind (or to a few kinds), and I would call a solution synthetic if it remains in that kind, analytic if it goes out. (Cf. Coxeter [1948], p. 26.)

Pour illustrer cette distinction, il discute le problème de Sylvester, donnant la solution de Kelly.

Cette solution vise la formulation suivante du problème de Sylvester : soit $\mathcal{P}$ une famille finie de points du plan qui ne sont pas tous alignés : alors il existe toujours une droite qui passe par deux points de $\mathcal{P}$ et pas plus. Elle se déroule de la façon suivante. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble de droites qui passent par au moins deux points de $\mathcal{P}$. Parmi les (P, ℓ) avec P un point de $\mathcal{P}$ qui n'est pas situé sur $\ell \in \mathcal{L}$, soit (P_0, ℓ_0) tel que la distance entre P_0 et ℓ_0 est la plus petite. Soit Q le point de ℓ_0 le plus proche à P_0 . On prouve que ℓ_0 passe par exactement deux points, et est la droite recherchée.

Supposons que ℓ_0 passe par au moins trois points de $\mathcal{P}$. Alors au moins deux points, soient P_1 et P_2 , sont au même côté de Q sur ℓ_0 . Soit P_1 entre Q et P_2 . P_0 and P_2 déterminent une droite ℓ_1 . La distance entre P_1 et ℓ_1 est moins que la distance entre P_0 et ℓ_0 (par des propriétés élémentaires de triangles). Cela

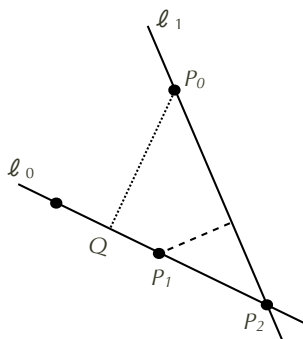


FIGURE 7.2 – La solution du problème de Sylvester par Kelly

contredit la supposition que la distance de (P_0, ℓ_0) est minimale.

Sur cette démonstration, Coxeter remarque : « It seems to me that parallelism and distance are essentially foreign to [Sylvester's] problem, which is concerned only with incidence and order. Thus I would not regard the proofs of [Gallai] and Kelly as strictly synthetic » (*Ibid.*, p. 27). La terminologie de « synthétique » et « analytique » est trompeuse, évoquant un phénomène géométrique quand la question est plus générale. La chose importante selon Coxeter est que l'utilisation de distance par Kelly est « étrangère » au problème, qui ne s'occupe que de l'incidence et l'ordre. Par contre Coxeter donne sa propre preuve qui n'utilise que la géométrie ordonnée (cf. Coxeter [1989], pp. 181–2), une preuve « native » au problème par son critère.⁵

Aujourd'hui on formule ces préoccupations en termes de *pureté*. Grosso modo, une démonstration d'un théorème, est *pure* quand elle se limite aux considérations « proche » ou « intrinsèque » du théorème démontré ; de même pour une solution à un problème. En outre, une démonstration pure évite ce qui est « extrinsèque », « étranger », « éloigné », ou « extérieur » au théorème de l'enquête.

La pureté a été important pour la pratique mathématique depuis l'antiquité, malgré les évolutions des cadres philosophiques et mathématiques depuis lors. Nombreux mathématiciens ont jugé l'application de l'algèbre à la géométrie chez Descartes d'être « assez loin » des problèmes géométriques. Par exemple, Newton réagit fortement contre l'algébrisation de la géométrie, disant que cette

5. Pour une analyse riche de cette question d'une perspective axiomatique, qui souligne les connections avec la géométrie à rebours, cf. Pambuccian [2009].

application est « contrary to the first Design of this Science » et que les théorèmes géométriques exigent des démonstrations géométriques (cf. Newton [1720], pp. 229–30).

La controverse du XX^{ème} siècle sur les démonstrations complexe-analytique du théorème des nombre premiers de Hadamard et de la Vallée Poussin, discutée en Section 1. 1, est un autre exemple de la pureté. Dans la théorie analytique des nombres, on utilise les nombres imaginaires pour résoudre des problèmes purement arithmétiques. Des mathématiciens se demandent si ces moyens « étrangers » peuvent être évités; par exemple, A.E. Ingham se demande cette question :

The solution just outlined may be held to be unsatisfactory in that it introduces ideas very remote from the original problem, and it is natural to ask for a proof of the prime number theorem not depending on the theory of a complex variable. (Cf. Ingham 1932, pp. 5–6)

Selberg et Erdős ont trouvé une telle solution; Selberg a par conséquent reçu la médaille Fields.⁶

Un dernier exemple de la pureté dans la pratique mathématique est le cas du théorème de Briançon-Skoda (cf. Briançon et Skoda [1974]). Le théorème dit : soit R un anneau d'une série entière formelle ou un anneau d'une série entière convergente, en d variables, et soit I un idéal de R . Alors $\overline{I^d} \subseteq I$, où $\overline{I}$ est une *clôture intégrale* d'un idéal I . La première preuve de ce théorème est analytique. Des algébristes ont répondu de la façon suivante :

The proof given by Briançon and Skoda of this completely algebraic statement is based on a quite transcendental deep result of Skoda. ... The absence of an algebraic proof has been for algebraists something of a scandal—perhaps even an insult—and certainly a challenge. (Cf. Lipman et Teissier [1981], p. 97)

Ils donnent ensuite une preuve purement algébrique qui satisfait ce « scandale », une preuve pure.

On cherche à clarifier la nature de la pureté, et à montrer comment la pureté contribue à la compréhension mathématique. On ne suppose pas que tous les mathématiciens veuillent la pureté; on esquissera les contours de la valeur de l'impureté à la fin de cette section. Néanmoins, la pureté a été importante pour

6. Cf. Selberg [1949] et Erdős [1949] pour les démonstrations; et Bachelard [1967], Avigad [2003] et Arana [2011] pour des discussions philosophiques de l'analyse complexe et la pureté.

les mathématiciens pour deux mille siècles, et sa nature et sa valeur exigent une certaine attention philosophique.

Deux questions concentrent les incertitudes sur la pureté.

1. Comment mesurer la « distance » entre un théorème et une preuve, ou entre un problème et une solution ?
2. Pourquoi veulent-ils la pureté les mathématiciens ? (Et sont-ils raisonnables ainsi ?)

Les réponses à la question (1) déterminent une multiplicité de versions de la pureté, et par conséquent la question (2) doit être posée pour toute telle version. La question (1) est étroitement liée à ce que Jean-Michel Salanskis appelle la « géographicité des mathématiques » : « le fait que la mathématique se divise, et ce, depuis toujours » (cf. Salanskis [2008], p. 175). Tout le monde reconnaît que l'arithmétique et la géométrie sont distinctes, par exemple. Selon le Mathematics Subject Classification de la American Mathematical Society, les mathématiques peuvent être divisées en, d'une part les mathématiques discrètes (y compris l'arithmétique et l'algèbre) et, d'autre part, l'analyse et la géométrie. Ces divisions permettent aux mathématiciens d'assimiler des familles des propositions, de façon à ce qu'ils puisse regarder les articles les plus récentes de sa spécialité sans avoir besoin de regarder les articles de la théorie des nombres, par exemple. Mais la distance entre un théorème et une preuve n'est pas forcément déterminée par cette classification bien connue. On considérera des mesures plus fines aussi.

2. 1 Les variétés de la pureté

Une première version de la pureté se concentre sur les mathématiques formelles. Dans ce cadre on peut mesurer la distance entre un théorème et une preuve par le nombre de formules dans la preuve qui sont des sous-formules du théorème. Si toutes les formules dans la preuve sont des sous-formules du théorème (donc vérifiant ce qui est appelé la « propriété de la sous-formule » par Gentzen), alors on dit que la preuve est *syntactiquement pure*. Les conditions sous lesquelles un théorème admet une preuve syntactiquement pure sont analysées dans Arana [2009] ; en particulier la propriété de la sous-formule est valide dans les systèmes logiques vérifiant le théorème d'élimination des coupures, y compris les systèmes dont les axiomes sont tous logiques mais pas

les systèmes dont des axiomes sont mathématiques (cf. Girard [1987], p. 104). Puisqu'il s'agit d'un critère qui s'applique uniquement au système logique, la propriété de la sous-formule ne peut pas être un critère de la pureté mathématique, puisque les mathématiques commencent précisément où la logique pure s'arrête.

Ensuite, on peut mesurer la distance entre un théorème et une preuve par le nombre d'étapes de la preuve qui ne sont pas logiquement nécessaire pour démontrer le théorème. Si la preuve n'utilise que des étapes logiquement nécessaire, alors on dit que la preuve s'est appelée *logiquement pure* (cf. Arana [2008]). Cette propriété est indiquée par un renversement des mathématiques à rebours, par exemple, comme discuté dans la section 1. 3. Par exemple, puisque le théorème de Bolzano et Weierstrass est équivalent à ACA_0 dans RCA_0 , une preuve du théorème de Bolzano et Weierstrass n'utilisant que ACA_0 est logiquement pure. Un autre exemple est donné par Richard Shore, en discutant un problème de la combinatoire. Ron Aharoni a résolu un problème combinatoire de Erdős en utilisant des méthodes ensembliste (e.g. l'axiome de choix, la récurrence transfinie). Il se pose la question de savoir s'il peut éviter ces méthodes « that seemed outside the usual bound of the subject » (cf. Shore [2010], p. 382). Shore lui suggère d'utiliser les mathématiques à rebours pour déterminer si ces méthodes sont nécessaires, en trouvant un reversement. Enfin, Victor Pambuccian a publié une série d'articles effectuant des renversements géométrique (par exemple, du problème de Sylvester), qui donnent des autres exemples de la pureté logique (cf. Pambuccian [2019]).

La prochaine mesure est étroitement liée à la pureté logique. On on peut mesurer la distance entre un théorème et une preuve par le nombre de éléments dans la preuve qui sont plus « complexe » ou « difficile » du théorème. Une preuve qui n'emploie que des éléments plus « élémentaire » ou « simple » que le théorème s'est appelée *élémentairement pure*. Bien sûr, on n'a aucune mesure précise de simplicité ou d'élémentarité. Dans la théorie analytique des nombres, ce qui est communément admis au sujet de l'élémentarité est que les méthodes riemanniennes (le prolongement analytique, par exemple) ne sont pas élémentaires, tandis que le « direct real variable treatment of arithmetic data, such as the method of Chebyshev » est élémentaire (cf. Diamond [1982], p. 554). Il faut souligner que les méthodes élémentaires ne soient pas forcément faciles à comprendre. Par contre, une preuve élémentaire est souvent plus difficile à comprendre qu'une preuve plus analytique. L'objectif est de classifier la « force mathématique » des méthodes et des propositions, et de limiter les preuves aux méthodes du même niveau de force que le théorème visé. Cette notion de

« force mathématique » est bien informelle; elle ne correspond pas à aucun degré de force logique connue jusqu'ici, ni de la théorie des ensembles, ni des mathématiques à rebours. Donc on traite cette mesure de pureté dans une façon individualisée.

Enfin, on peut mesurer la distance entre un théorème et une preuve par le nombre de éléments de la preuve qui n'appartiennent pas au contenu du théorème. Une preuve dont tout élément appartient au contenu du théorème prouvé est appelée *topiquement pure*. Cette idée de la pureté est notée par David Hilbert :

Le contenu [Inhalt] du théorème de Desargues appartient entièrement à la géométrie plane; mais pour le démontrer, nous devons utiliser l'espace. Ainsi nous sommes pour la première fois dans la situation de mettre en pratique une critique des moyens employés dans une démonstration. Dans les mathématiques modernes, une telle critique a été très souvent soulevée : son but était de préserver la pureté de la méthode [die Reinheit der Methode], c'est-à-dire démontrer des théorèmes si possible en utilisant les moyens qui étaient suggérés par [nahe gelegt] le contenu du théorème. (Cf. Hilbert [2004], p. 315–6; traduction française dans Arana et Mancosu [2015], p. 374.)

On appelle la « topique » d'un théorème ou problème les engagements qui déterminent la compréhension de ce théorème ou problème (relatif à un agent α). La topique d'une proposition se compose de la famille des définitions, axiomes, et inférences telle que si un agent α cessait d'admettre un élément de cette famille, il ne comprendrait plus cette proposition. Par exemple, si l'on cessait d'admettre que tout entier a un successeur, alors on ne comprendrait plus le théorème de l'infinité des nombres premiers (ni les autres théorèmes de l'arithmétique élémentaire). Donc l'axiome que tout entier a un successeur appartient à la topique du théorème de l'infinité des nombres premiers.

Une preuve d'un théorème ou solution d'un problème s'appelle *topiquement pure* quand elle tire seulement des engagements qui appartiennent à la topique du théorème ou du problème. Hilbert donne pour exemple la preuve spatiale du théorème planaire de Desargues; parce que le contenu du théorème planaire n'inclut pas des notions spatiales, cette preuve est jugée topiquement impure. Pour des analyses précises de la différence entre la pureté logique et la pureté topique, cf. Baldwin [2013], en particulier pp. 107–114, et la section 12.3 de Baldwin [2018].

Évidemment la question de la détermination d'une topique est difficile. Par

exemple, considérons la notion d'une ligne droite. Quels définitions, axiomes, et inférences sont impliqués dans notre compréhension de cette notion ? On a déjà vu que pour Coxeter, les notions métriques sont exclues. Par contre, il définit la droite par les propriétés de la relation ternaire « être entre » (en anglais, « betweenness » ; cf. Coxeter [1989], p. 176). Cependant, d'autres mathématiciens définissent la droite par rapport aux propriétés métriques ; par exemple Legendre écrit que « la ligne est le plus court chemin d'un point à un autre » (cf. Legendre [1794], p. 1). On pourrait essayer de déterminer quelle définition est « correcte », mais on s'implique dans un écheveau des problèmes philosophiques sur le langage et sa relation avec la pensée, y compris la question du contenu tacite ou implicite (cf. Arana et Mancosu [2015], section 4.4, pour une tentative). Il vaut mieux s'approcher de cette question en faisant des études de cas qui pourrait servir de base pour les analyses philosophiques.

La discussion de la pureté topique se concentre sur une pureté « locale », qui considère quels éléments appartiennent au contenu du théorème *particulier* visé par la preuve. Par contre, Ferraro et Panza ont étudié une pureté plus « globale », employée par Lagrange dans sa théorie des fonctions analytiques. Lagrange cherche à prouver des théorèmes de l'analyse en n'utilisant que « an algebraic, purely formal theory centered on the manipulation of (finite or infinite) polynomials through the method of indeterminate coefficients », ce que Lagrange appelle « l'esprit de l'analysis » (cf. Ferraro et Panza 2012, p. 96 ; Lagrange 1799, p. 233). Au lieu de chercher des preuves employantes des moyens locaux aux propositions particulières, Lagrange cherche des preuves dans l'ensemble de l'analyse, plutôt que dans la géométrie, par exemple. De cette façon sa contrainte de pureté est plus globale que la pureté topique.

Pour développer cette notion de pureté, Reinhard Kahle et Gabriele Pulcini ont étudié une contrainte de pureté qu'ils nomment la « pureté opérationnelle », qui se limite aux opérations utilisées par un théorème et l'ensemble le plus petit de nombres sous lequel ces opérations sont fermées (cf. Kahle et Pulcini [2018]). Par exemple, la « clôture opérationnelle » de l'addition et la multiplication est l'ensemble des nombres entiers ; et de l'addition, la soustraction, la multiplication et la division, l'ensemble des nombres relatifs. Une preuve opérationnellement pure d'un théorème impliquant la division, comme l'infinité des nombres premiers, peut utiliser toutes les propositions qui traitent les relatifs, même si le théorème ne traite que les entiers. Kahle et Pulcini disent que leur contrainte développe la contrainte étudié par Ferraro et Panza, puisque « l'esprit de l'analyse » peut être compris comme la clôture opérationnelle de son algèbre de polynômes. Comme la pureté de Lagrange, une preuve opéra-

tionnellement pure peut utiliser des moyens au-dessus de ceux contenu dans le théorème visé, stricto sensu ; cette contrainte de pureté est donc plus globale que la pureté topique.

2. 2 La valeur de la pureté

On considère ensuite la question (2) : pourquoi veulent-ils la pureté les mathématiciens ? (Et sont-ils raisonnables ainsi ?) Évidemment cette question doit être relativisée aux versions différentes de la pureté. Dans l'ensemble, toutefois, il y a des réponses générales à (2). Celles-ci incluent que les ressources exigées pour la compréhension d'une preuve pures sont minimisées, parce que tout élément à comprendre dans la preuve doit être compris déjà en comprenant le théorème ; que l'espace de recherche de preuves du théorème est minimisé ; que les preuves pure sont des preuves explicatives ; et que la recherche d'une preuve pure contribue à l'entraînement de l'esprit et la discipline intellectuelle.

Quant à la discipline intellectuelle, le commentaire suivant de Jean Dieudonné est pertinent :

Ma dernière remarque générale concerne un aspect de la Mathématique moderne en quelque sorte complémentaire de ses tendances unificatrices, à savoir sa capacité de dissocier ce qui était indûment confondu . . . Peut-être cette insistance sur la « pureté » des raisonnements paraîtra-t-elle superflue et pédantesque à certains ; pour ma part, je crois que l'on a toujours intérêt à essayer de *comprendre* aussi bien que possible ce que l'on fait, et qu'il y a une grande vertu formatrice pour l'esprit à rechercher dans sa démarche l'économie des moyens et l'adaptation étroite des hypothèses aux conclusions, dans toute la mesure du possible. (Cf. Dieudonné [1964], p. 13.)

En plus de la valeur de la recherche de la pureté pour l'amélioration du développement intellectuel des mathématiciens, Dieudonné suggère que les preuves pure aident à rendre les théorèmes compréhensibles ; c'est-à-dire, à *expliquer* leurs théorèmes.

Les mathématiciens Gelfond et Linnik donnent aussi son aval à la connection entre la pureté et l'explication :

One cannot talk of rejecting transcendental methods in modern number theory. However, it is the natural desire of an investigator to search for a possible more arithmetic route to the solution of pro-

blems which have an elementary formulation. Besides the obvious methodological value of such a way, it is also important in that it frequently gives a simple and natural view of the theorem obtained and the reasons underlying its existence. (Cf. Gelfond et Linnik [1966], pp. ix–x)

Une preuve pure révèle les raisons du théorème : encore, une explication.

La connection entre l'explication et la pureté est déjà établie par Aristote. Après avoir donné son compte rendu de la connaissance scientifique et le rôle de démonstrations causales pour fonder cette connaissance, il ajoute que les démonstrations causales sont forcément pures : « Il n'est donc pas possible de prouver en venant d'un autre genre, par exemple ce qui est géométrique par l'arithmétique » (*Seconds Analytiques* 75a39; Aristote [2014], p. 225). Le raisonnement qui traverse les frontières génériques de cette façon s'est appelé *μετάβασις εἰς ἄλλο γένος*, « passage à un autre genre ». Une démonstration avec cette metabasis ne peut fournir la connaissance scientifique.

Comme sa théorie de la connaissance scientifique, cette contrainte aristotélicienne de la pureté est maintenue par beaucoup de mathématiciens, scientifiques, et philosophes depuis l'antiquité.⁷ Dans l'époque moderne cet intérêt pour la pureté est modéré par le déclin de l'aristotélisme et le développement de l'algèbre, en particulier avec son application à la géométrie par Viète et Descartes. Néanmoins, des mathématiciens continuent à appliquer la contrainte aristotélicienne. Il est bien connu que Bolzano critique les preuves géométriques du théorème des valeurs intermédiaires dans le cadre aristotélicien. Ce théorème dit : soit f une fonction réelle continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$; pour tout μ tel que $f(a) < \mu < f(b)$, il existe v tel que $a < v < b$, avec $f(v) = \mu$. Il objecte contre l'utilisation de la proposition suivante pour prouver ce théorème : *toute ligne continue à courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives (ou inversement), doit nécessairement couper quelque part de l'axe des abscisses en un point situé entre ces ordonnées*. Il dit :

Il n'y a absolument rien à objecter ni contre la *justesse* ni contre l'*évidence* de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la *bonne méthode* qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques *pures* (ou

7. La meilleure discussion de l'histoire de l'injonction aristotélicienne contre la metabasis est Livesey [1982]. Livesey note que quelques penseurs médiévaux tolèrent le mélange de l'arithmétique et la géométrie (par exemple, Albert le Grand), et des autres s'y sont opposés (par exemple, Thomas d'Aquin). Cependant la thèse de Livesey ne se focalise pas sur les mathématiques, mais plutôt sur la science de l'antiquité et du Moyen Âge (y compris la philosophie, la théologie, et la médecine).

générales) (c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) de considérations qui appartiennent à une partie *appliquée* (ou spéciale) seule, à savoir à la *géométrie*. N'a-t-on pas, depuis longtemps, senti et reconnu l'incongruité d'une pareille *μετάβασις εἰς ἄλλο γένος*? Ne l'a-t-on pas déjà évité dans cent autres cas, où l'on connaissait le moyen de le faire, éte n'a-t-on pas considéré cette élimination comme un mérite? (Cf. Bolzano [1964], p. 137)

Comme noté dans la section 1. 3, ce que Bolzano voulait critiquer n'est pas l'évidence de la preuve géométrique. Il voudrait trouver les fondements objectifs du théorème, qui causent ou expliquent le théorème. Selon Bolzano, comme Aristote, une démonstration prenante les fondements objectifs pour premisses est une démonstration pure.

Cependant, Lange [2019] conteste la connection entre l'explication mathématique et la pureté, utilisant son analyse de l'explication, une variante de l'essentialisme employant la notion d'une « caractéristique saillant » développée dans Lange [2017]. Il argue que la preuve explicative du théorème planaire de Desargues est la preuve spatiale, bien que cette preuve ne soit pas pure.

Ensuite on considère une autre raison pour préférer la pureté, et en particulier, la pureté topique. On se limite à la solution des problèmes plutôt que la démonstration des théorèmes, bien qu'on peut traduire cette discussion en termes des théorèmes et preuves si nécessaire. Rappelons qu'une solution d'un problème est topiquement pure quand elle tire seulement des engagements qui appartiennent à la topique du problème, c'est-à-dire, aux engagements tels que si l'un agent cessait d'admettre un tel engagement, il ne comprendrait plus ce problème. On rendra compte de la valeur épistémique de la pureté topique en termes de la *stabilité* de la connaissance engendré par une preuve topiquement pure (cf. Detlefsen et Arana 2011).

On commence avec l'observation que la recherche d'une solution à un problème entraîne fréquemment au changement du problème. Je cherche à résoudre un problème sur des paraboles, par exemple, et après ayant saisi les connections avec l'algèbre, je finis avec un problème sur des équations—un problème avec une bonne solution, on imagine, susceptible d'être généralisé aux autres cas. Quand même, je pourrais préférer le problème *original*. On prend une conception *vectorielle* de la résolution de problèmes, où une enquête est dirigée *vers* un problème. Selon cette conception, une solution est une solution à ce problème dans la mesure où elle est dirigée vers *ce* problème et pas un autre. Une solution peut réussir comme une solution à un autre problème

tandis qu'elle ne réussit pas comme une solution au problème auquel elle est dirigée.

La solution d'un problème vise le soulagement de l'ignorance particulière représentée par ce problème. Un problème est un agacement, à enlever par la résolution du problème. En appelant la solution un soulagement, on souligne la connection entre la recherche de la connaissance et la satisfaction du désir identifiée par Aristote en écrivant que tous les humains ont par nature le désir de savoir. De même que la satisfaction d'un désir est un soulagement, la résolution d'un problème l'est aussi.

Toute solution à un problème, pure ou impure, soulage l'ignorance représenté par ce problème. Mais ce soulagement est-il *stable*? Pour décrire notre conception de la stabilité, on s'appuie sur l'observation suivante de Platon :

Posséder une œuvre de ce sculpteur [Dédale] sans qu'elle soit attachée, cela ne vaut pas grand-chose, c'est comme posséder un esclave enclin à s'évader : ils ne restent pas à leur place. Mais une fois la statue attachée, elle est d'une grande valeur, car ce sont là des œuvres parfaitement belles. Pourquoi je te parle de cela ? C'est au sujet des opinions vraies. Car, vois-tu, les opinions vraies, aussi longtemps qu'elles demeurent en place, sont une belle chose et tous les ouvrages qu'elles produisent sont bons. Mais ces opinions ne consentent pas à rester longtemps en place, plutôt cherchent-elles à s'enfuir de l'âme humaine ; elles ne valent donc pas grand-chose, tant qu'on ne les a pas reliées par un raisonnement qui en donne l'explication... Mais dès que les opinions ont été ainsi reliées, d'abord elles deviennent connaissances, et ensuite, elles restent à leur place. (Cf. *Ménon* 97e–98a ; Platon [2011], p. 1086.)

Dans la métaphore de Platon, la différence entre l'opinion vraie et la connaissance est que l'opinion vraie est éphémère mais la connaissance perdure. De même, la connaissance engendrée par une solution à un problème est la meilleure quand elle est stable par rapport aux changements de la situation épistémique du connaisseur, quand elle perdure à travers ces changements. On arguera que les solutions topiquement pures engendrent une connaissance plus stable que la connaissance engendrée par les solutions topiquement impures en général, et donc elles réalisent mieux cet idéal de la connaissance.

La clé est l'observation qu'il existe deux moyens à la solution d'un problème. Premièrement, on peut fournir une réponse au problème. Deuxièmement, on peut *dissoudre* de façon rationnelle le problème. Le second moyen est suggéré

par la étymologie de « résoudre », du Latin *solvere* — relâcher, dégager, délier. Les deux types de solution éliminent l'ignorance particulière représentée par un problème : ou en engendrant la connaissance voulue, ou en éliminant cette ignorance comme l'origine du désir à savoir. Quand l'ignorance représentée par un problème est éliminée pour un agent, par quelques moyens rationnels, ce problème ainsi cesse d'être un problème pour cet agent, et donc ce problème a été résolu.

On parle de moyens rationnels de dissoudre un problème. Plus précisément, on dit qu'un problème est *dissolu* quand, à cause d'un changement des croyances ou engagements du enquêteur sur le contenu du problème, ce problème ne représente plus une ignorance pour cet enquêteur. Comme déjà dit, si je cessais d'admettre que tout entier a un successeur, alors je ne comprendrais plus le théorème de l'infinité des nombres premiers. Par conséquent le problème de l'infinité des nombres premiers aurait été dissolu (pour moi), et donc *résolu* dans le second sens. Mais si je cessais d'accepter que toute fonction holomorphe soit analytique, ma compréhension l'infinité des nombres premiers ne changerais pas, et donc le problème n'aurait pas été dissolu. Par contre, le problème resterait ouvert.

La connection entre la dissolution et la topique est maintenant évidente. Tout changement d'engagement d'un enquêteur sur un élément de la topique d'un problème dissout ce problème pour cet enquêteur. Bien sûr, ce problème pourrait être remplacé par un *autre* problème, peut-être un *meilleur* problème ; mais le problème original n'est plus.

On peut maintenant expliquer la signification de la *stabilité*. Toute solution à un problème est une solution dans le premier sens : elle réponde au problème. Cependant, une solution topiquement pure n'utilise que des éléments de la topique du problème, et donc resterait une solution dans le second sens (la dissolution) malgré tout changement épistémique par rapport aux éléments du problème auquel elle est dirigée. Par contre, cela n'est pas le cas pour les solutions topiquement impures. On peut, par exemple, rejeter une solution topiquement impure parce qu'on ne croit plus qu'un axiome utilisé par la solution qui n'appartient pas à la topique du problème ; dans ce cas le problème pourrait redevenir ouvert, et donc il ne serait plus résolu. La stabilité du fait qu'un problème est résolu est plus assurée par les solutions topiquement pures que par les solutions topiquement impures. Donc les solutions topiquement pures engendrent une connaissance plus stable que la connaissance engendrée par les solutions topiquement impures en général.

2.3 Conclusions sur la pureté

La pureté reste une valeur épistémique aux mathématiciens aujourd'hui, mais l'impureté est encore une valeur importante, et depuis longtemps. D'Alembert écrit de la géométrie analytique, une instance exemplaire de l'impureté, que l'on « arrive presque machinalement à un résultat qui donne le théorème ou le problème que l'on cherchait, et auquel sans cela l'on ne serait point parvenu, ou l'on ne serait arrivé qu'avec beaucoup de peine » (cf. d'Alembert [1751], p. 551). Lagrange souligne encore l'*efficacité* de l'impureté :

Tant que l'Algèbre et la Géométrie ont été séparées, leurs progrès ont été lents et leurs usages bornés ; mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prêté des forces mutuelles et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. (Cf. Lagrange [1876], p. 271.)

Cependant, il n'est pas si clair que les preuves impures sont en général plus simples que les preuves pures, par l'analyse de Arana [2017] qui emploie la théorie de la démonstration.

De plus, Bourbaki insiste sur l'importance de l'impureté par rapport à sa capacité de unifier les mathématiques (cf. Arana [2019]). En fait Bourbaki note que la question de l'unité des mathématiques se révèle même dans la grammaire française, où on écrit normalement « les mathématiques », pluriel, plutôt que « la mathématique ». Dans ce fait linguistique Bourbaki regarde un résultat terrible, « une tendance à un émiettement. . . une tour de Babel de disciplines autonomes, isolées les unes des autres, tant dans leurs buts que dans leurs méthodes, et jusque dans leur langage » (cf. Bourbaki [1948], p. 36). Selon Jean-Jacques Szczeciniarz, penser aux mathématiques comme désunion est à penser superficiellement aux mathématiques ; par contre « to go through the surface and the depth of this landscape amounts to understanding its unity » (cf. Szczeciniarz [2018], p. 264). De même, Alain Connes caractérise cette unité « profonde » des mathématiques de la façon « organique » suivante :

It is virtually impossible to isolate any of the above parts from the others without depriving them from their essence. In that way the corpus of mathematics does resemble a biological entity which can only survive as a whole and would perish if separated into disjoint pieces. (Cf. Connes [2008], p. 2.)

Les suggestions de Szczeciniarz et Connes semblent impliquer que la topique de toute proposition individuelle doit inclure toute proposition mathématique ; sinon, le contenu de cette proposition manquerait d'une partie essentielle. Il

suivrait que la pureté topique soit une contrainte triviale. Par conséquent on ne peut comprendre les mathématiciens qui décrivent leurs activités en termes de la pureté topique, un vrai échec à comprendre la pratique mathématique.

3. Conclusions

Cet article a considéré deux idéaux de preuve, l'explication et la pureté, et les valeurs épistémiques qu'elles expriment. Il existe plusieurs autres idéaux méritant l'attention des philosophes : la simplicité ; la modularité de preuve (cf. Avigad [2019]) ; la profondeur (cf. Arana [2015]) ; la rigueur ; et la visualisabilité (discutée dans Chapitre 9), parmi d'autres. Ce chapitre n'est qu'un début.

Il faut noter en conclusion que ces idéaux ne se contredisent pas forcément. Par exemple, on peut apprécier la pureté et l'impureté à la fois, pour des raisons différentes, parce qu'il existe nombreux preuves de tout théorème (cf. Dawson [2015] et Ordning [2019]). Du coup on recommande une conception « pluraliste » des valeurs épistémiques mathématiques, qui reprend la tendance de la philosophie des science. Selon Hasok Chang, « each and every scientist is driven by a set of epistemic values simultaneously. To pretend that they are or should be devoted to the pursuit of only one epistemic value would be foolish » (cf. Chang [2012], p. 274). La recherche d'une multiplicité de valeurs épistémiques, comme la pureté et l'impureté, contribue à une meilleure et plus complète compréhension des mathématiques. On prend ici la position de Nietzsche, qui écrit :

Il n'y a de vision *qu'en perspective*, de « connaissance » *que perspective* ; et *plus* nous laissons parler les affects sur une chose, plus notre « concept » de cette chose, notre « objectivité » seront complets. (Cf. *Pour une généalogie de la morale* III.12 ; Nietzsche [2000], p. 937.)

Il vaut mieux cultiver une pluralité de valeurs épistémiques pour réussir comme mathématicien, parce que pour savoir il faut savoir de multiples façons, le plus grand nombre possible.

Bibliographie

- A. ARANA : Logical and semantic purity. *Protosociology*, 25:36–48, 2008.
- A. ARANA : On formally measuring and eliminating extraneous notions in proofs. *Philosophia Mathematica*, 17:208–219, 2009.
- A. ARANA : L'infinité des nombres premiers : une étude de cas de la pureté des méthodes. *Les études philosophiques*, 2(97):193–213, 2011.
- A. ARANA : On the depth of Szemerédi's Theorem. *Philosophia Mathematica*, 23(2):163–176, 2015.
- A. ARANA : On the alleged simplicity of impure proof. In R. KOSSAK et P. ORDING, eds : *Simplicity : Ideals of Practice in Mathematics and the Arts*, p. 207–226. Springer, 2017.
- A. ARANA : The disunity of mathematics. Article soumis, 2019.
- A. ARANA et P. MANCOSU : De la relation entre géométrie plane et géométrie solide. In *Infini, logique, géométrie*, p. 325–407. Vrin, Paris, 2015.
- ARISTOTE : *Oeuvres complètes*. Flammarion, Paris, 2014.
- J. AVIGAD : Number theory and elementary arithmetic. *Philosophia Mathematica*, 11:257–284, 2003.
- J. AVIGAD : Modularity in mathematics. *Review of Symbolic Logic*, 2019.
- G. BACHELARD : *L'activité rationaliste de la physique contemporaine*. Presses Universitaires de France, Paris, deuxième éd., 1965.
- S. BACHELARD : *La représentation géométrique des quantités imaginaires au début du XIXe siècle*. Conférences du Palais de la Découverte, Paris, 1967.
- J. BALDWIN : Formalization, primitive concepts, and purity. *Review of Symbolic Logic*, 6 (1):87–128, March 2013.
- J. BALDWIN : *Model Theory and the Philosophy of Mathematical Practice*. Cambridge University Press, Cambridge, 2018.
- E. BISHOP : *Foundations of Constructive Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1967.

- B. BOLZANO : Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 17(2):136–164, 1964.
- N. BOURBAKI : L'architecture des mathématiques. In F. L. LIONNAIS, éd. : *Les grands courants de la pensée mathématique*. Éditions des Cahiers du Sud, 1948.
- J. BRIANÇON et H. SKODA : Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de $\mathbb{C}^n$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série A*, 278:949–951, 1974.
- E. BRIESKORN : Die monodromie der isolierten singularitäten von hyperflächen. *Manuscripta Mathematica*, 2:103–161, 1970.
- G. W. BRUMFIEL : *Partially ordered rings and semi-algebraic geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1979.
- F. CASORATI : *Teorica della funzioni di variabili complesse*, vol. 1. Fratelli Fusi, Pavia, 1868.
- H. CHANG : *Is Water H₂O? Evidence, Realism and Pluralism*. Springer, Dordrecht, 2012.
- D. CHARLES : Definition and Explanation in the *Posterior Analytics* and *Metaphysics*. In *Definition in Greek Philosophy*, p. 286–328. Oxford University Press, Oxford, 2014.
- A. CONNES : A view of mathematics. Draft, 2008.
- H. S. M. COXETER : A problem of collinear points. *American Mathematical Monthly*, 55 (1):26–28, January 1948.
- H. S. M. COXETER : *Introduction to Geometry*. Wiley, New York, second éd., 1989.
- J. L. R. D'ALEMBERT : Application de l'algebre ou de l'analyse à la géométrie. In D. DIDEROT et J. L. R. D'ALEMBERT, éd. : *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, vol. 1. Briasson, David, Le Breton, and Durand, Paris, 1751.
- W. D'ALESSANDRO : Explanation in mathematics : Proofs and practice. *Philosophy Compass*, 2019.
- J. W. DAWSON, JR. : *Why Prove it Again? Alternative Proofs in Mathematical Practice*. Birkhäuser, Heidelberg, 2015.
- W. DEAN et S. WALSH : The prehistory of the subsystems of second-order arithmetic. *Review of Symbolic Logic*, 10(2):357–396, 2017.
- M. DETLEFSEN et A. ARANA : Purity of methods. *Philosophers' Imprint*, 11(2):1–20, January 2011.

- H. G. DIAMOND : Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 7(3):553–589, 1982.
- J. DIEUDONNÉ : *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Hermann, Paris, third éd., 1964.
- B. EASTAUGH : Set existence principles and closure conditions : Unravelling the standard view of reverse mathematics. *Philosophia Mathematica*, 27(2):153–176, 2019.
- G. A. EDGAR, D. HENSLEY et D. B. WEST : Problem 10830. *American Mathematical Monthly*, 109(4):396–397, 2002.
- P. ENGEL : Explication. In M. BLAY, éd. : *Grand dictionnaire de la philosophie*. Larousse, Paris, 2012.
- P. ERDŐS : Problem 4065. *American Mathematical Monthly*, 50(1):65, January 1943.
- P. ERDŐS : On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, 35:374–384, 1949.
- S. FEFERMAN : Systems of predicative analysis. *Journal of Symbolic Logic*, 29:1–30, 1964.
- S. FEFERMAN : Predicativity. In S. SHAPIRO, éd. : *Handbook of the Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford University Press, 2005.
- H. FEIGL : The “orthodox” view of theories : Remarks in defense as well as critique. In M. RADNER et S. WINOKUR, éd. : *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, vol. IV, p. 3–15. University of Minnesota Press, Minneapolis, 1970.
- G. FERRARO et M. PANZA : Lagrange’s theory of analytical functions and his ideal of purity of method. *Archive for History of Exact Sciences*, 66(2):95–197, 2012.
- H. M. FRIEDMAN : Some Systems of Second Order Arithmetic and Their Use. In R. D. JAMES, éd. : *Proceedings of the 1974 International Congress of Mathematicians*, vol. 1, p. 235–242. Canadian Mathematical Congress, Montreal, 1975.
- H. M. FRIEDMAN et S. G. SIMPSON : Issues and problems in reverse mathematics. In P. CHOLAK, S. LEMPP, M. LERMAN et R. A. SHORE, éd. : *Computability Theory and Its Applications : Current Trends and Open Problems*, num. 257 de Contemporary Mathematics, p. 127–144. American Mathematical Society, Providence, 2000.
- M. FRIEDMAN : Explanation and scientific understanding. *The Journal of Philosophy*, 71(1):5–19, January 1974.
- S. GANDON et I. SMADJA : Présentation. *Les Études philosophiques*, 97(2):147–152, 2011.
- A. O. GELFOND et Y. V. LINNIK : *Elementary Methods in the Analytic Theory of Numbers*. MIT Press, Cambridge, MA, 1966.

- J. GERGONNE : Géométrie de situation. recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres. *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, 17:214–252, 1826–1827.
- J.-Y. GIRARD : *Proof Theory and Logical Complexity*, vol. 1. Bibliopolis, Napoli, 1987.
- M. GRIER : Kant on the illusion of a systematic unity of knowledge. *History of Philosophy Quarterly*, 14(1):1–28, 1997.
- J. HAFNER et P. MANCOSU : The varieties of mathematical explanation. In P. MANCOSU, K. F. JØRGENSEN et S. A. PEDERSEN, édés : *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*, p. 215–250. Springer, Dordrecht, 2005.
- C. HEMPEL : *Philosophy of Natural Science*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1966.
- D. HILBERT : *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891–1902*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- A. INGHAM : *The distribution of prime numbers*. Cambridge University Press, Cambridge, 1932.
- R. KAHLE et G. PULCINI : Towards an operational view of purity. In P. ARAZIM et T. LÁVIČKA, édés : *The Logica Yearbook 2017*. College Publications, 2018.
- P. KITCHER : Explanatory unification. *Philosophy of Science*, 48(4):507–531, December 1981.
- P. KITCHER : Explanatory unification and the causal structure of the world. In P. KITCHER et W. SALMON, édés : *Scientific Explanation*, p. 410–505. University of Minnesota Press, Minneapolis, 1989.
- J.-L. LAGRANGE : Discours sur l'objet de la théorie des fonctions analytiques. *Journal de l'École Polytechnique*, 2(6):232–235, 1799.
- J.-L. LAGRANGE : Leçons sur mathématiques elementaires. In *Oeuvres de Lagrange*, vol. VII. Gauthier-Villars, Paris, 1876.
- M. LANGE : Why proofs by mathematical induction are generally not explanatory. *Analysis*, 69(2):203–211, 2009.
- M. LANGE : *Because Without Cause : Non-Causal Explanations in Science and Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2017.
- M. LANGE : Ground and explanation in mathematics. *Philosophers' Imprint*, 19(33):1–18, 2019.
- A.-M. LEGENDRE : *Éléments de Geometrie*. Firmin Didot, Paris, 1794.
- J. LIPMAN et B. TEISSIER : Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals. *Michigan Mathematical Journal*, 28:97–116, 1981.

- S. LIVESSEY : *Metabasis : the Interrelationship of the Sciences in Antiquity and the Middle Ages*. Thèse de doctorat, University of California, Los Angeles, 1982.
- P. MANCOSU : Mathematical explanation : Problems and prospects. *Topoi*, 20(1):97–117, 2001.
- P. MANCOSU et J. HAFNER : Beyond unification. In P. MANCOSU, éd. : *The Philosophy of Mathematical Practice*, p. 151–178. Oxford University Press, Oxford, 2008.
- M. MANDELKERN : Brouwerian counterexamples. *Mathematics Magazine*, 62(1):3–27, 1989.
- I. NEWTON : *Universal arithmetick*. J. Senex, W. Taylor, T. Warner, and J. Osborn, London, 1720.
- F. NIETZSCHE : *Oeuvres*. Flammarion, Paris, 2000.
- P. ORDING : *99 Variations on a Proof*. Princeton University Press, Princeton, 2019.
- V. PAMBUCCIAN : A reverse analysis of the Sylvester-Gallai theorem. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 50(3):245–260, 2009.
- V. PAMBUCCIAN : Prolegomena to any theory of proof simplicity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 377(2140), 2019.
- C. PINCOCK : The unsolvability of the quintic : A case study in abstract mathematical explanation. *Philosophers' Imprint*, 15(3):1–19, January 2015.
- PLATON : *Oeuvres complètes*. Flammarion, Paris, 2011.
- M. RESNIK et D. KUSHNER : Explanation, independence and realism in mathematics. *British Journal for the Philosophy of Science*, 38:141–158, 1987.
- J.-M. SALANSKIS : *Philosophie des mathématiques*. Vrin, Paris, 2008.
- J. SEBASTIK : *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*. Vrin, Paris, 1992.
- A. SEIDENBERG : A new decision method for elementary algebra. *Annals of Mathematics*, 60(2):365–374, 1954.
- A. SELBERG : An elementary proof of the prime-number theorem. *Annals of Mathematics*, 50:305–313, 1949.
- R. SHORE : Reverse mathematics : the playground of logic. *Bulletin of Symbolic Logic*, 16(3):378–402, 2010.
- S. G. SIMPSON : Partial realizations of Hilbert's Program. *The Journal of Symbolic Logic*, 53(2):349–363, 1988.
- S. G. SIMPSON : *Subsystems of Second Order Arithmetic*. Cambridge University Press, Cambridge, second éd., 2009.

- M. STEINER : Mathematical explanation. *Philosophical Studies*, 34(2):135–151, 1978a.
- M. STEINER : Mathematics, explanation, and scientific knowledge. *Nous*, 12(1):17–28, 1978b.
- P. STEINKRÜGER : Aristotle on kind-crossing. In V. CASTON, éd. : *Oxford Studies in Ancient Philosophy*, p. 107–158. Oxford University Press, Oxford, 2018.
- J. J. SYLVESTER : Mathematical Question 11851. *Educational Times*, 59:98, 1893.
- J.-J. SZCZECINIARZ : For a continued revival of the philosophy of mathematics. In H. TAHIRI, éd. : *The Philosophers and Mathematics : Festschrift for Roshdi Rashed*, p. 263–295. Springer, Cham, 2018.
- J. TAPPENDEN : Proof style and understanding in mathematics. I. Visualization, unification and axiom choice. In P. MANCOSU, K. F. JØRGENSEN et S. A. PEDERSEN, édés : *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*, p. 147–214. Springer, Dordrecht, 2005.
- A. TARSKI : *A decision method for elementary algebra and geometry*. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, Calif., 1951.
- J. E. TILES : Why the Triangle has Two Right Angles Kath' Hauto. *Phronesis*, 27:1–16, 1983.
- H. WEYL : *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Veit, Leipzig, 1918.