

NOM :

Prénom :

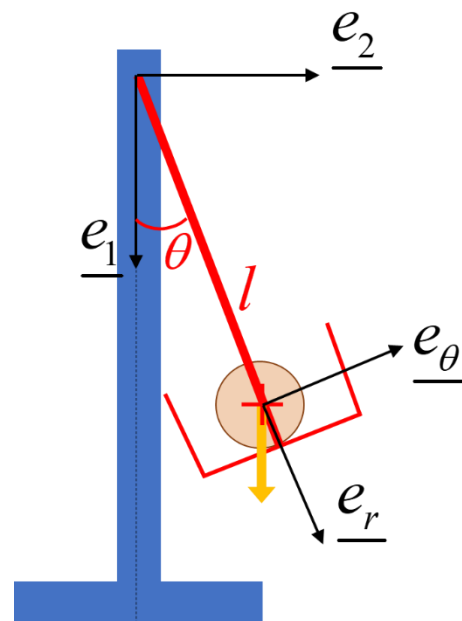
Mécanique des Milieux Continus (MMC)

L'inspiration pour les sujets d'examen est souvent liée au quotidien de l'enseignant qui les composent : sans surprise, on s'intéressera ici au dimensionnement d'un berceau, composé d'une balancelle en mouvement reliée par des cordes à un châssis. On s'intéressera ici à un seul des deux côtés du berceau composé d'une embase, d'un poteau vertical, d'une corde, et d'un ensemble balancelle+bébé en mouvement oscillant.

On cherchera dans les questions qui suivent à déterminer :

- la tension dans la corde, pour pouvoir choisir ses dimensions ;
- la condition de non-basculement du berceau ;
- la déformation dans une partie du châssis, pour pouvoir également la dimensionner.

On s'intéresse dans un premier temps au mouvement de bascule de l'ensemble en mouvement (balancelle+bébé), de masse M^B , et soumis à son poids $\underline{P}$ et à la tension $\underline{T}$ dans la corde qui la relie au châssis.



1. En **coordonnées cartésiennes**, montrer que l'accélération de la masse en mouvement s'écrit sous la forme : $\underline{a} = l\ddot{\theta}(\cos\theta\underline{e}_2 - \sin\theta\underline{e}_1) - l\dot{\theta}^2(\cos\theta\underline{e}_1 + \sin\theta\underline{e}_2)$ (/2)

2. En coordonnées **cylindriques**, montrer que l'accélération de la masse en mouvement s'écrit sous la forme : $\underline{a} = l\ddot{\theta}\underline{e}_\theta - l\dot{\theta}^2\underline{e}_r$ (/2)

3. En s'appuyant sur le PFD appliqué à l'ensemble bébé+balancelle, montrer que la tension dans la corde qui tient la balancelle a pour amplitude :

$$T = M^B g \cos \theta + M^B l \dot{\theta}^2 \quad (/2)$$

NB : ce calcul est plus simple en coordonnées cylindriques

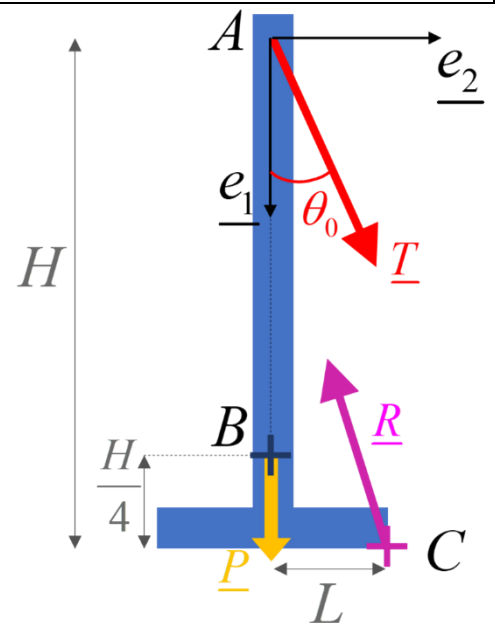
En faisant l'hypothèse que les oscillations sont petites, la question précédente mène évidemment à pouvoir décrire les oscillations sous la forme : $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t)$ avec $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.

La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du pendule est évidemment nulle pour $\theta(t) = \theta_0$.

4. Ecrire l'égalité entre l'énergie mécanique de la masse en mouvement dans le cas général et dans le cas où $\theta(t) = \theta_0$ (on considère l'énergie potentielle nulle pour $\theta(t=0) = 0$). En déduire que la tension dans la corde qui tient la balancelle peut s'écrire : $T = 3M^B g \cos \theta - 2M^B g \cos \theta_0$ (\2)

Selon la vitesse initiale du berceau on peut trouver θ_0 et donc l'évolution de la tension dans le fil. On s'intéresse au cas où $\theta = \theta_0$ (l'angle maximal), pour lequel $T = M^B g \cos \theta_0 = A$ avec A une constante. On cherche la demi-largeur L de l'embase pour que le châssis du berceau ne puisse pas basculer.

Le châssis est soumis à la tension dans la corde $\underline{T} = A \underline{e}_r$ ainsi qu'à son poids $\underline{P} = M^C g \underline{e}_1$ et à la réaction du support, et paramétré comme sur la figure ci-contre.

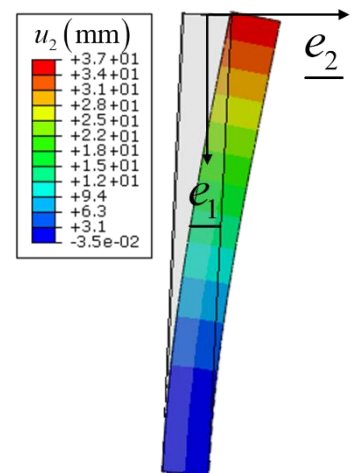


5. Calculer la réaction du support. (\2)

6. Ecrire l'équilibre du châssis au point de basculement, et en déduire une condition sur la demi-largeur L de l'embase du châssis. (/2)

On s'intéresse désormais aux déformations dans le poteau vertical du châssis, qui va être amené à fléchir sous l'effet de la tension dans la corde $\underline{T} = A\underline{e}_r$. On se propose d'écrire le champ de déplacements dans ce poteau sous la forme :

$$\underline{u}(X_1, X_2) = (\alpha X_1^2 + \beta) \underline{e}_2 \quad \text{avec } \alpha < 0$$



7. Si on considère que la base de ce poteau est encastrée, quelle condition aux limites doit-on appliquer au champ de déplacements précédent ? Que vaut alors $\underline{u}(X_1, X_2)$? (/2)

8. Déduire la trajectoire d'un point initialement situé en $\underline{X} = \underline{0}$ (/2)

9. Calculer le tenseur des déformations au sein de ce poteau en considérant que l'hypothèse des petites perturbations est vérifiée. Ecrire le résultat sous forme tensorielle et matricielle. (/2)

On rappelle que : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \right)$

10. La transformation proposée ci-dessus conserve-t-elle le volume du matériau ? (/2)