

Partiel du 4 novembre

Durée : 1h.

Calculatrice et tous documents interdits.

Exercice 1. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Déterminer toutes les fonctions $f = u + iv \in \mathcal{O}(\Omega)$ telles que $u^2 + iv^2 \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Solution : Soit f une telle fonction. Notons $g = u^2 + iv^2$. Les conditions de Cauchy-Riemann pour g s'écrivent :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \partial_x(u^2) &= \partial_y(v^2) \\ \partial_y(u^2) &= -\partial_x(v^2) \end{cases} &\iff \begin{cases} u\partial_x u &= v\partial_y v \\ u\partial_y u &= -v\partial_x v \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u\partial_x u &= v\partial_y v \\ u(\partial_x u + \partial_y u) &= v(\partial_y v - \partial_x v) \end{cases} \\ &\implies u(\partial_x u - \partial_x v) = v(\partial_x u - \partial_x v) \\ &\implies (u - v)\partial_x(u - v) = 0 \\ &\implies \partial_x((u - v)^2) = 0 \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\partial_y((u - v)^2) = 0.$$

Ainsi $(u - v)^2$ et donc $u - v$ sont constantes.

La fonction f est de la forme $(1 + i)u + C$, $C \in \mathbb{C}$. Mais on sait que u ne peut pas être holomorphe à moins d'être constante. Donc u est constante et il suit que f aussi.

Barème : exercice bonus sur 2 points.

Commentaires :

- Attention à ne pas diviser par zéro ! Si on veut simplifier par $\frac{\partial u}{\partial x}$, il faut supposer que ce terme est non nul.
- Dans un raisonnement par analyse-synthèse, ne pas oublier la partie synthèse ! La conclusion de la partie analyse est que les solutions sont de la forme $f(x, y) = (1 + i)u(x, y)$ avec u une fonction à valeurs réelles. Mais on a vu en TD qu'une fonction holomorphe ne prenant que des valeurs réelles est forcément constante. Là c'est la même chose, et on trouve finalement que les seules solutions sont les fonctions constantes.

Exercice 2. Vérifier les équations de Cauchy-Riemann pour les fonctions suivantes (sur leur domaine de définition) :

- (a) $f(z) = z^3$;
 (b) $g(z) = (z + 1/z)/2$.

Solution :

(a)

$$f(x, y) = \underbrace{x^3 - 3xy^2}_{=u(x,y)} + i \underbrace{(3x^2y - y^3)}_{=v(x,y)}$$

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

(b)

$$g(x, y) = \frac{1}{2} \left(x + iy + \frac{1}{x + iy} \right) = \frac{1}{2} \left(x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right) = \underbrace{\frac{1}{2} \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right)}_{u(x,y)} + i \underbrace{\frac{1}{2} \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)}_{v(x,y)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

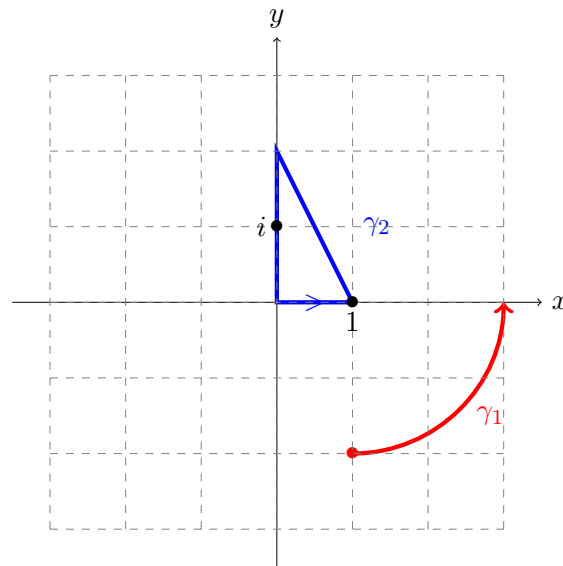
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{2} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

Barème : chaque fonction sur 1.5 point.

Commentaires :

- *Bien lire l'énoncé : déjà, la consigne était "vérifier que les équations sont satisfaites" et pas "regarder si les équations sont satisfaites". Il y a une nuance, l'énoncé vous assure déjà que c'est vrai et on vous demande juste de faire les calculs. Deuxièmement, les théorèmes généraux vous disent que ces fonctions-là sont holomorphes : z^3 évidemment, et $1/z$ aussi sur $\mathbb{C}^*$.*
- *Il y a eu des erreurs de calcul sur le développement de $z^3 = (x + iy)^3$, attention !!*
- *Pour la deuxième fonction, il ne fallait SURTOUT PAS ramener tous les termes sur la fraction, cela compliquait énormément les calculs, et ça a d'ailleurs donné lieu à de nombreuses erreurs.*

Exercice 3. Paramétrer les chemins ci-dessous : γ_1 est le quart de cercle de centre 1 reliant $1 - 2i$ à 3 et parcouru dans le sens direct (trigonométrique); γ_2 est le triangle de sommets 0, 1 et $2i$ parcouru dans le sens direct.



Solution : Un paramétrage de γ_1 est

$$t \in [-\pi/2, 0] \mapsto 1 + 2e^{it}.$$

Un paramétrage de γ_2 est

$$t \in [0, 3] \mapsto \begin{cases} t, & t \in [0, 1]; \\ t + i(2 - 2(t - 1)) = 4i + (1 - 2i)t, & t \in [1, 2]; \\ 2i(3 - t), & t \in [2, 3] \end{cases}$$

On peut aussi écrire plus simplement $\gamma_2 = \gamma_a \cup \gamma_b \cup \gamma_c$ avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma_a(t) = t, & t \in [0, 1]; \\ \gamma_b(t) = (1 - t) + 2it, & t \in [0, 1]; \\ \gamma_c(t) = 2(1 - t)i, & t \in [0, 1]. \end{array} \right\}$$

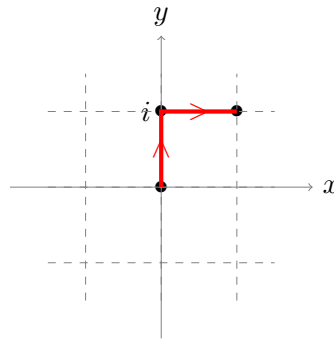
Barème : chaque chemin sur 1.5 point.

Commentaires :

- Il faut absolument connaître le paramétrage d'un cercle !! Certains ont écrit un paramétrage du segment entre les deux points, ça n'a rien à voir.
- Théoriquement, ça n'est pas faux, mais je vous déconseille fortement d'écrire un paramétrage avec des coordonnées réelles ($\gamma(t) = (x(t), y(t))$), faites-le plutôt en complexes ($\gamma(t) = x(t) + iy(t)$). De toute façon, pour les intégrales, vous devrez passer par là. Ça a d'ailleurs engendré pas mal d'erreurs dans l'exercice suivant, car certains ont écrit un produit scalaire au lieu de faire la multiplication de $\gamma'(t)$ et $f(\gamma(t))$ en tant que nombres complexes.

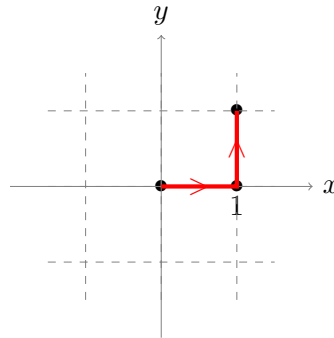
Exercice 4. Dessiner les deux chemins γ suivants et calculer à chaque fois $\int_{\gamma} |z|^2 dz$:

- (a) Le segment allant de 0 à i suivi du segment allant de i à $1 + i$;



$$\int_{\gamma} |z|^2 dz = \int_0^1 i |it|^2 dt + \int_0^1 |t + i|^2 dt = i \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (t^2 + 1) dt = \frac{i}{3} + \frac{4}{3}.$$

- (b) Le segment allant de 0 à 1 suivi du segment allant de 1 à $1 + i$.



$$\int_{\gamma} |z|^2 dz = \int_0^1 |t|^2 dt + \int_0^1 i |1 + it|^2 dt = \frac{1}{3} + i \int_0^1 (1 + t^2) dt = \frac{1}{3} + i \frac{4}{3}.$$

Barème : chaque dessin sur 0.5 point, le reste sur 2×1.5 points.

Commentaires :

- *ACHTUNG !!!! J'ai dit dans le cours que l'intégrale ne dépendait pas du chemin mais seulement des extrémités ; MAIS ceci n'est vrai que si on intègre une fonction HOLOMORPHE !! Ici, $z \mapsto |z|^2$ n'est absolument pas holomorphe !! En l'occurrence, bien que les extrémités soient les mêmes, les deux intégrales donnent un résultat différent.*
- *Dans les intégrales, il ne faut surtout pas oublier la dérivée $\gamma'(t)$ du chemin ! On avait des i qui apparaissaient dans deux intégrales ici.*