

TD 2 : Théorème et formules de Cauchy

Rappels :

On considère un ouvert borné U dont le bord est une courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $f \in \mathcal{O}(V)$, où $\bar{U} \subset V$. Alors :

- Théorème de Cauchy :

$$\int_{\partial U} f(z) dz = 0.$$

- Formule intégrale de Cauchy : pour tout $a \in U$, on a

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

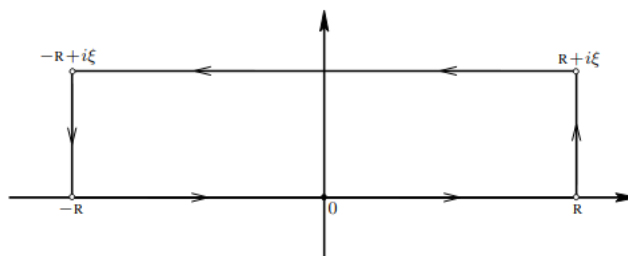
Soient U un ouvert et $f \in \mathcal{O}(U)$. Soient $a \in U$ et $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset U$. Alors pour tout entier naturel n , f est n fois dérivable en a et on a :

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Exercice 1. Le but de cet exercice est de montrer grâce au théorème de Cauchy que la transformée de Fourier de la fonction gaussienne $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\pi x^2}$ est elle-même.

Considérons pour $R > 0$ et $\xi > 0$, l'ouvert $U_{R,\xi}$ consistant en le rectangle de sommets $-R, R, -R + i\xi, R + i\xi$.



En intégrant la fonction $z \mapsto e^{-\pi z^2}$ sur le bord $\Gamma_{R,\xi}$ de $U_{R,\xi}$, puis en faisant tendre R vers $+\infty$, montrer l'égalité :

$$e^{-\pi \xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi \xi x} dx.$$

Solution :

La fonction f définie par $f(z) = e^{-\pi z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc d'après le théorème de Cauchy,

$$\int_{\Gamma_{R,\xi}} f(z) dz = 0.$$

On a

$$0 = \int_{\Gamma_{R,\xi}} f(z) dz = \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx + \int_0^\xi i e^{-\pi(R+it)^2} dt - \int_{-R}^R e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx - \int_0^\xi i e^{-\pi(it)^2} dt. \quad (1)$$

$$\left| \int_0^\xi i e^{-\pi(R+it)^2} dt \right| = \left| \int_0^\xi i e^{-\pi(R^2+2iRt-t^2)} dt \right| \leq e^{-\pi R^2} \int_0^\xi e^{\pi t^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (2)$$

$$\int_{-R}^R e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = e^{\pi \xi^2} \int_{-R}^R e^{-\pi x^2 - 2i\pi \xi x} dx \quad (3)$$

$$\left| \int_0^\xi i e^{-\pi(it)^2} dt \right| = \left| e^{-\pi R^2} \int_0^\xi i e^{\pi t^2 + 2i\pi R t} dt \right| \leq e^{-\pi R^2} \int_0^\xi e^{\pi t^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (4)$$

En passant à la limite $R \rightarrow +\infty$ dans l'équation 1, on obtient le résultat voulu.

Exercice 2. En intégrant $f(z) = (z+a)^{-1} e^{iz}$, $a > 0$ le long du bord Γ_R du carré de sommets $0, R, R+iR, iR$ ($R > 0$), puis en faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x+a} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{x^2+1} dx$$

et retrouver $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Solution : La fonction $z+a$ s'annule uniquement en $-a < 0$, qui est en strictement en dehors du carré. La fonction f est donc bien définie et holomorphe au voisinage du carré. D'après le théorème de Cauchy,

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_0^R \frac{e^{it} dt}{t+a} + i \int_0^R \frac{e^{i(R+it)} dt}{R+it+a} - \int_0^R \frac{e^{i(R+t)} dt}{iR+t+a} - \int_0^R \frac{e^{i(it)} dt}{it+a} = 0.$$

On sait que $\Im \left(\int_0^R \frac{e^{it} dt}{t+a} \right) = \int_0^R \frac{\sin t dt}{t+a}$, on va donc calculer la limite des termes de l'égalité précédente pour $R \rightarrow \infty$ puis prendre la partie imaginaire.

- On a $\left| \frac{e^{i(R+it)}}{R+it+a} \right| = \frac{e^{-t}}{|R+a+it|} \leq \frac{e^{-t}}{R+a}$, donc

$$\left| \int_0^R \frac{e^{i(R+it)} dt}{R+it+a} \right| \leq \frac{1}{R+a} \int_0^R e^{-t} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

- De même, $\left| \frac{e^{i(iR+t)}}{iR+t+a} \right| = \frac{e^{-R}}{|iR+a+t|} \leq \frac{e^{-R}}{R+a}$, donc

$$\left| \int_0^R \frac{e^{i(iR+t)} dt}{iR+t+a} \right| \leq \frac{e^{-R}}{R+a} \int_0^R dt = \frac{R e^{-R}}{R+a} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

- Enfin, on a $i \frac{e^{i(it)}}{it+a} = i \frac{(a-it)e^{-t}}{t^2+a^2} = \frac{te^{-t}}{t^2+a^2} + i \frac{ae^{-t}}{t^2+a^2}$, donc

$$\Im \left(\int_0^R \frac{e^{i(it)} dt}{it+a} \right) = \int_0^R \frac{ae^{-t} dt}{t^2+a^2} = \int_0^{R/a} \frac{e^{-au} du}{1+u^2}.$$

Ainsi, en prenant la limite $R \rightarrow \infty$ puis la partie imaginaire de l'égalité de départ, on obtient

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t+a} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-au}}{1+u^2} du.$$

Exercice 3. (a) Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - a|^2} = \frac{1}{1 - |a|^2}$.

(b) Pour $0 < a < b$, montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|ae^{i\theta} - b|^4} = \frac{a^2 + b^2}{(b^2 - a^2)^3}$.

(c) Montrer que $\int_0^{2\pi} \exp(e^{i\theta}) d\theta = 2\pi$.

Solution :

(a) On va se ramener à une formule de Cauchy sur le cercle unité.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - a|} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(e^{i\theta} - a)(e^{-i\theta} - \bar{a})} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{(e^{i\theta} - a)(1 - \bar{a}e^{i\theta})} \\ &= \int_{C(0,1)} \frac{dz}{i(z - a)(1 - \bar{a}z)} \\ &= 2\pi f(a) \\ &= \frac{2\pi}{1 - |a|^2} \end{aligned}$$

où f est définie par $f(z) = \frac{1}{1 - \bar{a}z}$. La fonction f est bien holomorphe au voisinage du disque unité, puisque $1 - \bar{a}z$ s'annule uniquement en $\bar{a}^{-1}$ qui est de module > 1 .

(b) On va se ramener à une formule intégrale de Cauchy pour la dérivée d'ordre 1 sur le cercle de centre 0 et de rayon b .

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|ae^{i\theta} - b|^4} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(ae^{i\theta} - b)^2 (ae^{-i\theta} - \bar{b})^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta} d\theta}{(ae^{i\theta} - b)^2 (be^{i\theta} - a)^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{i(be^{i\theta})^2 d\theta}{i(abe^{i\theta} - b^2)^2 (be^{i\theta} - a)^2} \\ &= \int_{C(0,b)} \frac{z}{i(z - a)^2 (az - b^2)^2} dz \end{aligned}$$

Posons $f(z) = \frac{z}{i(az - b^2)^2}$. Cette fonction est holomorphe au voisinage du disque de centre 0 et de rayon b . En effet, le dénominateur s'annule uniquement en b^2/a , qui est de module $> b$.

La formule de Cauchy donne

$$2i\pi f'(a) = \int_{C(0,b)} \frac{f(z)}{(z - a)^2} dz.$$

Les calculs donnent bien $f'(a) = -\frac{a^2 + b^2}{i(a^2 - b^2)^3}$, d'où le résultat.

(c)

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \exp(e^{i\theta}) d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} \exp(e^{i\theta})}{ie^{i\theta}} d\theta \\ &= \int_{C(0,1)} \frac{e^z dz}{iz} \\ &= 2\pi f(0) \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

avec $f(z) = e^z$.

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction entière telle qu'il existe des constantes positives $A, B \geq 0$ et un entier naturel n avec

$$|f(z)| \leq A + B|z|^n.$$

Montrer que f est un polynôme.

Solution :

Il suffit de montrer que $f^{(n+1)} = 0$. Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors

$$|f^{(n+1)}(a)| \leq \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Or pour $z \in C(a, r)$, on a

$$|f(z)| \leq A + B|z|^n \leq A + B(|z-a| + |a|)^n \leq A + B(r + |a|)^n = r^n(Ar^{-n} + B(1 + |a|/r)^n).$$

Par conséquent,

$$|f^{(n+1)}(a)| \leq \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} r^n (Ar^{-n} + B(1 + |a|/r)^n) = \frac{(n+1)!}{r} (Ar^{-n} + B(1 + |a|/r)^n) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

et $f^{(n+1)}(a) = 0 \forall a \in \mathbb{C}$. Ceci montre bien que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n .

Exercice 5. Soient $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $R > 0$, $a \neq b \in \mathbb{C} \setminus C(0, R)$. En calculant l'intégrale

$$I(R) = \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz,$$

montrer que si $|f|$ est bornée, alors f est constante (théorème de Liouville).

Solution : Supposons que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Prenons R tel que $R > |a|$ et $R > |b|$. L'objectif est de montrer que $f(a) = f(b)$. On a $\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right)$. Donc

$$I(R) = \frac{1}{a-b} \int_{C(0,R)} \left(\frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{f(z)}{z-b} dz \right) = 2i\pi \frac{1}{a-b} (f(a) - f(b)).$$

De plus, si $|z| = R$, $|z-a| \leq R - |a|$, donc $\left| \frac{1}{z-a} \right| \leq \left| \frac{1}{R-|a|} \right|$, et de même $\left| \frac{1}{z-b} \right| \leq \left| \frac{1}{R-|b|} \right|$.

On peut donc écrire

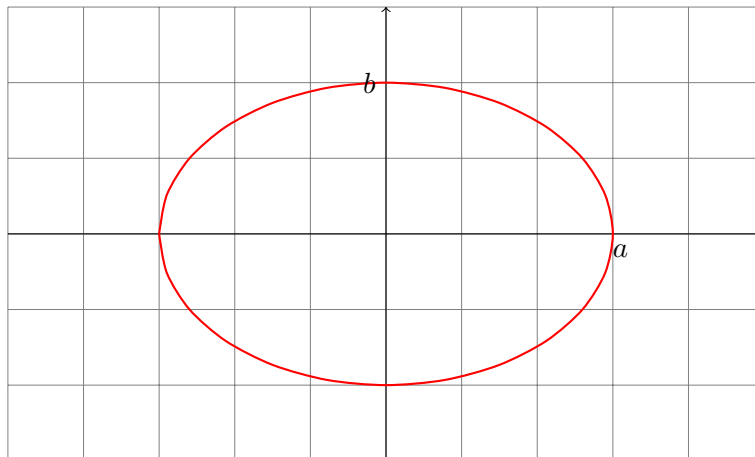
$$|I(R)| \leq \int_{C(0,R)} \left| \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} \right| dz \leq \int_{C(0,R)} \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)} dz = \frac{2\pi MR}{(R-|a|)(R-|b|)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Comme $I(R) = 2i\pi \frac{1}{a-b} (f(a) - f(b))$, on obtient $f(a) - f(b) = 0$.

Exercice 6. Calculer de deux manières différentes $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ où $\gamma(t) = a \cos t + ib \sin t$ avec $t \in [0, 2\pi]$, $a, b \geq 0$. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

Solution : γ est un paramétrage de l'ellipse de foyers $\sqrt{|a^2 - b^2|}$ et $-\sqrt{|a^2 - b^2|}$ et de demi-axes a, b .



On calcule $\gamma'(t) = -a \sin t + ib \cos t$, d'où

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin t + ib \cos t)(a \cos t - ib \sin t)}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2) \sin t \cos t + iab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$$

Appliquons d'autre part la formule intégrale de Cauchy sur γ au point 0 à la fonction constante $f = 1$. Cela s'écrit

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - 0} dz = 2i\pi f(0) = 2i\pi$$

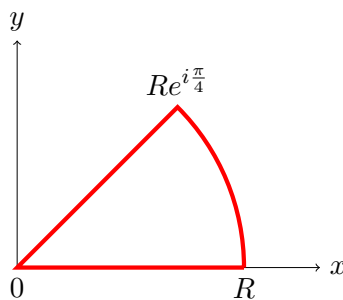
En identifiant les parties imaginaires des deux égalités, on trouve que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

Exercice 7. En intégrant la fonction e^{-z^2} sur le contour Γ_R ci-dessous, calculer la valeur des intégrales de Fresnel :

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

(On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.)



Solution : La fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc

$$0 = \int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-t^2} dt + \int_0^{\pi/4} Rie^{i\theta} e^{-(Re^{i\theta})^2} d\theta - \int_0^R \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{-(e^{i\pi/4}t)^2} dt.$$

Maintenant,

$$\left| \int_0^{\pi/4} R i e^{i\theta} e^{-(Re^{i\theta})^2} d\theta \right| \leq \int_0^{\pi/4} R \left| e^{-(Re^{i\theta})^2} \right| d\theta = \int_0^{\pi/4} R e^{-R^2 \cos(2\theta)} d\theta \leq \int_0^{\pi/4} R e^{-R^2} d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

De plus, $\frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{-(e^{i\pi/4}t)^2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{-it^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(t^2) + \sin(t^2) + i(\cos(t^2) - \sin(t^2)))$. En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres dans la première égalité, on obtient $\int_0^R \cos(t^2) dt = \int_0^R \sin(t^2) dt$ et

$$\sqrt{2} \int_0^R e^{-t^2} dt = \int_0^R \cos(t^2) + \sin(t^2) dt = 2 \int_0^R \cos(t^2) dt.$$

En passant à la limite $R \rightarrow \infty$, on arrive à

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$