

Espaces de Sobolev et applications à la résolution d'équations différentielles

Frédéric Robert

UNIVERSITÉ DE LORRAINE, CNRS, IECL, F-54000 NANCY, FRANCE
Email address: frederic.robert@univ-lorraine.fr

CHAPTER 1

Dimension 1 et propriétés principales

1. Motivation

1.1. Le problème. Soit $f \in C^0([0, 1])$. Existe-t'il $u \in C^2([0, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{dans } [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad ? \quad (E)$$

1.2. Formulation faible de (E). On définit

$$X := \{u \in C^1([0, 1]) / u(0) = u(1) = 0\}.$$

On multiplie (E) par $\varphi \in X$ et on intègre par parties. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\varphi \, dx &= \int_0^1 (-u'' + u)\varphi \, dx = - \int_0^1 u''\varphi \, dx + \int_0^1 u\varphi \, dx \\ &= -[u'\varphi]_0^1 + \int_0^1 u'\varphi' \, dx + \int_0^1 u\varphi \, dx = \int_0^1 (u'\varphi' + u\varphi) \, dx \end{aligned}$$

Inversement, supposons qu'il existe $u \in C^2([0, 1])$ telle que $u(0) = u(1) = 0$ (c'est-à-dire $u \in X$) et

$$\int_0^1 (u'\varphi' + u\varphi) \, dx = \int_0^1 f\varphi \, dx \text{ pour tout } \varphi \in X.$$

Alors, avec les calculs ci-dessus, on obtient que $\int_0^1 (-u'' + u - f)\varphi \, dx = 0$ pour tout $\varphi \in X$. Comme $-u'' + u - f \in C^0([0, 1]) \subset L^2((0, 1))$ et $C_c^1((0, 1)) \subset X$ est dense dans $L^2((0, 1))$, on obtient $-u'' + u - f = 0$, et donc u est une solution de (E). On a donc prouvé le résultat suivant:

Soit $u \in C^2([0, 1])$. Alors

(1)

$$u \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow \left\{ u \in X \text{ et } \int_0^1 (u'\varphi' + u\varphi) \, dx = \int_0^1 f\varphi \, dx \text{ pour tout } \varphi \in X \right\}$$

On va définir rigoureusement la formulation faible. Gardez cependant en tête que c'est essentiellement (1).

1.3. Une tentative (ratée) pour résoudre (E). On définit $B(u, v) := \int_0^1 (u'v' + uv) \, dx$ pour $u, v \in X$. Alors (1) se réécrit

$$B(u, \varphi) = T(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in X$$

où $T(\varphi) = \int_0^1 f\varphi \, dx$. Il est alors naturel d'utiliser le Théorème de représentation de Riesz pour trouver des solutions de cette equation étant donné que B est un produit scalaire sur X ... **Mais** (X, B) n'est pas un espace de Hilbert !!! Il n'est

pas complet pour la norme $\sqrt{B(\cdot, \cdot)}$. En fait, notre espace $X \subset C^1([0, 1])$ n'est pas assez riche.

1.4. Quel serait un bon espace sur lequel travailler? Pour définir $B(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx$, nous avons besoin d'un espace de fonctions u tel que $u \in L^2((0, 1))$, u' est défini et $u' \in L^2((0, 1))$. Ceci va être la définition d'un espace de Sobolev.

Dans toute la suite, $I =]a, b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ désignera un intervalle ouvert borné.

2. L'espace de Sobolev $H^1(I)$

2.1. La définition de l'espace de Sobolev.

2.1.1. *Un Lemme utile.* pour $u, v \in C^1([a, b])$ telles que u et v s'annulent sur $\partial[a, b] = \{a, b\}$, on a

$$(2) \quad \int_a^b u'v dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv' dx = - \int_a^b uv' dx$$

2.1.2. *Définition.*

DEFINITION 2.1 (Espace de Sobolev en 1D). On définit

$$H^1(I) := \{u \in L^2(I) / \exists v \in L^2(I) \text{ t.q. } \int_a^b u\varphi' dx = - \int_a^b v\varphi dx \forall \varphi \in C_c^1(I)\}$$

2.1.3. *Unicité de la dérivée.*

Proposition 1.1. Soit $u \in H^1(I)$ comme dans la Définition 2.1. Alors $v \in L^2(I)$ est unique. On définit alors $u' := v$: c'est la "dérivée faible" de u , ou "dérivé au sens faible".

PROOF. Supposons que $v, w \in L^2$ conviennent. Alors pour tout $\varphi \in C_c^1(I)$, on a $\int_a^b v\varphi dx = \int_a^b w\varphi dx$ et donc $\int_a^b (v - w)\varphi dx = 0$. Comme $v - w \in L^2(I)$ et $C_c^1(I)$ est dense dans $L^2(I)$, alors $\int_a^b (v - w)\varphi dx = 0$ pour tout $\varphi \in L^2(I)$. En prenant $\varphi = v - w$ on obtient $v = w$ p.p. $\square$

2.2. Exemples.

- $C^1([0, 1]) \subset H^1(I)$. De plus, les dérivées faibles et forte (dérivée forte=dérivée au sens usuel) coïncident.
- $C^1((0, 1)) \not\subset H^1(I)$!!! Ceci vient de la condition d'intégrabilité. Par exemple $x \mapsto x^{-1}$ est dans $C^1((0, 1))$, mais pas dans L^2 .
- On définit la fonction $u(x) := x_+ = \max\{0, x\}$ pour $x \in]-1, 1[$. Alors $u \in H^1(]-1, 1[)$ et $u' = \mathbf{1}_{(0,1)}$. C'est un calcul immédiat. On a clairement (oh, le vilain mot) $u \in L^2(-1, 1)$: prenons $\varphi \in C_c^1(]-1, 1[)$, on a alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u\varphi' dx &= \int_0^1 x\varphi'(x) dx = [x\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 x'\varphi(x) dx \\ &= - \int_0^1 \varphi dx = - \int_{-1}^1 \mathbf{1}_{(0,1)}\varphi dx \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{1}_{(0,1)} \in L^2(-1, 1)$, on a $u \in H^1(-1, 1)$ et $u' = \mathbf{1}_{(0,1)}$.

- Cependant $\mathbf{1}_{(0,1)} \notin H^1(-1,1)!!!$ Supposons que c'est dans l'espace de Sobolev, et soit alors $f \in L^2(]-1,1[)$ sa dérivée faible. Alors pour tout $\varphi \in C_c^1(]-1,1[)$, on aurait

$$\int_{-1}^1 f \varphi dx = - \int_{-1}^1 \mathbf{1}_{(0,1)} \varphi' dx = - \int_0^1 \varphi' dx = -(\varphi(1) - \varphi(0)) = \varphi(0)$$

Ceci est impossible car, moralement, le terme de gauche fait sens pour φ définie presque partout (et donc on peut changer la valeur en 0), alors que dans le terme de droite, la valeur en 0 est essentielle. Vous pouvez vous amuser à prouver ce résultat en suivant l'indication.

Exercice 1: Montrez que $x \mapsto |x|$ est dans $H^1(]-1,1[)$. Donnez une condition optimale sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $x \mapsto x^{-\alpha} \in H^1(]0,1[)$.

3. Structure de $H^1(I)$

3.1. Structure linéaire.

Proposition 1.2. *L'espace $H^1(I)$ est un espace vectoriel et la dérivation est linéaire. En d'autres termes, pour tous $u, v \in H^1(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u + \mu v \in H^1(I)$ et*

$$(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'.$$

3.2. Structure Hilbertienne.

DEFINITION 3.1. Pour $u, v \in H^1(I)$, on définit le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} := \int_I (u'v' + uv) dx.$$

Proposition 1.3. *L'espace $(H^1(I), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1})$ est un espace de Hilbert.*

PROOF. Il suffit de prouver qu'il est complet pour la norme

$$u \mapsto \|u\|_{H^1} = \sqrt{\int_I ((u')^2 + u^2) dx}.$$

Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans $H^1(I)$. Alors:

- (u_n) et (u'_n) sont des suites de Cauchy dans $L^2(I)$ qui est complet
- Soient $u, v \in L^2(I)$ leurs limites respectives dans $L^2(I)$
- Pour tout $\varphi \in C_c^1(I)$, on a

$$\int_I u_n \varphi' dx = - \int_I u'_n \varphi dx.$$

A la limite $n \rightarrow +\infty$ on obtient $u \in H^1(I)$ et $u' = v$.

- Finalement $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(I)$.

Ainsi $H^1(I)$ est complet. □

4. Régularité et définition de $H_0^1(I)$

4.1. Dérivée nulle presque partout. Commençons par un résultat naturel, mais absolument pas trivial à démontrer:

Proposition 1.4. *Soit $u \in H^1(I)$ telle que $u' = 0$. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = C$ p.p.*

PROOF. Par commodité, prenons $I =]0, 1[$. Comme $u' = 0$, alors pour tout $\varphi \in C_c^1(]0, 1[)$, on a

$$\int_0^1 u\varphi' dx = 0.$$

On voudrait prendre une fonction $\psi \in C_c^1(0, 1)$ arbitraire en lieu et place de φ' . Est-ce possible? Et bien si c'est le cas et que $\psi = \varphi'$, on aurait alors

$$\int_0^1 \psi dx = \int_0^1 \varphi' dx = \varphi(1) - \varphi(0) = 0.$$

En donc il y a des restrictions sur ψ pour pouvoir l'écrire comme φ' avec $\varphi \in C_c^1(]0, 1[)$.

Soit $\theta \in C^1(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\theta(x) = 0$ pour $x < 1/3$ et $\theta(x) = 1$ pour $x > 2/3$. pour $\psi \in C_c^1(0, 1)$, définissons

$$\varphi(x) := \int_0^x \psi(t) dt - \theta(x) \int_0^1 \psi(t) dt \text{ pour tout } x \in]0, 1[.$$

On affirme ici que $\varphi \in C_c^1(]0, 1[)$. Prouvons-le:

- Le fait que $\varphi \in C^1$ ne pose pas de problème (intégrale d'une fonction continue)
- Comme ψ est à support compact, alors il existe $0 < \alpha < \beta < 1$ tel que $\psi(x) = 0$ pour $x < \alpha$ ou $x > \beta$. Sans perdre en généralité, on peut supposer que $\alpha < 1/3$ et $\beta > 2/3$.
- Pour $0 < x < \alpha$, on a $\varphi(x) = 0$
- Pour $\beta < x < 1$, on a

$$\varphi(x) = \int_0^x \psi(t) dt - 1 \cdot \theta(x) \int_0^1 \psi(t) dt = \int_0^1 \psi(t) dt - \theta(x) \int_0^1 \psi(t) dt = 0.$$

- Et donc φ est à support compact puis $\varphi \in C_c^1(]0, 1[)$

Nous allons maintenant prouver la proposition. Pour $\psi \in C_c^1(]0, 1[)$, définissons $\varphi \in C_c^1(]0, 1[)$ comme ci-dessus, on obtient alors

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 u\varphi' dx = \int_0^1 u(x) \left(\psi(x) - \theta'(x) \int_0^1 \psi(t) dt \right) dx \\ &= \int_0^1 u(x)\psi(x) dx - \left(\int_0^1 u\theta' dx \right) \left(\int_0^1 \psi dx \right) \\ &= \int_0^1 u(x)\psi(x) dx - \left(\int_0^1 C\psi dx \right) \text{ avec } C = \int_0^1 u\theta' dx \\ &= \int_0^1 (u - C)\psi(x) dx \end{aligned}$$

Comme $u - C \in L^2(]0, 1[)$ et $C_c^1(]0, 1[)$ est dense in L^2 , l'égalité précédente est valable pour tout $\psi \in L^2(]0, 1[)$. En prenant $\psi = u - C$ on obtient $u - C = 0$ p.p., ce qui conclut la preuve de la proposition $\square$

A partir de ce lemme, on obtient un résultat de régularité qui est spécifique à la dimension 1:

4.2. Régularité.

THEOREM 1.5. *L'espace $H^1(I)$ se plonge continûment dans $C^{0,1/2}(\bar{I})$. Plus précisément, pour tout $u \in H^1(I)$, il existe une unique $\bar{u} \in C^{0,1/2}(\bar{I})$ tel que $u = \bar{u}$ p.p.*

PROOF. Là encore, par commodité, on prend $I =]0, 1[$. On aimerait bien écrire une identité du type $u(x) - u(y) = \int_x^y u'(t) dt \dots$ mais $u \notin C^1!!!$ On définit alors

$$\tilde{u}(x) := \int_0^x u'(t) dt \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

La fonction $\tilde{u}$ est bien définie.

On affirme que $\tilde{u} \in C^{0,1/2}([0, 1])$.

Prouvons-le. Pour $x, y \in [0, 1]$, avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_x^y u'(t) dt \right| \leq \sqrt{\left| \int_x^y dt \right|} \sqrt{\int_x^y (u'(t))^2 dt} \leq \|u'\|_2 \sqrt{|x - y|}$$

Et donc $\tilde{u} \in C^{0,1/2}([0, 1])$. De plus, comme $\tilde{u}(0) = 0$, on a $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_2$, et donc

$$\|\tilde{u}\|_{C^{0,1/2}} \leq 2\|u'\|_2.$$

On affirme que $\tilde{u} \in H^1(]0, 1[)$ et que $\tilde{u}' = u'$ p.p.

Prouvons-le. Prenons $\varphi \in C_c^1(]0, 1[)$. Avec le théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{u} \varphi' dx &= \int_0^1 \left(\int_0^x u'(t) dt \right) \varphi(x) dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}_{t < x} u'(t) \varphi'(x) dx dt = \int_0^1 u'(t) \left(\int_t^1 \varphi'(x) dx \right) dt \\ &= \int_0^1 u'(t) (\varphi(1) - \varphi(t)) dt = - \int_0^1 u' \varphi dt \end{aligned}$$

Et donc $\tilde{u} \in H^1(]0, 1[)$ et $\tilde{u}' = u'$. Ceci prouve l'affirmation annoncée.

Nous pouvons maintenant conclure. On a $(u - \tilde{u})' = 0$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u - \tilde{u} = C$ p.p. On définit $\bar{u} := \tilde{u} + C$. Donc $\bar{u} \in C^{0,1/2}([0, 1])$ et $u(x) = \bar{u}(x)$ p.p.

En ce qui concerne l'unicité, si une autre fonction $v \in C^{0,1/2}([0, 1])$ convient, alors $v(x) = \bar{u}(x)$ p.p., puis partout comme ce sont des fonctions continues. Pour la continuité de $u \mapsto \bar{u}$, il suffit de remarquer que

$$|C| = \|C\|_2 = \|u - \tilde{u}\|_2 \leq \|u\|_2 + \|\tilde{u}\|_2 \leq \|u\|_2 + 2\|u'\|_2 \leq 2\|u\|_{H^1}$$

Et donc

$$\|\bar{u}\|_{C^{0,1/2}} = \|\tilde{u} + C\|_{C^{0,1/2}} \leq 3\|u\|_{H^1},$$

ainsi $u \mapsto \bar{u}$ est continue. □

4.3. Un corollaire.

Proposition 1.6. *Soient $u, v \in H^1(I)$. Alors $uv \in H^1(I)$ et $(uv)' = u'v + uv'$.*

Notez que comme $u, v \in L^\infty(I)$, alors $uv, u'v, uv' \in L^2(I)$.

Exercice 2: Prouvez cette proposition avec l'hypothèse additionnelle $v \in C^1(I)$.

4.4. L'espace $H_0^1(I)$. Dans la suite, on assimilera systématiquement (ou presque) $u \in H^1(I)$ à son représentant $\bar{u} \in C^0$.

DEFINITION 4.1. Pour $-\infty < a < b < +\infty$, définissons

$$H_0^1([a, b]) := \{u \in H^1(a, b) \text{ tel que } u(a) = u(b) = 0\},$$

où on a assimilé u à son représentant continu.

Proposition 1.7. L'espace $H_0^1(I)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(I)$. En particulier, c'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$.

PROOF. On définit

$$\begin{cases} T : H^1([a, b]) & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto (\bar{u}(a), \bar{u}(b)) \end{cases}$$

Alors T est linéaire et, pour n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^2$, elle est continue car $u \mapsto \bar{u}$ est continue. Comme $H_0^1([a, b]) = T^{-1}(0, 0)$, c'est un espace vectoriel fermé. $\square$

5. Solutions des exercices du Chapitre 1

Solution de l'Exercice 1: Remarquons que $x \mapsto |x| \in L^2([-1, 1])$. Choisissons $\varphi \in C_c^1([-1, 1])$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) dx &= \int_{-1}^0 (-x) \varphi'(x) dx + \int_0^1 x \varphi'(x) dx \\ &= [-x\varphi(x)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (-x)' \varphi(x) dx + [x\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 x' \varphi(x) dx \\ &= 0 \times \varphi(0) + \varphi(-1) + \int_{-1}^0 \varphi(x) dx + \varphi(1) - x\varphi(0) - \int_0^1 \varphi dx \\ &= - \int_{-1}^1 g \varphi dx \text{ since } \varphi(-1) = \varphi(1) = 0 \end{aligned}$$

où $g(x) = -1$ pour $x < 0$ et $g(x) = 1$ pour $x > 0$. Ainsi $g \in L^2(-1, 1)$, puis $x \mapsto |x| \in H^1([-1, 1])$ et $u' = g$.

Soit $f(x) = x^{-\alpha}$ pour $0 < x < 1$. Supposons que $\alpha \neq 0$. Comme f is C^1 , la formule d'intégration par partie fait sens. Il suffit de vérifier l'intégrabilité. On a $\int_0^1 f(x)^2 dx = \int_0^1 x^{-2\alpha} dx < \infty$ ssi $-2\alpha > -1$, c'est-à-dire $\alpha < 1/2$. On a $\int_0^1 f'(x)^2 dx = \alpha^2 \int_0^1 x^{-2\alpha-2} dx < \infty$ ssi $-2\alpha - 2 > -1$, c'est-à-dire $\alpha < -1/2$. Finalement, pour $\alpha \neq 0$, $f \in H^1([0, 1])$ ssi $\alpha < -1/2$. Le cas $\alpha = 0$ ne pose pas vraiment de problème. $\square$

Solution de l'Exercice 2: Notons que $|(uv)(x)| \leq \|u\|_\infty |v(x)|$ pour p.p. $x \in I$, donc comme $u \in L^\infty$ et $v \in L^2(I)$, on a $uv \in L^2(I)$. On procède de même pour $u'v$ et uv' . On se donne $\varphi \in C_c^1(I)$. Alors $v\varphi \in C_c^1(I)$ et on a

$$\begin{aligned} \int_I uv\varphi' dx &= \int_I u((v\varphi)' - v'\varphi) dx = \int_I u(v\varphi)' dx - \int_I uv'\varphi dx \\ &= - \int_I u'(v\varphi) dx - \int_I uv'\varphi dx = - \int_I (u'v + uv')\varphi dx \end{aligned}$$

Comme $u'v + uv' \in L^2(I)$, on obtient le résultat annoncé. Le cas général $v \in H^1(I)$ utilise la densité des fonctions C^1 dans $H^1(I)$ (non étudiée ici). $\square$

CHAPTER 2

Applications à des problème au bord de dimension 1

C'est la raison d'être principale des espaces de Sobolev

1. Solutions faibles

En raisonnant comme dans la preuve de (1) du chapitre précédent, définissons proprement les solutions faibles:

DEFINITION 1.1. Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. On dit que $u \in H_0^1(]0, 1[)$ est une solution faible de

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (E)$$

si

$$\int_0^1 (u' \varphi' + u \varphi) dx = \int_0^1 f \varphi dx \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(0, 1) \quad (E_w).$$

On dit que (E_w) est la "formulation faible" ("weak formulation") de (E) .

Notons que la condition au bord $u(0) = u(1) = 0$ est contenue dans la condition $u \in H_0^1(0, 1)$.

2. Application en utilisant le théorème de représentation de Riesz

2.1. Théorème principal.

THEOREM 2.1. Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. Il existe alors une unique solution faible $u \in H_0^1(]0, 1[)$ de (E) . De plus, si $f \in C^0([0, 1])$, alors $u \in C^2([0, 1])$ est une solution classique de (E) .

Et donc notre problème est résolu. C'est un résultat basique (qu'on aurait d'ailleurs pu prouver avec des outils employés pour la méthode de continuité), mais c'est une bonne illustration.

2.2. Preuve de l'existence d'une solution faible. On définit $T_f : H_0^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ par $T_f(\varphi) = \int_0^1 f \varphi dx$ pour tout $\varphi \in H_0^1(]0, 1[)$. Alors T est continue sur $H_0^1(]0, 1[)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$. Et donc $u \in H_0^1(]0, 1[)$ est une solution faible de (E) ssi

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^1} = T_f(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(]0, 1[).$$

Et donc l'existence et l'unicité suivent immédiatement du théorème de représentation de Riesz car $H_0^1(]0, 1[)$ est un espace de Hilbert (rappelez-vous, ce n'est pas le cas de $C^1([0, 1])$). Ceci prouve l'existence et l'unicité des solutions faibles.

2.3. Preuve de la régularité. On suppose que $f \in C^0([0, 1])$. Comme on a une solution faible, on a donc

$$\int_0^1 u' \varphi' dx = \int_0^1 (f - u) \varphi dx \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(]0, 1[).$$

Comme $u \in H_0^1(]0, 1[)$, elle est continue et $f - u \in C^0([0, 1])$. Donc il existe $w \in C^2([0, 1])$ telle que

$$-w'' = u - f \text{ dans } [0, 1].$$

We then have that

$$\int_0^1 u' \varphi' dx = - \int_0^1 w'' \varphi dx = \int_0^1 w' \varphi' dx \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(0, 1).$$

Et donc $\int_0^1 (u' - w') \varphi' dx = 0$ pour tout $\varphi \in H_0^1(]0, 1[)$. En posant $h := u' - w' \in L^2(]0, 1[)$, on a $h \in H^1(]0, 1[)$ et $h' = 0$. Le lemme utile nous donne alors $h = C$ p.p pour un certain $C \in \mathbb{R}$. On a alors

$$u' - w' = C \Rightarrow (u - w - Cx)' = 0 \text{ avec } u - w - Cx \in H^1(0, 1).$$

Une nouvelle application du lemme donne alors l'existence de $D \in \mathbb{R}$ tel que $u - w - Cx = D$ p.p $x \in (0, 1)$, et donc $u(x) = w(x) + Cx + D$ pour p.p. $x \in (0, 1)$. Comme $w \in C^2$, alors $u \in C^2([0, 1])$ (du moins son représentant continu).

2.4. Preuve de l'existence d'une solution classique (dite "solution forte"). Comme $u \in C^2([0, 1])$ est une solution faible, il suit de (1) du chapitre 1 que u est une solution classique de (E).

3. Plus loin...

Nous allons résoudre des problème du même type par des méthodes Hilbertiennes:

3.1. Avec un potentiel a .

THEOREM 2.2. Soit $f \in L^2(]0, 1[)$ et $a \in L^\infty(]0, 1[)$. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\int_0^1 ((u')^2 + a(x)u^2) dx \geq c \|u\|_{H_1}^2 \text{ pour tout } u \in H_0^1(]0, 1[).$$

Alors il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(]0, 1[)$ de

$$\begin{cases} -u'' + a(x)u = f & \text{dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (E_1)$$

De plus, si $a, f \in C^0([0, 1])$, alors $u \in C^2([0, 1])$ est une solution classique de (E₁).

PROOF. On dit que $u \in H_0^1(]0, 1[)$ est une solution faible de (E₁) si

$$\int_0^1 (u' \varphi' + a(x)u \varphi) dx = \int_0^1 f \varphi dx \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(]0, 1[).$$

Définissons la forme bilinéaire

$$B(u, v) := \int_0^1 (u' v' + a(x)uv) dx \text{ pour } u, v \in H_0^1(]0, 1[).$$

Alors

- B est continue on $H_0^1(]0, 1[) \times H_0^1(]0, 1[)$ (voir l'exercice sur la continuité d'une forme bilinéaire)
- B est coercive
- La formulation faible de (E_1) se traduit par $B(u, \varphi) = \int_0^1 f \varphi dx$ for all $\varphi \in H_0^1(]0, 1[)$
- Le théorème de Lax-Milgram s'applique et donne l'existence et l'unicité de la solution faible.

Alternativement, on peut aussi considérer B comme un produit scalaire et prouver que $(H_0^1(]0, 1[), B)$ est un espace de Hilbert. Pour cela, il suffit de montrer la complétude: elle a lieu car la coercivité et la continuité impliquent que la norme associée à B est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1}$.

Exercice 3: Montrez que $(H_0^1(0, 1), B)$ est un espace de Hilbert .

La preuve de la régularité est identique à celle du Théorème 2.1. □

3.2. Un problème non-symétrique.

THEOREM 2.3. Soit $f \in L^2(]0, 1[)$ et $\epsilon \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que si $|\epsilon| < \epsilon_0$, alors il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(]0, 1[)$ de

$$\begin{cases} -u'' + \epsilon u' + u = f & \text{dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (E_2)$$

De plus, si $a, f \in C^0([0, 1])$, alors $u \in C^2([0, 1])$ est une solution classique de (E_1) .

PROOF. On dit que $u \in H_0^1(]0, 1[)$ est une solution faible de (E_2) si

$$\int_0^1 (u' \varphi' + \epsilon u' \varphi + u \varphi) dx = \int_0^1 f \varphi dx \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(]0, 1[).$$

Définissons la forme bilinéaire

$$B(u, v) := \int_0^1 (u' v' + \epsilon u' v + uv) dx \text{ pour } u, v \in H_0^1(]0, 1[).$$

Alors

- B est continue sur $H_0^1(]0, 1[) \times H_0^1(]0, 1[)$
- B est coercive lorsque $|\epsilon| < \epsilon_0$ avec $\epsilon_0 > 0$ à déterminer
- La formulation faible de (E_2) se traduit par $B(u, \varphi) = \int_0^1 f \varphi dx$ pour tout $\varphi \in H_0^1(]0, 1[)$
- Le théorème de Lax-Milgram s'applique et conduit à l'existence et l'unicité de la solution faible.

Exercice 4: Démontrez ces points.

Il faut un peu plus d'efforts pour prouver la régularité. Supposons que $f \in C^0([0, 1])$. Soit $u \in H_0^1(]0, 1[)$ une solution faible de (E_2) .

Argument "formel". On voudrait écrire $u'' = g := \epsilon u' + u - f \in L^2(0, 1)$. Mais on ne peut pas raisonner comme pour (E) et prendre une fonction C^2 telle que sa dérivée seconde est une fonction L^2 . Prenons donc une "primitive" de g : comme dans la preuve du théorème 1.5, on définit

$$v(x) := \int_0^x g(t) dt \text{ pour } x \in [0, 1].$$

Alors $v \in H^1(0, 1)$ et $v' = g$, de sorte que

$$u'' = v' \Rightarrow (u' - v)' = 0 \Rightarrow u' - v = C \in \mathbb{R}$$

(il faudra rendre tout cela rigoureux). Donc $u' = v + C \in C^0([0, 1])$, et donc $g = \epsilon u' + u - f \in C^0([0, 1])$ et on peut raisonner comme pour la régularité de (E) .

Preuve rigoureuse de la régularité. Soit $v \in H_0^1(]0, 1[)$ comme plus haut de sorte que $v' = g$. Soit $\varphi \in H_0^1(]0, 1[)$: comme u est une solution faible de (E_2) , on a

$$\int_0^1 u' \varphi' dx = \int_0^1 (f - \epsilon u' - u) \varphi dx = - \int_0^1 g \varphi dx.$$

Comme $g = v'$, on a

$$\int_0^1 u' \varphi' dx = - \int_0^1 v' \varphi dx = \int_0^1 v \varphi' dx \Rightarrow \int_0^1 (u' - v) \varphi' dx = 0.$$

Soit $U := u' - v$: on a $U \in L^2(]0, 1[)$ et $\int_0^1 U \varphi' dx = 0$ pour tout $\varphi \in H_0^1(]0, 1[)$, c'est-à-dire $U \in H_0^1(]0, 1[)$ et $U' = 0$. Il suit alors du théorème 1.5 de régularité que $U = C$ p.p. pour une certaine valeur de $C \in \mathbb{R}$. Donc $u' = v + C \in C^0([0, 1])$, et donc $g \in C^0([0, 1])$. On peut alors raisonner comme pour la régularité de (E) et on obtient que $u \in C^2([0, 1])$ (au sens où elle admet un représentant C^2).

En raisonnant encore comme dans (1) du Chapitre 1, on obtient que u est une solution classique de (E_2) . $\square$

3.3. Condition au bord non-homogène. Here, we must re-think the notion of weak solution. Consider $a, f \in C^0([0, 1])$ and assume that there exists $u \in C^2([0, 1])$ solution to

$$\begin{cases} -u'' + a(x)u = f & \text{in } (0, 1) \\ u(0) = \alpha \text{ and } u(1) = \beta. \end{cases} \quad (E_4)$$

Exercise 5: Prove that for all $\varphi \in C_c^1((0, 1))$, we have that

$$\int_0^1 (u' \varphi' + a(x)u \varphi) dx = \int_0^1 f \varphi dx.$$

Since u does not vanish on the boundary, we work on the space H^1 . We say that $u \in H^1(0, 1)$ is a weak solution to (E_4) if $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$ and

$$\int_0^1 (u' \varphi' + a(x)u \varphi) dx = \int_0^1 f \varphi dx \text{ for all } \varphi \in H_0^1(0, 1).$$

Note that we take $\varphi \in H_0^1$, that is zero boundary condition.

THEOREM 2.4. Let $f \in L^2(0, 1)$ and $a \in L^\infty((0, 1))$. Fix $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. We assume that there exists $c > 0$ such that

$$\int_0^1 ((u')^2 + a(x)u^2) dx \geq c \|u\|_{H^1}^2 \text{ for all } u \in H^1(0, 1).$$

Then there exists a unique weak solution $u \in H^1(0, 1)$ to (E_4) . Moreover, if $a, f \in C^0([0, 1])$, then $u \in C^2([0, 1])$ is a classical solution to (E_4) .

PROOF. To characterize the boundary condition, we are going to work on $C := \{u \in H^1(0, 1) / u(0) = \alpha \text{ and } u(1) = \beta\}$.

Exercise 6: Show that C is nonempty, convex and closed.

Define the bilinear form

$$B(u, v) := \int_0^1 (u'v' + a(x)uv) \, dx \text{ for } u, v \in H^1(0, 1).$$

Then

- B is continuous on $H^1(0, 1) \times H^1(0, 1)$
- B is coercive
- The weak formulation of (E_4) reads $B(u, \varphi) = \int_0^1 f\varphi \, dx$ for all $\varphi \in H_0^1(0, 1)$ (and not $H^1(0, 1)$)
- The Lax-Milgram theorem ?? applies and yields existence and uniqueness

Exercise 7: Apply the Lax-Milgram theorem to the convex C , the bilinear form B and the linear form T_f . Show that the solution $u \in H_0^1(0, 1)$ you get is a weak solution to (E_4) . Show that $u \in C^2([0, 1])$ and it is a classical solution to (E_4) .

An alternative proof is to make the change of function $\tilde{u}(x) = u(x) - a - (b - a)x$ for $x \in [0, 1]$. Then $\tilde{u}$ and we rewrite (E_4) with $\tilde{u}$: this yields a problem like (E) , and the existence + uniqueness hold. $\square$

There are many other types of boundary conditions: Neumann ($u'(0) = u'(1) = 0$), mix Dirichlet-Neumann ($u(0) = 0$ and $u'(1) = 0$), homogenous or not.

3.4. A Neumann boundary problem. Consider $a, f \in C^0([0, 1])$ and assume that there exists $u \in C^2([0, 1])$ solution to

$$\begin{cases} -u'' + a(x)u = f & \text{in } (0, 1) \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (E_5)$$

Exercise 8: Prove that for all $\varphi \in C^1([0, 1])$ (this is a different space!!!), we have that

$$\int_0^1 (u'\varphi' + a(x)u\varphi) \, dx = \int_0^1 f\varphi \, dx.$$

Since u does not vanish on the boundary, we work on the space H^1 . We say that $u \in H^1(0, 1)$ is a weak solution to (E_5) if

$$\int_0^1 (u'\varphi' + a(x)u\varphi) \, dx = \int_0^1 f\varphi \, dx \text{ for all } \varphi \in H^1(0, 1).$$

Here we take H^1 , and we do not impose any boundary condition. We will see that this is enough indeed.

THEOREM 2.5. Let $f \in L^2(0, 1)$ and $a \in L^\infty((0, 1))$. We assume that there exists $c > 0$ such that

$$\int_0^1 ((u')^2 + a(x)u^2) \, dx \geq c\|u\|_{H^1}^2 \text{ for all } u \in H^1(0, 1).$$

Then there exists a unique weak solution $u \in H^1(0, 1)$ to (E_5) . Moreover, if $a, f \in C^0([0, 1])$, then $u \in C^2([0, 1])$ is a classical solution to (E_5) .

PROOF. It goes through the following steps, each being an exercise:

Exercise 9: Using Lax-Milgram's theorem, prove the existence of weak solutions.

From now on, we assume that $a, f \in C^0([0, 1])$ and $u \in H^1(0, 1)$ is a weak solution to (E_5) .

Exercise 10: Prove that $u \in C^2([0, 1])$.

Exercise 11: Take $\varphi \in C^1([0, 1])$. Prove that

$$\int_0^1 (-u'' + au)\varphi \, dx = \int_0^1 f\varphi \, dx + (-u'(1)\varphi(1) + u'(0)\varphi(0))$$

Exercise 12: Taking some suitable φ above, prove that $-u'' + au = f$ in $[0, 1]$.

Exercise 13: Prove that $u'(0) = u'(1) = 0$.

□

3.5. A mixed boundary condition problem.

THEOREM 2.6. *Let $a, f \in C^0([0, 1])$ be two functions. We assume that there exists $c > 0$ such that*

$$\int_0^1 ((u')^2 + a(x)u^2) \, dx \geq c\|u\|_{H_1}^2 \text{ for all } u \in H^1(0, 1).$$

Then there exists a unique solution $u \in C^2([0, 1])$ to

$$\begin{cases} -u'' + a(x)u = f & \text{in } (0, 1) \\ u(0) = 0 \text{ and } u'(1) = 0. \end{cases}$$

PROOF. Do it yourself!

□

4. A little disappointment...

The methods above are very classical, and they are mostly used for higher-dimensional problem. Sometimes, in 1D, the theory of ODEs is enough to get solutions.

Here is an example. Take $k, a, f \in C^0([0, 1])$ and investigate the existence of solutions to

$$\begin{cases} -u'' + k(x)u' + a(x)u = f & \text{in } (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (E_5)$$

THEOREM 2.7. *In addition to the hypothesis above, assume that $a(x) > 0$ for all $x \in [0, 1]$. Then there exists a unique solution $u \in C^2([0, 1])$ to (E_5) .*

PROOF. It follows from standard theory on ODEs that there exists $u_0 \in C^2([0, 1])$ that is a solution to $-u_0'' + k(x)u_0' + a(x)u_0 = f$ in $[0, 1]$. For instance, one can impose the value of $u_0(0)$ and $u_0'(0)$ to get existence and uniqueness.

We make the change of function $v := u - u_0$, so that

$$\begin{cases} -v'' + k(x)v' + a(x)v = 0 & \text{in } (0, 1) \\ v(0) = -u_0(0) \text{ and } v(1) = -u_0(1). \end{cases} \quad (E'_5)$$

We define $\mathcal{S} := \{C^2 - \text{Solutions to } -u'' + k(x)u' + a(x)u = 0 \text{ in } [0, 1]\}$. Linear theory for ODEs yields that $\mathcal{S}$ is 2-dimensional. Define

$$\begin{cases} T: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ v \mapsto (v(0), v(1)) \end{cases}$$

If we prove that T is a bijection, we are done since then $u = T^{-1}(-u_0(0), -u_0(1))$ is a solution to $(E_5)'$. Since T is linear and $\dim(\mathcal{S}) = \dim(\mathbb{R}^2)$, it is enough to prove that T is injective, that is

$$v \in C^2([0, 1]) \text{ and } \begin{cases} -v'' + k(x)v' + a(x)v = 0 & \text{in } (0, 1) \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow v \equiv 0.$$

Which is exactly Step 2 in the application of the method of continuity in Chapter ??.

So T is bijective and we get a solution to $(E_5)'$, yielding a solution to (E) $\square$

Disappointing, isn't it? It should not be for at least two reasons:

- The method works for a large class of non-continuous coefficients;
- This is an introduction to the PDEs in d -dimensions, for which there is no Cauchy-Lipschitz theorem.

5. Solution of the exercises of Chapter 2

Solution of Exercise 3: The bilinearity of B is clear. The definition of the constant c yields

$$B(u, u) = \int_0^1 ((u')^2 + a(x)u^2) dx \geq c\|u\|_{H^1}^2 \text{ for all } u \in H_0^1(0, 1).$$

Therefore, given $u \in H_0^1$, we have that $B(u, u) \geq 0$, with equality only if $u \equiv 0$. Therefore B is a scalar product. Moreover,

$$B(u, u) = \int_0^1 ((u')^2 + a(x)u^2) dx \leq \int_0^1 (u')^2 dx + \|a\|_\infty \int_0^1 u^2 dx \leq M\|u\|_{H^1}^2$$

for all $u \in H_0^1(0, 1)$ with $M := 1 + \|a\|_\infty$. So we then have that

$$\sqrt{c}\|u\|_{H^1} \leq \sqrt{B(u, u)} \leq \sqrt{M}\|u\|_{H^1} \text{ for all } u \in H_0^1.$$

So the norms $\|\cdot\|_B = \sqrt{B(\cdot, \cdot)}$ and $\|\cdot\|_{H^1}$ are equivalent, and since $(H_0^1, \|\cdot\|_{H^1})$ is complete, so is $(H_0^1, \|\cdot\|_B)$. Then (H_0^1, B) is a Hilbert space. $\square$

Solution of Exercise 4:

- There is no difficulty to prove that B is bilinear. For $u, v \in H_0^1(0, 1)$, we have that

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &= \left| \int_0^1 (u'v' + \epsilon u'v + uv) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |u'| \cdot |v'| dx + |\epsilon| \int_0^1 |u'| \cdot |v| dx + \int_0^1 |u| \cdot |v| dx \\ &\leq \|u'\|_2 \|v'\|_2 + |\epsilon| \|u'\|_2 \|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_2 \leq (1 + |\epsilon| + 1) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

So, according to the first point of Exercise ??, B is continuous.

- For $u \in H_0^1(0, 1)$, we have that

$$B(u, u) = \int_0^1 (u')^2 dx + \epsilon \int_0^1 u' u dx + \int_0^1 u^2 dx$$

With Cauchy-Schwarz inequality, and $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ for all $a, b \geq 0$, we have that

$$\left| \int_0^1 u' u dx \right| \leq \|u'\|_2 \|u\|_2 \leq \frac{\|u'\|_2^2 + \|u\|_2^2}{2},$$

and then

$$\begin{aligned} B(u, u) &\geq \|u'\|_2^2 - |\epsilon| \frac{\|u'\|_2^2 + \|u\|_2^2}{2} + \|u\|_2^2 \\ &\geq \left(1 - \frac{|\epsilon|}{2}\right) (\|u'\|_2^2 + \|u\|_2^2) = \left(1 - \frac{|\epsilon|}{2}\right) \|u\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

And then for $|\epsilon| < 2$, B is coercive.

- Clear.
- Since $T_f : H_0^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ is linear and continuous, then we apply the Theorem with $H = C = H_0^1(0, 1)$, which yields existence and uniqueness of the weak solution.

□

Solution of Exercise 5: This is a direct consequence of the integration by parts

$$\int_0^1 (-u'' + a(x)u)\varphi dx = [-u'(1)\varphi(1) + u'(0)\varphi(0)] + \int_0^1 (u'\varphi' + a(x)u\varphi) dx.$$

□

Solution of Exercise 6: $C = T^{-1}(\alpha, \beta)$ with T continuous, so it is closed. It is also convex (easy to check). It is nonempty since $x \mapsto \alpha + (\beta - \alpha)x \in C$.

□

Solution of Exercise 7: The continuity and coercivity of B are as above. We apply Lax-Milgram's theorem. Then there exists a unique $u_C \in C$ such that

$$B(u_C, v - u_C) \geq T_f(v - u_C) \text{ for all } v \in C.$$

The space C is not linear, but it has an affine structure. Take $\varphi \in H_0^1(0, 1)$: we have that $u_C + \varphi \in C$, and then

$$B(u_C, \varphi) = B(u_C, (u_C + \varphi) - u_C) \geq T_f((u_C + \varphi) - u_C) = T_f(\varphi) \text{ for all } \varphi \in H_0^1(0, 1).$$

Taking $-\varphi$ and using the bilinearity of B , we get that

$$-B(u_C, \varphi) = B(u_C, -\varphi) \geq T_f(-\varphi) = -T_f(\varphi)$$

and therefore $B(u_C, \varphi) = T_f(\varphi)$ for all $\varphi \in H_0^1(0, 1)$, which says that u_C is a weak solution to (E_4) . We can go backwards and show that there is an equivalence, which yields existence and uniqueness.

The regularity goes as in the proof of Theorem 2.1, and then $u_C \in C^2([0, 1])$.

Let us now prove that $u = u_C$ is a solution to (E_4) . This goes as in the motivation of Chapter 1. Integrating by parts as in the solution of Exercise 5 and using that we have a weak solution to (E_4) , then for any $\varphi \in C_c^1((0, 1)) \subset H_0^1(0, 1)$, we have that

$$\int_0^1 (-u'' + a(x)u)\varphi dx = \int_0^1 (u'\varphi' + a(x)u\varphi) dx = B(u, \varphi) = T_f(\varphi) = \int_0^1 f\varphi dx.$$

Then, writing $h := -u'' + a(x)u - f \in C^0([0, 1])$, we get that $\int_0^1 h\varphi dx = 0$ for all $\varphi \in C_c^1((0, 1))$. This extends to any $\varphi \in L^2(0, 1)$ by density, then taking $h = \varphi$ yields $h(x) = 0$ a.e. $x \in (0, 1)$, and then $h \equiv 0$ since h is continuous. So $-u'' + a(x)u = f(x)$ in $[0, 1]$. Moreover, since $u \in C$, we have that $u(0) = \alpha$ and $u(1) = \beta$. So we have got a solution to (E_4) .

□

Solution of Exercise 8: Here again, this is a consequence of the integration by parts

$$\int_0^1 (-u'' + a(x)u)\varphi dx = [-u'(1)\varphi(1) + u'(0)\varphi(0)] + \int_0^1 (u'\varphi' + a(x)u\varphi) dx.$$

The condition $u'(0) = u'(1) = 0$ allows to allow any boundary condition for φ . $\square$

Solution of Exercise 9: As above, we get that B is continuous and coercive on the Hilbert space $(H^1(0, 1), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1})$ where

$$B(u, v) = \int_0^1 (u'v' + a(x)uv) dx \text{ for } u, v \in H^1(0, 1).$$

Since $T_f : v \mapsto \int_0^1 fv dx$ is continuous on H^1 , Lax-Milgram's theorem yields a unique weak solution to (E_5) . $\square$

Solution of Exercise 10: We argue as in the proof of Theorem 2.1. We have that

$$\int_0^1 u'\varphi' dx = \int_0^1 (f - u)\varphi dx \text{ for all } \varphi \in H^1(0, 1).$$

Since $u \in H^1(0, 1)$, it is continuous and $f - u \in C^0([0, 1])$. So, there exists $w \in C^2([0, 1])$ such that $-w'' = u - f$ in $[0, 1]$. We then have that

$$\int_0^1 u'\varphi' dx = - \int_0^1 w''\varphi dx = \int_0^1 w'\varphi' dx \text{ for all } \varphi \in H^1(0, 1).$$

And then $\int_0^1 (u' - w')\varphi' dx = 0$ for all $\varphi \in H^1(0, 1)$, therefore for all $\varphi \in C_c^1(0, 1)$. Setting $h := u' - w' \in L^2(0, 1)$, this yields $h \in H^1(0, 1)$ and $h' = 0$, so $h = C$ a.e. for some $C \in \mathbb{R}$. So we have that

$$u' - w' = C \Rightarrow (u - w - Cx)' = 0 \text{ with } u - w - Cx \in H^1(0, 1).$$

It then follows from our regularity result that there exists $D \in \mathbb{R}$ such that $u - w - Cx = D$ a.e. $x \in (0, 1)$, and then $u(x) = w(x) + Cx + D$ for a.e. $x \in (0, 1)$. Since $w \in C^2$, then $u \in C^2([0, 1])$ (or at least has a representative). $\square$

Solution of Exercise 11: The integration by parts of Exercise 8 yields

$$\int_0^1 (-u'' + au)\varphi dx = \int_0^1 (u'v' + a(x)uv) dx + (-u'(1)\varphi(1) + u'(0)\varphi(0)),$$

and the definition of a weak solutions gives the result. $\square$

Solution of Exercise 12: The identity of Exercise 11 yields

$$\int_0^1 (-u'' + au)\varphi dx = \int_0^1 f\varphi dx$$

for all $\varphi \in C_c^1((0, 1))$. Define $h := -u'' + au - f \in C^0([0, 1])$ so that $\int_0^1 h\varphi dx = 0$ for all $\varphi \in C_c^1((0, 1))$. Since $h \in L^2(0, 1)$ and $C_c^1(0, 1)$ is dense in $L^2(0, 1)$, we have that this identity holds for all $\varphi \in L^2(0, 1)$. Taking $\varphi := h$, we get $h \equiv 0$ a.e, so $-u'' + au = f$ in $[0, 1]$ since it is continuous. $\square$

Solution of Exercise 13: It follows from Exercises 11 and 12 that

$$-u'(1)\varphi(1) + u'(0)\varphi(0) = 0 \text{ for all } \varphi \in C^1([0, 1]).$$

Taking $\varphi(x) = x$ for all $x \in [0, 1]$ yields $u'(1) = 0$. Taking $\varphi(x) = 1 - x$ for all $x \in [0, 1]$ yields $u'(0) = 0$. We have then obtained a strong solution $u \in C^2([0, 1])$ to the problem

$$\begin{cases} -u'' + a(x)u = f & \text{in } (0, 1) \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (E_5)$$

and Theorem 2.5 is proved. $\square$