

TD 4 : Résidus

Certaines intégrales sont parfois calculables en primitivant (même si en général c'est assez long) : on demande de ne pas le faire et de n'utiliser que le théorème des résidus.

Exercice 1. Calculer les résidus aux pôles des fonctions méromorphes $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)}$ et $g(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2}$.

Solution : On utilise les méthodes du cours.

$$\operatorname{Res}(f, 1) = e, \operatorname{Res}(f, 0) = -2, \operatorname{Res}(g, 1) = 0, \operatorname{Res}(g, 0) = 1.$$

Exercice 2. Calculer les résidus aux pôles de la fonction méromorphe $f(z) = \frac{1+z+z^2}{z(z^2+1)^2}$.

Solution :

On applique les formules du cours sur les dérivées. Les résidus valent

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 1, \operatorname{Res}(f, i) = \frac{-2-i}{4}, \operatorname{Res}(f, -i) = \frac{-2+i}{4}.$$

Exercice 3. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

Solution : On intègre la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ sur le demi-cercle D_R de centre 0 et de rayon $R > 1$ situé dans le demi-plan supérieur $\{\Im z > 0\}$. L'intégrale s'écrit

$$\int_{D_R} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^\pi \frac{Rie^{i\theta}}{1+(Re^{i\theta})^2} d\theta.$$

D'après le théorème des résidus,

$$\int_{D_R} f(z) dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f, i) = \frac{2i\pi}{2i} = \pi.$$

Exercice 4. Calculer avec la formule des résidus les intégrales $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{2+3x^2}$ et $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x+x^2}$.

Solution :

On applique la formule des résidus sur le demi-cercle de centre 0 et de rayon $R > 1$ situé dans le demi-plan supérieur. La première intégrale vaut $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$ et la deuxième $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

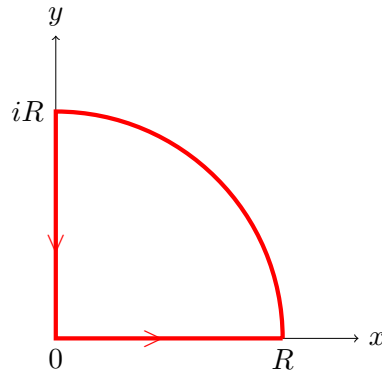
Exercice 5. Montrer que $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Puis, calculer $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^6}$.

Solution :

(a) On applique la formule des résidus à la fonction méromorphe $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ sur le quart de cercle D_R de centre 0 et de rayon $R > 1$ reliant R à iR . Le seul pôle à l'intérieur de D_R est $e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (pôle simple) et le résidu vaut $\frac{1-i}{4\sqrt{2}i}$. La formule des résidus donne :

$$\int_{D_R} f(z) dz = (1-i) \int_0^R \frac{dt}{1+t^4} + \int_0^{\pi/2} \frac{rie^{i\theta} d\theta}{1+(Re^{i\theta})^4} = 2i\pi \times \frac{1-i}{4\sqrt{2}i} = \frac{(1-i)\pi}{2\sqrt{2}}$$

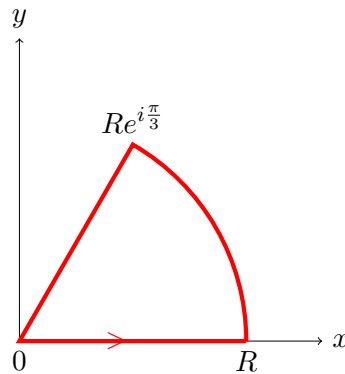
donc $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$



(b) On applique la formule des résidus à la fonction méromorphe $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$ sur le sixième de cercle D_R de centre 0 et de rayon $R > 1$ reliant R à $Re^{i\pi/3}$. Le seul pôle à l'intérieur de D_R est $e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ (pôle simple) et le résidu vaut $\frac{1}{6ie^{i\pi/3}}$. La formule des résidus donne :

$$\int_{D_R} f(z)dz = (1 - e^{i\pi/3}) \int_0^R \frac{dt}{1+t^6} + \int_0^{\pi/3} \frac{rie^{i\theta}d\theta}{1+(Re^{i\theta})^6} = 2i\pi \times \frac{1}{6ie^{i\pi/3}} = \frac{\pi}{3e^{i\pi/3}}$$

donc $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}.$



Exercice 6. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Solution : On applique la formule des résidus à la fonction méromorphe $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ sur le demi-cercle D_R de centre 0 et de rayon $R > 1$ situé dans le demi-plan supérieur. Le seul pôle à l'intérieur de D_R est i (pôle double).

Exercice 7. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x(x+1)dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Solution : On applique la formule des résidus à la fonction méromorphe $f(z) = \frac{z(z+1)}{(1+z^2)^2}$ sur le demi-cercle D_R de centre 0 et de rayon $R > 1$ situé dans le demi-plan supérieur. Le seul pôle à l'intérieur de D_R est i (pôle double).

Exercice 8. Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + \sin(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Solution :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + \sin(t)} = \int_{C(0,1)} \frac{2}{iz(6 - z - z^{-1})} dz = \frac{2}{i} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{6z - z^2 - 1}.$$

La fonction $f(z) = \frac{1}{6z - z^2 - 1}$ est méromorphe et a deux pôles simples en $3 \pm 2\sqrt{2}$. Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + \sin(t)} = \frac{2}{i} 2i\pi \operatorname{Res}(f, 3 - 2\sqrt{2}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 9 (Série de Fourier). Développer la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{2 - \cos(t)}$ en série de Fourier, en calculant les coefficients à l'aide de résidus.

Solution :

Le développement en série de Fourier de f est

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)$$

où les coefficients de Fourier réels de f sont donnés par $a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos(t)} dt$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{2 - \cos(t)} dt$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin(nt)}{2 - \cos(t)} dt$ pour $n \geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \Re \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{4 - e^{it} - e^{-it}} dt \\ &= \Re \frac{2}{i\pi} \int_{C(0,1)} \frac{z^n}{4z - 1 - z^2} dz \end{aligned}$$

et $a_0(f) = \frac{1}{i\pi} \int_{C(0,1)} \frac{1}{4z - 1 - z^2} dz$. La fonction $g_n(z) = \frac{z^n}{4z - 1 - z^2}$ est méromorphe et a deux pôles simples en $2 \pm \sqrt{3}$. Seul le pôle $2 - \sqrt{3}$ est dans le disque $D(0, 1)$. La formule des résidus donne :

$$\int_{C(0,1)} g_n(z) dz = 2i\pi \operatorname{Res}(g_n, 2 - \sqrt{3}) = 2i\pi \frac{(2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

donc $b_n(f) = 0$, $a_n(f) = 2 \frac{(2 - \sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}$ et $a_0(f) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 10 (Intégrales de Wallis). Calculer les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt$.

Solution : On sait que $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{e^{it} + (e^{it})^{-1}}{2}$. On peut donc écrire

$$W_n = \int_0^{2\pi} (ie^{it})^{-1} \left(\frac{e^{it} + (e^{it})^{-1}}{2} \right)^{2n} ie^{it} dt = \int_{C(0,1)} \frac{1}{iz} \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^{2n} dz.$$

Posons $f(z) = \frac{1}{iz} \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^{2n}$. On a $(z + z^{-1})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k z^{k-2n}$. Donc le coefficient devant z^{-1} dans le développement $\frac{1}{z} (z + z^{-1})^{2n}$ est $\binom{2n}{n}$. Ainsi, $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{i2^{2n}} \binom{2n}{n}$.

D'après la formule des résidus,

$$W_n = 2i\pi \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n}.$$

Exercice 11 (Transformée de Fourier). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Calculer sa transformée de Fourier¹

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Solution : Soit g la fonction définie par $g(z) = \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2}$. C'est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec deux pôles simples en i et $-i$.

Considérons le cas où $\omega > 0$. On va intégrer sur le demi-cercle D_R de centre 0 et de rayon $R > 1$ situé dans le demi-plan inférieur (on veut faire tendre l'intégrale de $|e^{-i\omega Re^{it}}| = e^{\omega R \sin t}$ vers 0 quand R tend vers $+\infty$, donc il faut ici que $\sin t < 0$). On peut écrire :

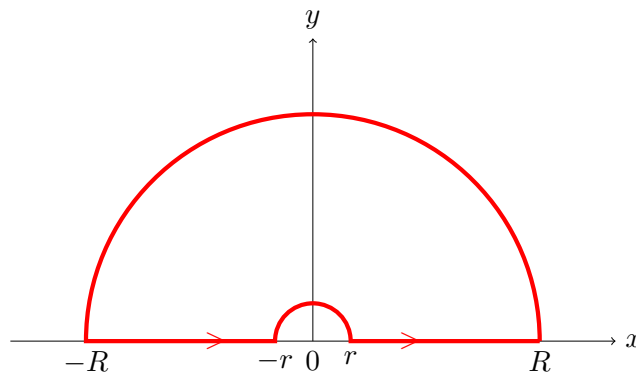
$$\begin{aligned} \int_{D_R} g(z) dz &= \int_{-\pi}^0 iRe^{it} \frac{e^{-i\omega Re^{it}}}{1+(Re^{it})^2} dt - \int_{-R}^R \frac{e^{-i\omega t}}{1+t^2} dt \\ &= 2i\pi \operatorname{Res}(g, -i) \\ &= 2i\pi \frac{e^{-\omega}}{-2i} = -\pi e^{-\omega} \end{aligned}$$

La deuxième intégrale est celle que l'on veut en passant à la limite. Comme $\sin t \leq 0$ pour $t \in [-\pi, 0]$, la première intégrale tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$. On obtient

$$\hat{f}(t) = \pi e^{-\omega}.$$

Si $\omega < 0$, on obtient la même chose en intégrant cette fois sur le demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur ($\{\Im > 0\}$).

Exercice 12 (Intégrale de Dirichlet / sinus cardinal). La fonction *sinus cardinal*, utilisée notamment en optique, est $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. Elle se prolonge par continuité en une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Elle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ mais l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente. Calculer cette intégrale en utilisant la fonction méromorphe $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ et en considérant les compacts du type $K(R, r) = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) \geq 0, r \leq |z| \leq R\}$. (Note : les primitives du sinus cardinal ne peuvent pas être exprimées à l'aide des fonctions usuelles.)



Solution : On a

$$\int_{\partial K(R, r)} f(z) dz = \int_r^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_0^\pi iRe^{it} \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} dt + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt - \int_0^\pi ire^{it} \frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}} dt.$$

¹La variable ω est la pulsation : il existe une définition analogue en fonction de la fréquence $\nu = \omega/2\pi$. D'autre part on rajoute souvent un facteur $1/\sqrt{2\pi}$ devant l'intégrale pour avoir de meilleures formules d'inversion. On doit alors redéfinir la convolution avec le même facteur devant l'intégrale.

D'après la formule des résidus, cette intégrale vaut 0, puisque le seul pôle de f , qui est 0, n'est pas contenu dans $K(R, r)$. Par ailleurs,

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_r^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it}}{t} dt.$$

Il reste à évaluer les deux autres intégrales. Déjà,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi iRe^{it} \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} dt \right| &\leq \int_0^\pi |ie^{iRe^{it}}| dt \\ &\leq \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

De plus,

$$\int_0^\pi ire^{it} \frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}} dt = \int_0^\pi ie^{ire^{it}} dt \xrightarrow{r \rightarrow 0} i\pi.$$

Ainsi, en passant à la limite, on obtient l'égalité :

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it}}{t} dt - i\pi$$

et en prenant la partie imaginaire,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt = \pi.$$