

Bertrand KIERREN

Institut Jean Lamour - département Physique de la Matière et des Matériaux
Equipe Surfaces et Spectroscopies

bertrand.kierren@univ-lorraine.fr

Instrumentation / Analyse de Fourier

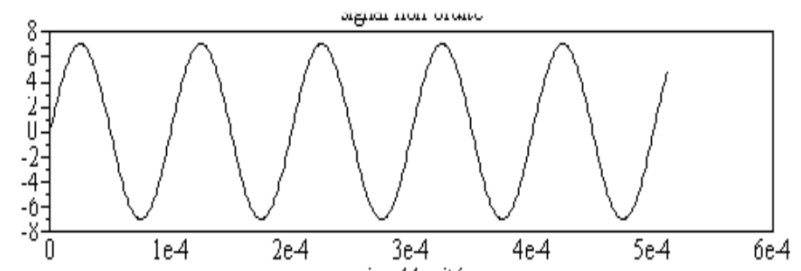
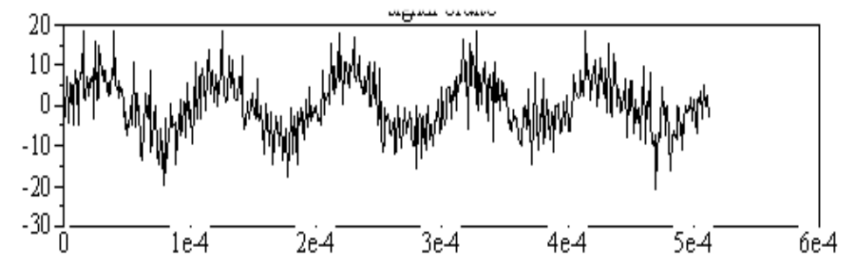
Cours en ligne sur ARCHE <https://arche.univ-lorraine.fr/course/view.php?id=1364>

BIBLIOGRAPHIE

Notions élémentaires sur la transformée de Fourier - M. LECOMTE

Abrégé de cours sur le calcul numérique de la TF - J.M LEMASQUERIER

CONTEXTE



CONTEXTE

L'analyse de Fourier va nous permettre

d'analyser un signal composite : décomposer le signal en contributions élémentaires

de filtrer (éliminer) les contributions indésirables

Isoler une contribution particulière

Action d'un filtre sur un signal composite

CHAPITRE 1 :

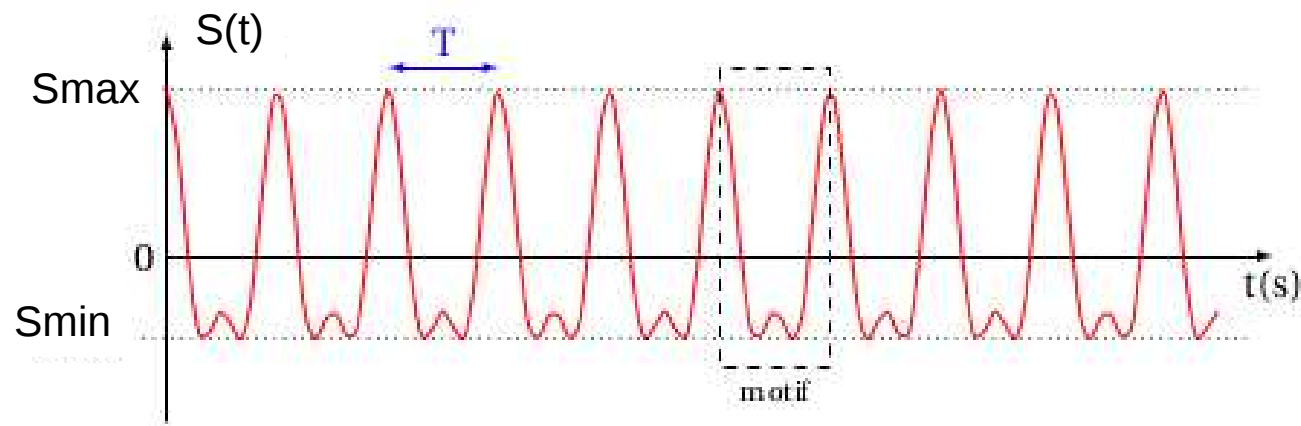
Notion de série de Fourier et transformée de Fourier

1. RAPPEL : DECOMPOSITION DE FOURIER D'UNE FONCTION PERIODIQUE

Soit $f(t)$ une fonction périodique à valeur réelle

$$f(t + T_0) = f(t)$$

$$T_0 = \frac{1}{\nu_0} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu_0$$



1. RAPPEL : DECOMPOSITION DE FOURIER D UNE FONCTION PERIODIQUE

Soit $f(t)$ une fonction périodique à valeur réelle

$$f(t + T_0) = f(t) \qquad T_0 = \frac{1}{\nu_0} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu_0$$

$f(t)$ peut s'écrire sous certaines conditions (continuité et mesure)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)$$

$f(t)$ peut donc se décomposer sur une base de fonctions sinus et cosinus de différentes fréquences:

ν_0 = fréquence fondamentale

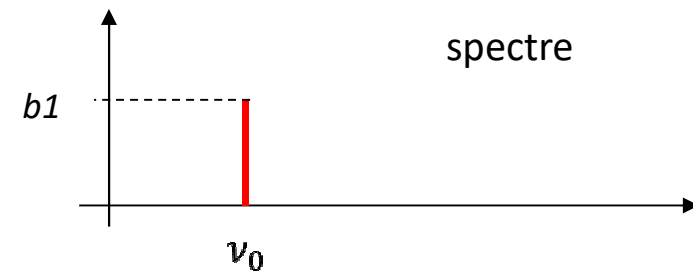
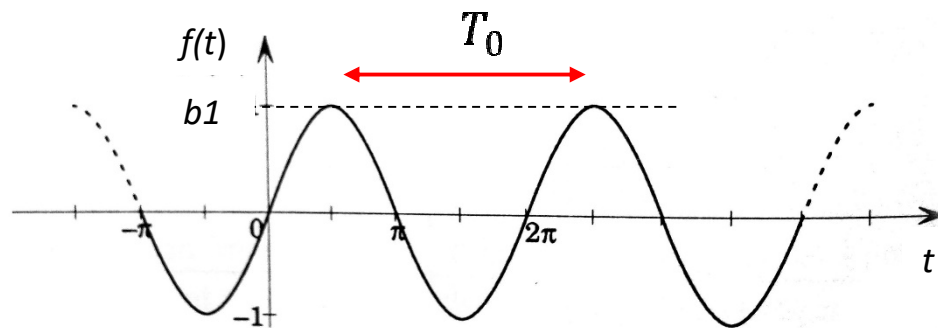
$\nu_n = n \cdot \nu_0$ = harmoniques ($n > 1$)

L'ensemble des a_n (b_n) et des ν_n constitue le spectre de Fourier

2. EXEMPLES

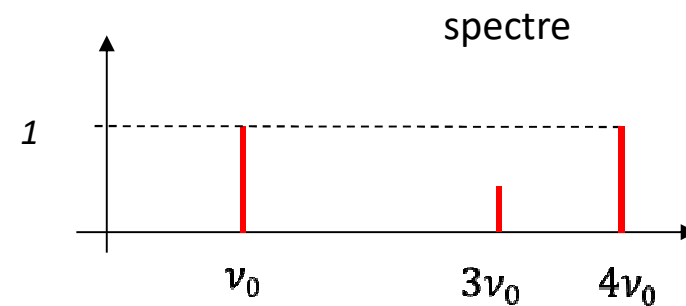
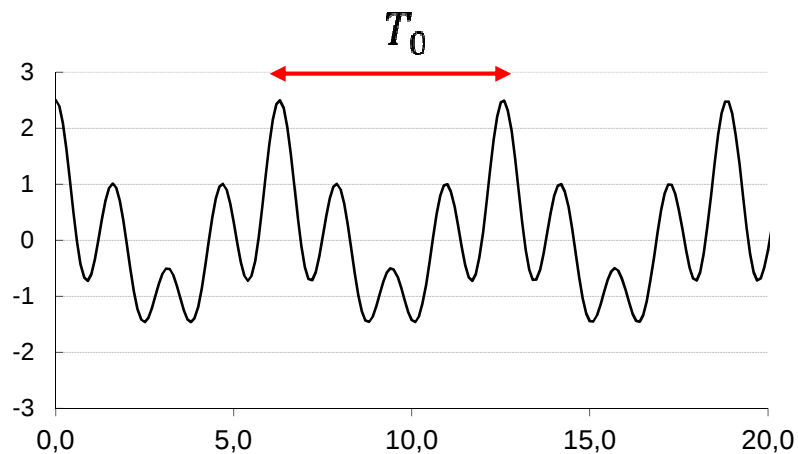
Signal harmonique (sinusoïdale) pur:

$$f(t) = b_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \nu_0 \cdot t)$$



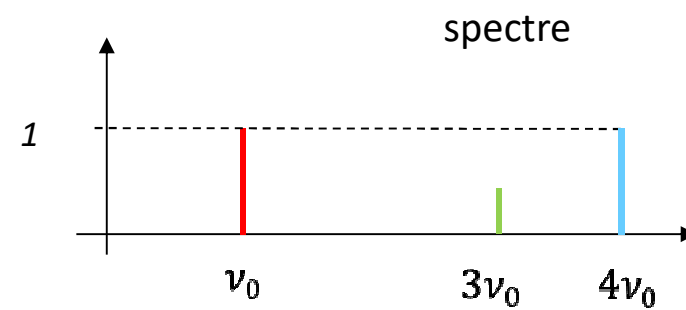
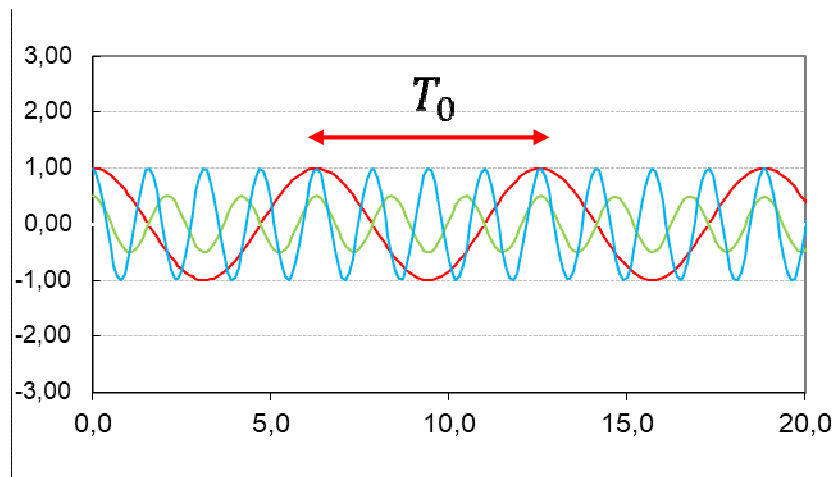
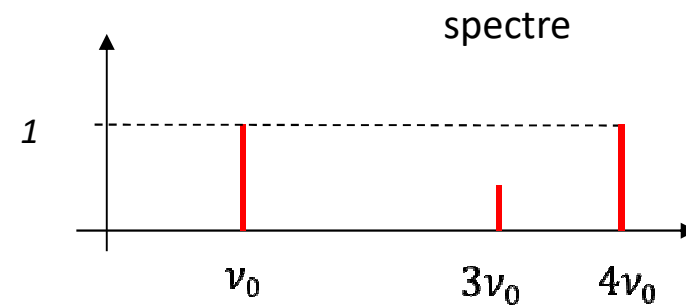
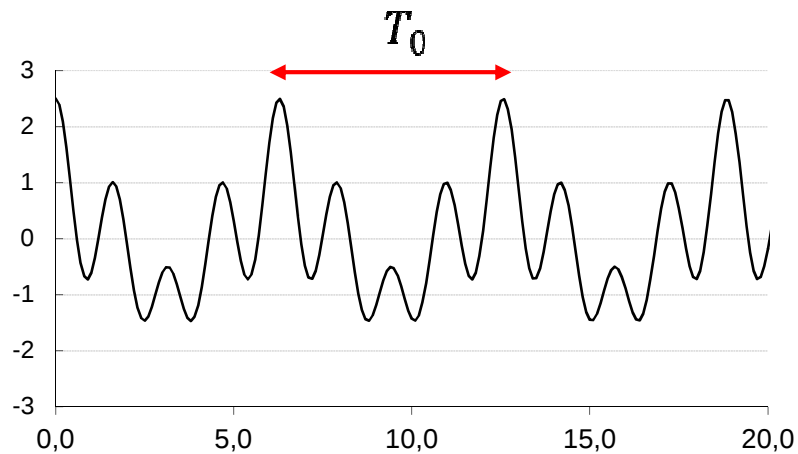
signal composite simple :

$$g(t) = \cos(\omega_0 t) + 0.5 \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + \cos(4 \cdot \omega_0 t)$$



2. EXEMPLES

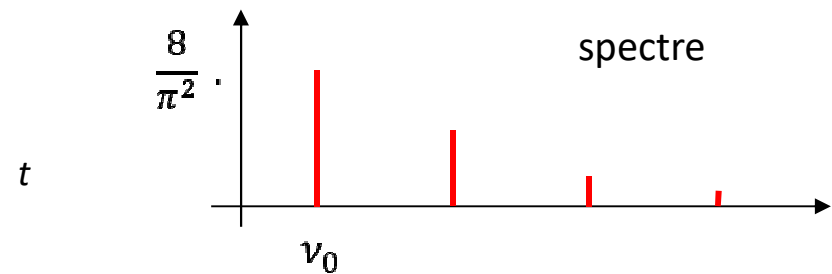
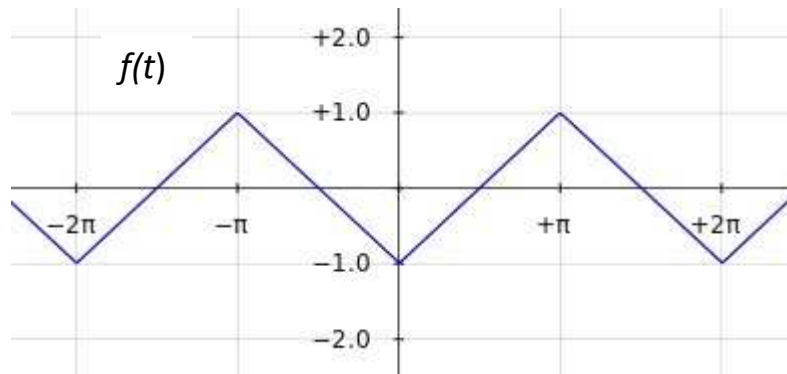
Signal composite simple : $g(t) = \cos(\omega_0 t) + 0.5 \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + \cos(4 \cdot \omega_0 t)$



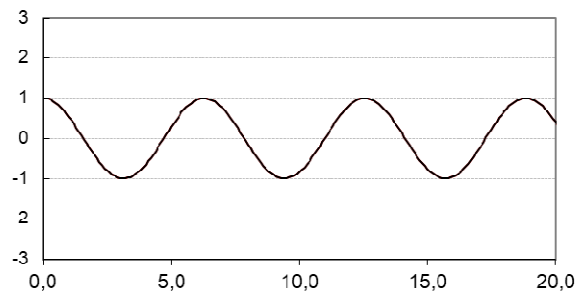
2. EXEMPLES

Fonction triangle (ici paire)

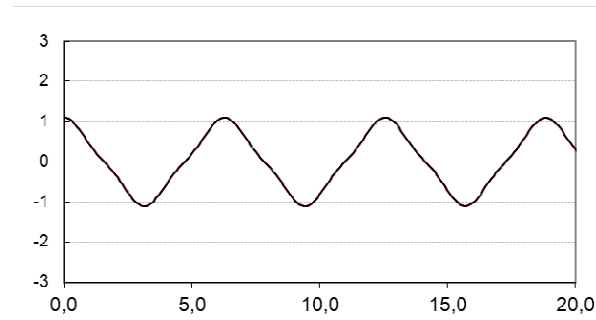
$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cdot \cos(2p+1)\omega_0 \cdot t$$



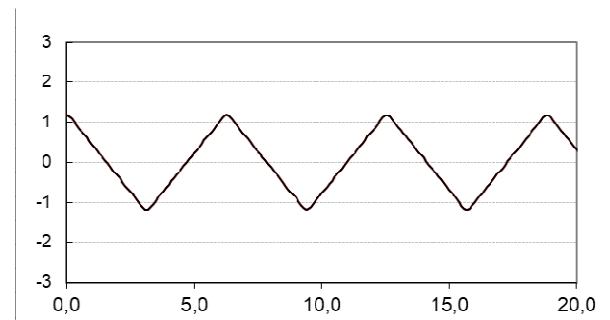
Décroissance des coefficients de Fourier en $1/n^2$



1 terme



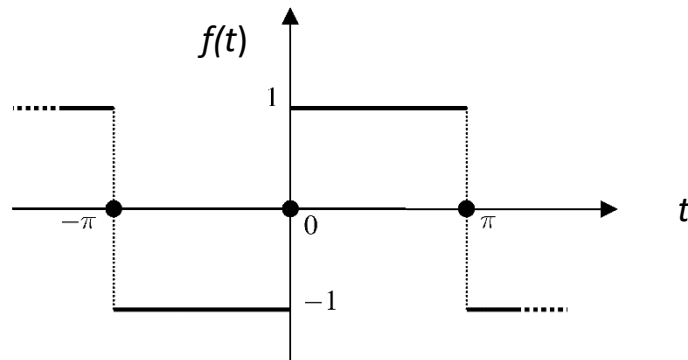
2 termes



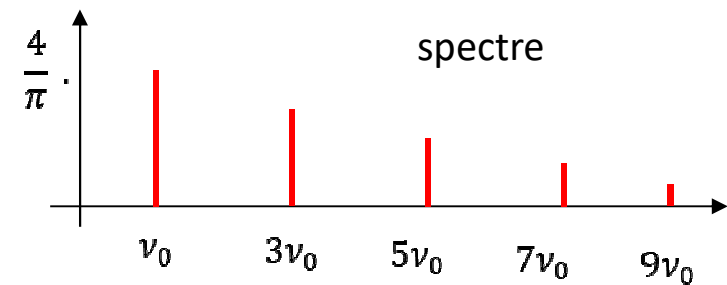
5 termes

2. EXEMPLES

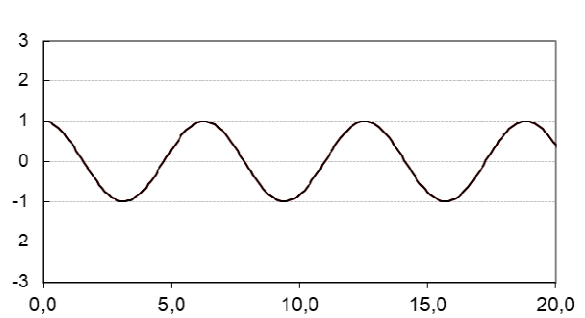
Fonction créneaux (ici impaire)



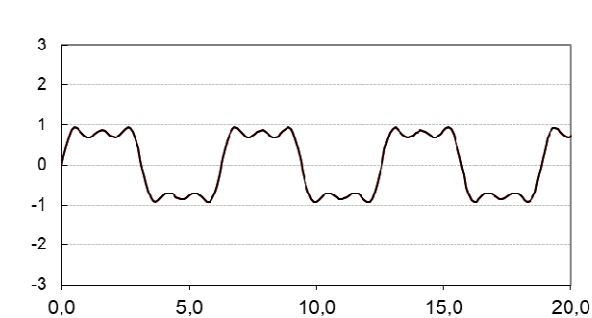
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)} \sin(2p+1)\omega_0 \cdot t$$



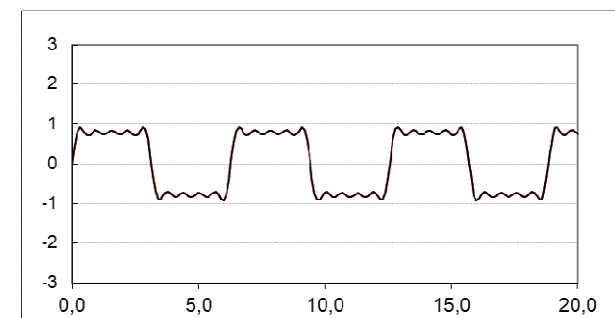
Décroissance des coefficients de Fourier en $1/n$



1 terme : $n=1$



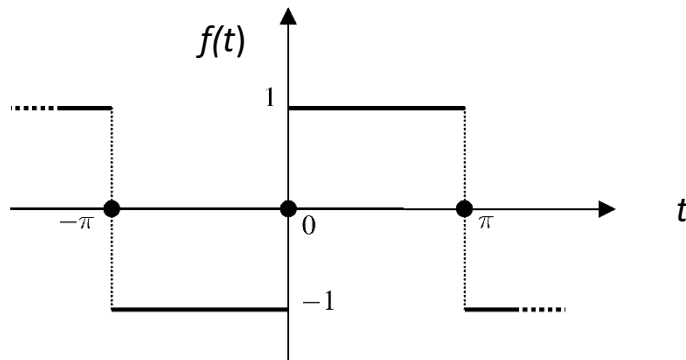
3 termes : $n=5$



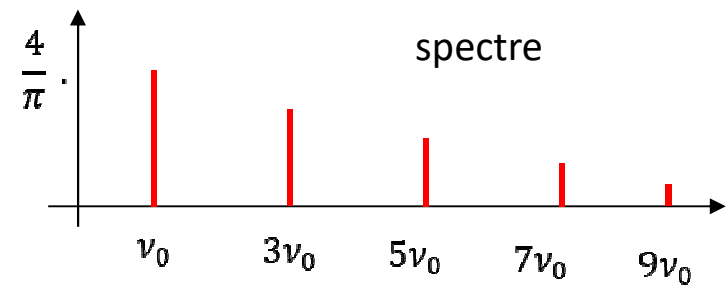
5 termes : $n=9$

2. EXEMPLES

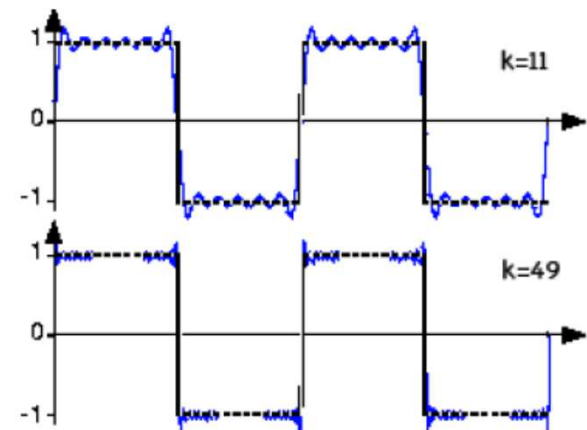
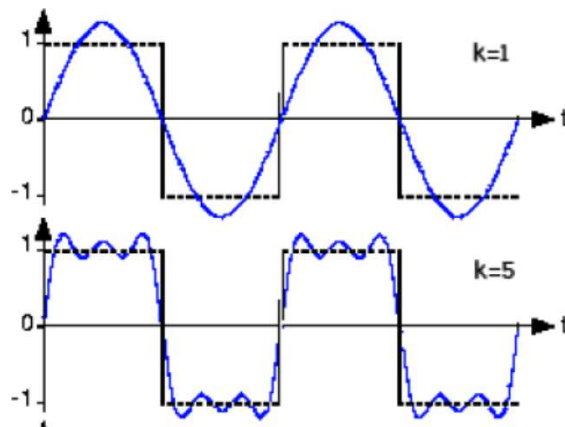
Fonction créneaux (ici impaire)



$$f(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)} \sin(2p+1)\omega_0 \cdot t$$



Phénomène de Gibbs



Oscillations au voisinage des discontinuité pour les fonctions continues par morceaux (C1)

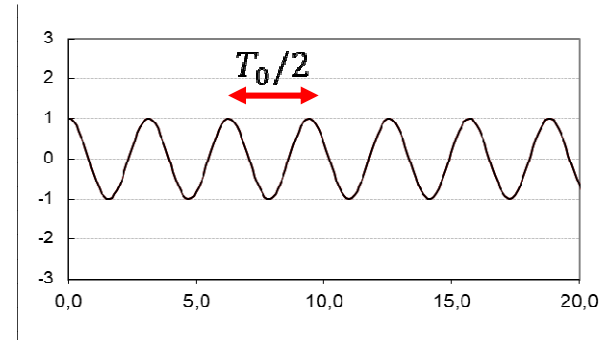
3. Cas particuliers

Essayons les cas suivants:

$$a_1 = 0$$

$$a_2 \neq 0$$

$$a_i = 0 \text{ pour } i \geq 3$$

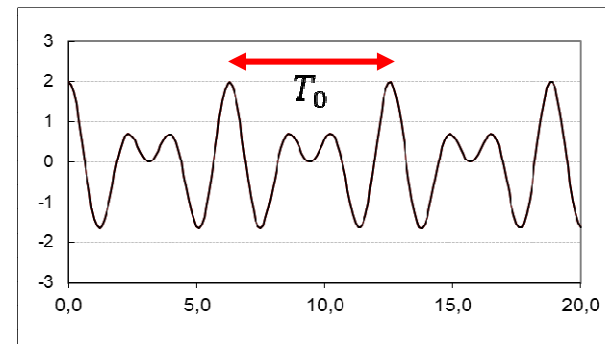


$$a_1 = 0$$

$$a_2 \neq 0$$

$$a_3 \neq 0$$

$$a_i = 0 \text{ pour } i \geq 4$$

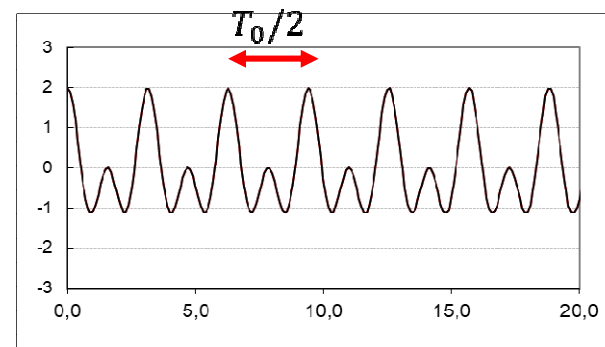


$$a_1 = 0$$

$$a_2 \neq 0$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 \neq 0 \text{ et } a_i = 0 \text{ pour } i \geq 4$$



4. Coefficients de Fourier

Les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

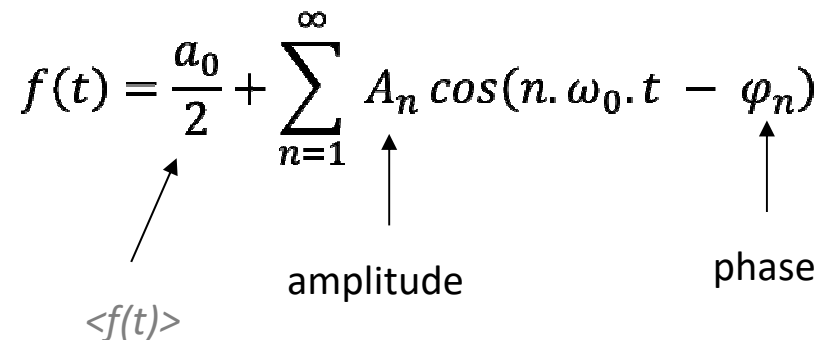
$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cdot dt = \langle f(t) \rangle$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

Valeur moyenne de $f(t)$

Autre écriture du développement en série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t - \varphi_n)$$



$$a_n = A_n \cos \varphi_n$$

$$b_n = A_n \sin \varphi_n$$

Évident: $\cos(a-b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b)$

4. Coefficients de Fourier

Les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cdot dt = \langle f(t) \rangle$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

Valeur moyenne de $f(t)$

Parité :

Si la fonction $f(t)$ est	paire	→	tous les b_n sont nuls	(facile à démontrer)
	impaire	→	tous les a_n sont nuls	

Égalité de Parseval: $\|f(t)\|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ valeur quadratique moyenne

5. Développement des fonctions à valeur complexes

Pour une fonction à valeur complexe, le développement en série de Fourier s'écrira:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(in\omega_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(2i\pi n\nu_0 t)$$


Coefficients complexes

Nombre complexe

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \exp(-in\omega_0 t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \exp(-2i\pi n\nu_0 t) dt$$

Rappel : produit scalaire de 2 fonctions

$$f \cdot g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)} \cdot dt$$

On remarque que le coefficient C_n est obtenu par projection de $f(t)$ sur le vecteur de base $\exp(in\omega_0 t)$

6. Généralisation aux fonctions non périodiques – notion de Transformée de Fourier

Passage à une somme continue:

Soit $f(t)$ une fonction appartenant à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions sommables

On appelle transformée de Fourier de la fonction $f(t)$ fonction $F(\nu)$ définie par:

$$F(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-2i\pi\nu t} dt$$

Toute fonction $f(t)$ peut alors se décomposer sur une base continue de la manière suivante:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \cdot e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

Remarque:

fonction

Transformée de Fourier

temps : s

→

fréquence : s⁻¹ (Hz)

espace : m

→

vecteur d'onde (fréquence spatiale) : m⁻¹

7. Propriétés de la transformée de Fourier

Linéarité: $TF[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)] = a \cdot TF[f(t)] + b \cdot TF[g(t)]$

Changement d'échelle : $TF[f(a \cdot t)] = \frac{1}{|a|} TF[f(t)]\left(\frac{\nu}{a}\right)$

Translation de la fonction de départ : $TF[f(t - t_0)] = e^{-2i\pi\nu t_0} TF[f](\nu)$
 $TF[f(t + t_0)] = e^{2i\pi\nu t_0} TF[f](\nu)$

Modulation d'amplitude : $TF[e^{2i\pi\nu_m t} f(t)] = TF[f](\nu - \nu_m)$ application : transmission de signal

Dérivée kieme de la fonction de départ: $TF\left[\frac{d^k}{dt^k} f(t)\right] = (2i\pi\nu)^k \cdot TF[f](\nu)$

Multiplication par t: $TF[(-2i\pi t)^k \cdot f(t)] = \left[\frac{d^k}{d\nu^k} TF[f]\right]$

TF d'un produit de fonctions $TF[f \cdot g] = TF[f] \otimes TF[g]$ et $TF[f \otimes g] = TF[f] \cdot TF[g]$

Produit de convolution

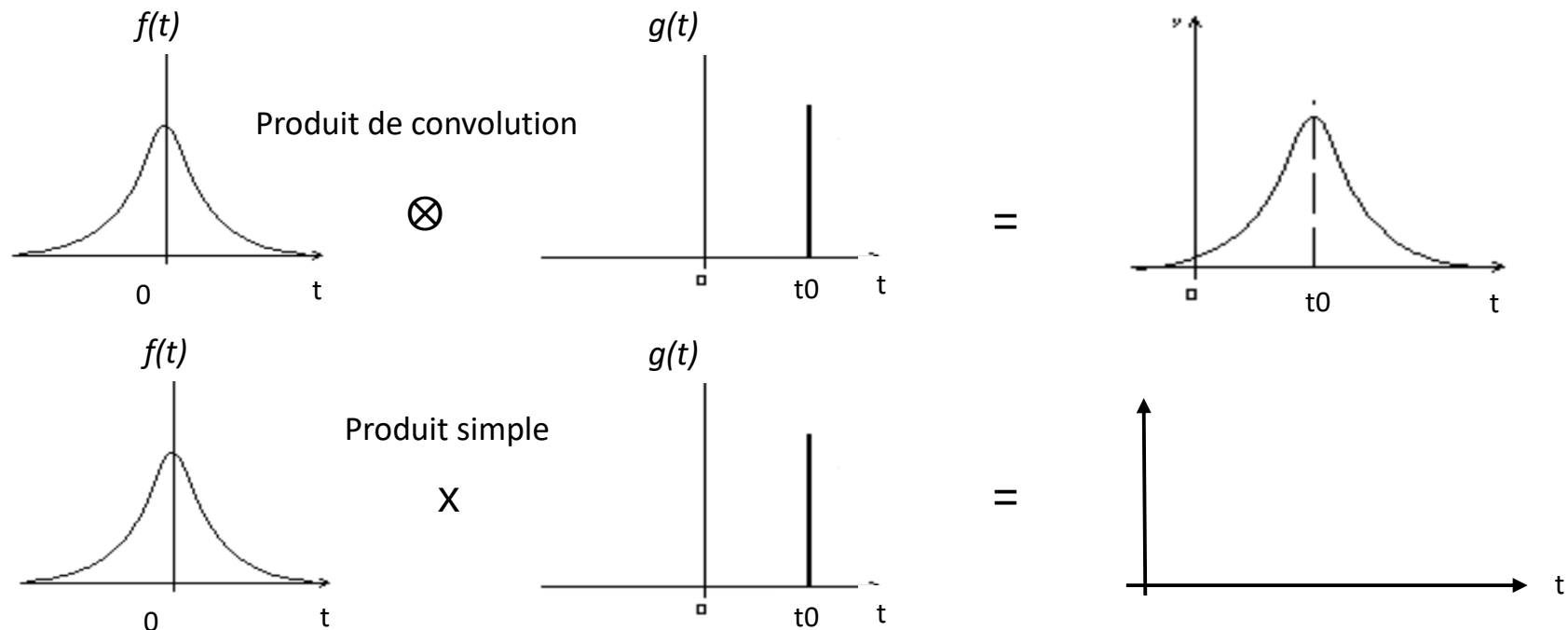


7. Propriétés de la transformée de Fourier

Rappel sur le produit de convolution

$$f \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) \cdot g(u) du$$

$$f \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(t-u) du$$



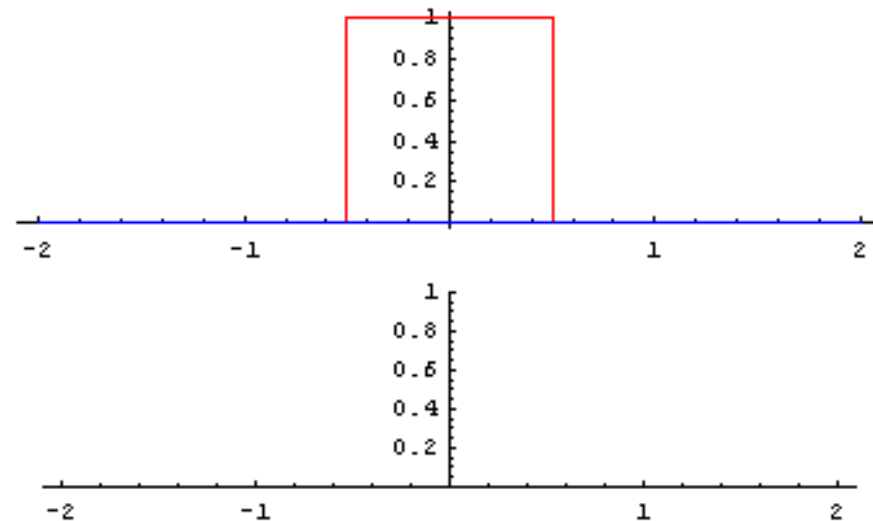
7. Propriétés de la transformée de Fourier

Rappel sur le produit de convolution

$$f \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) \cdot g(u) du$$

$$f \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(t-u) du$$

Convolution de 2 fonctions portes :



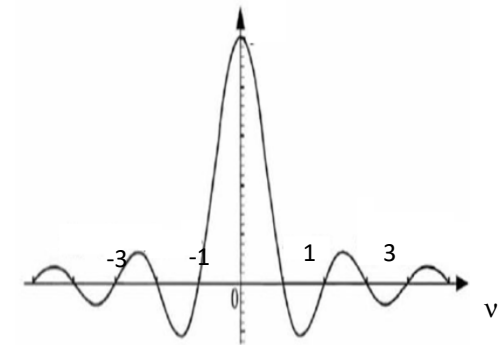
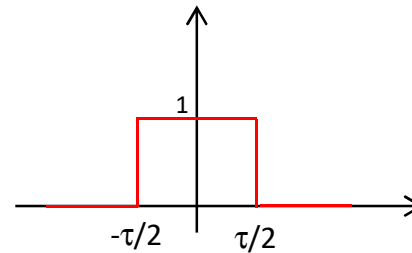
8. Transformées de Fourier usuelles

Fonction porte:

$$\Pi_{\tau}(t) = 1 \text{ pour } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}$$

$$\Pi_{\tau}(t) = 0 \text{ sinon}$$

$$TF[\Pi(t)] = \tau \cdot \frac{\sin(\pi v \tau)}{\pi v \tau} = \tau \cdot \text{sinc}(\pi v \tau)$$



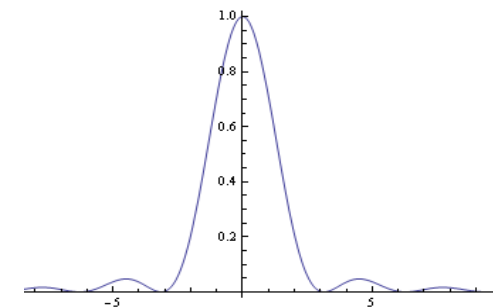
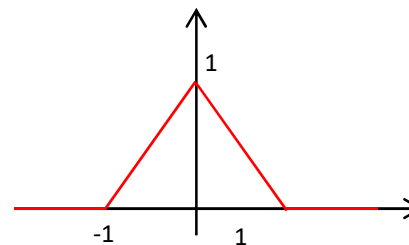
Fonction triangle:

$$\Lambda(t) = 1 - t \text{ pour } -1 \leq t \leq 0$$

$$\Lambda(t) = 1 + t \text{ pour } 0 \leq t \leq 1$$

$$\Lambda(t) = 0 \text{ sinon}$$

$$TF[\Lambda(t)] = \left[\frac{\sin(\pi v)}{\pi v} \right]^2 = \text{sinc}^2(\pi v)$$



8. Transformées de Fourier usuelles

Fonction gaussienne:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ avec } \sigma > 0$$

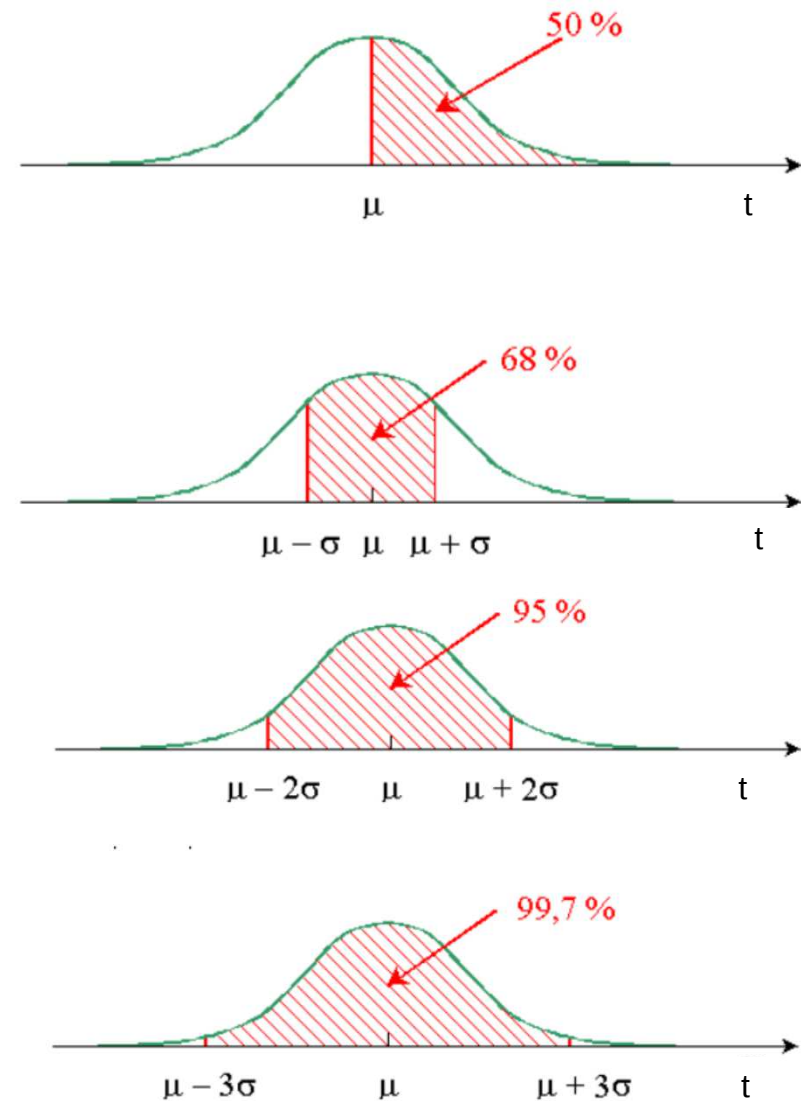
$$f(\mu \pm \sigma) = \frac{f(\mu)}{\sqrt{e}}$$

$$FWHM = 2\sigma \cdot \sqrt{2\ln 2}$$

Largeur à mi-hauteur

Transformée de Fourier gaussienne:

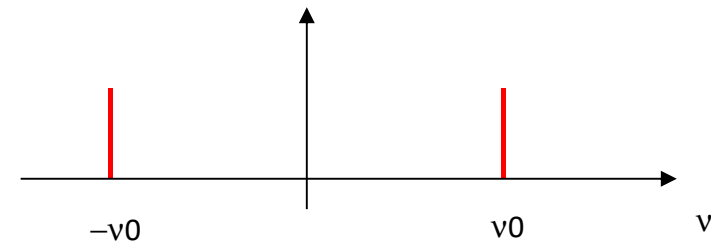
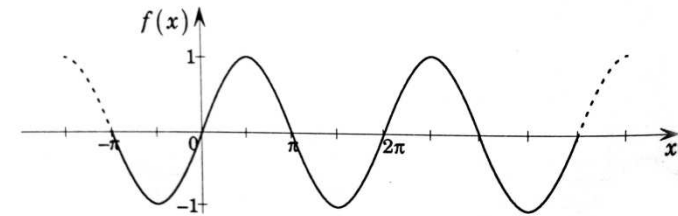
$$f(t) = e^{-\alpha \frac{t^2}{2}} \text{ avec } \alpha > 0 \quad TF[f(t)] = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\pi^2 \nu^2}{\alpha}}$$



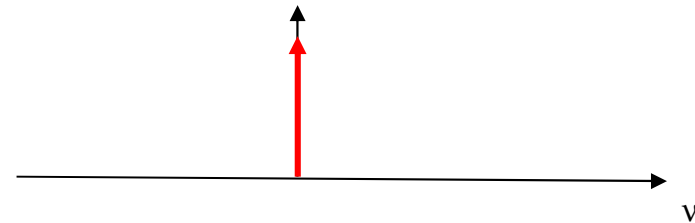
TF des fonctions sinus et cosinus

$$TF(\sin(2\pi\nu_0 t)) = \frac{1}{2i} [\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0)]$$

$$TF(\cos(2\pi\nu_0 t)) = \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$$

TF de la fonction unité

$$f(x) \equiv 1 \quad TF[f(x) \equiv 1] = \delta(\nu)$$



Remarque: ces fonctions sont sommables uniquement par morceau

cadre plus large de la théorie des distributions

Fonctions sommables par morceau et distributions

Remarque: fonction sommable par morceau: telle que son intégrale existe sur tout intervalle borné

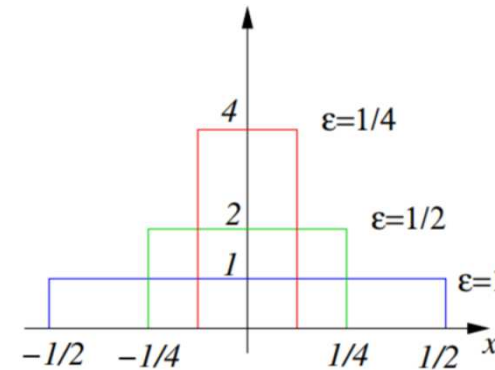
Distribution de Dirac (approche heuristique)

Soit la fonction paramétrable

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \Pi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

On remarque que pour tout ε :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) dx = 1 \quad \text{Lorsque } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ la largeur tend vers } 0 \text{ et la hauteur vers } \infty$$



On appellera distribution de Dirac l'objet mathématique suivant:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \int_a^b \delta(x) dx = 1 \quad \text{Pour tout } a < 0 \text{ et } b > 0$$

Calcul numérique de la transformée de Fourier



Mis en œuvre dans de nombreux appareils : oscilloscopes numérique , logiciels de traitement de signal, lecteurs MP3

Calcul numérique de la transformée de Fourier

En général le calcul analytique de $F(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-2i\pi\nu t} dt$ est impossible pour un signal $f(t)$ quelconque

On doit avoir recours à un calcul numérique de l'intégrale $\longrightarrow$ discrétisation

Échantillonnage + numérisation

1. numérisation du signal : $f(t) \longrightarrow$ N valeurs discrètes $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1}\}$

2. Calcul discret de $F(\nu)$ pour un nombre fini M de valeurs de ν : $\{F(\nu_0), F(\nu_1), \dots, F(\nu_{M-1})\}$

Pour une valeur ν_j quelconque on a:

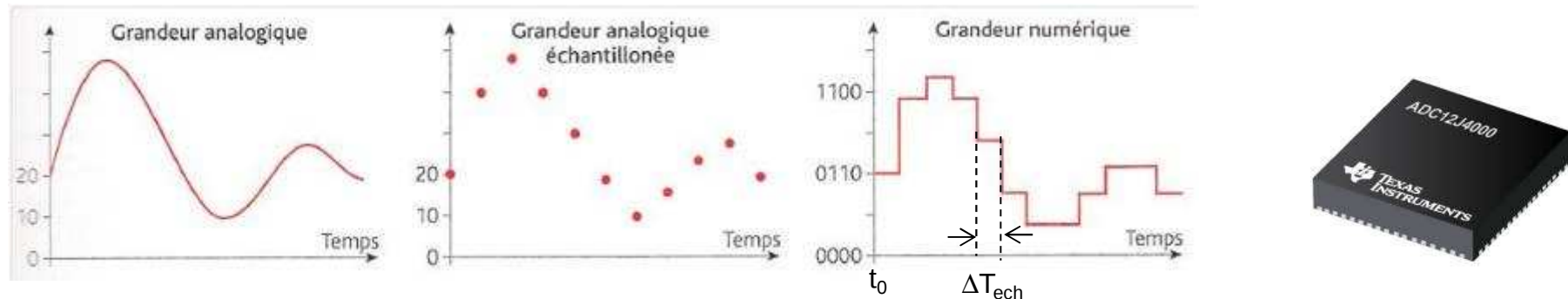
$$F(\nu_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^N f_n \cdot e^{-2i\pi\nu_j t_n} \cdot \Delta T_{ech}$$

avec ΔT_{ech} tel que $F_{ech} = \frac{1}{\Delta T_{ech}} =$ Fréquence d'échantillonnage du signal

et $t_n = t_1 + n \cdot \Delta T_{ech} =$

Numérisation du signal:

Horloge + CAN (Convertisseur analogique /numérique) (ADC en anglais)



1. Discrétisation du temps : base de temps donnée par une horloge (oscillateur à quartz) :
en général échantillonnage à intervalles de temps régulier ΔT_{ech}

→ Le nombre d'échantillons dépend de la fréquence d'échantillonnage

2. Numérisation : transformation de la grandeur réelle en un nombre entier codé sur n bits

→ Résolution finie Ex CAN 8 bits : $2^8 = 256$ valeurs
CAN 16 bits : $2^{16} = 65\,536$ valeurs

{ résolution importante
fréquence d'échantillonnage élevée → nombre de bits à stocker ou traiter grand

Compression nécessaire = réduction du nombre de données

Calcul numérique de $F(\nu)$

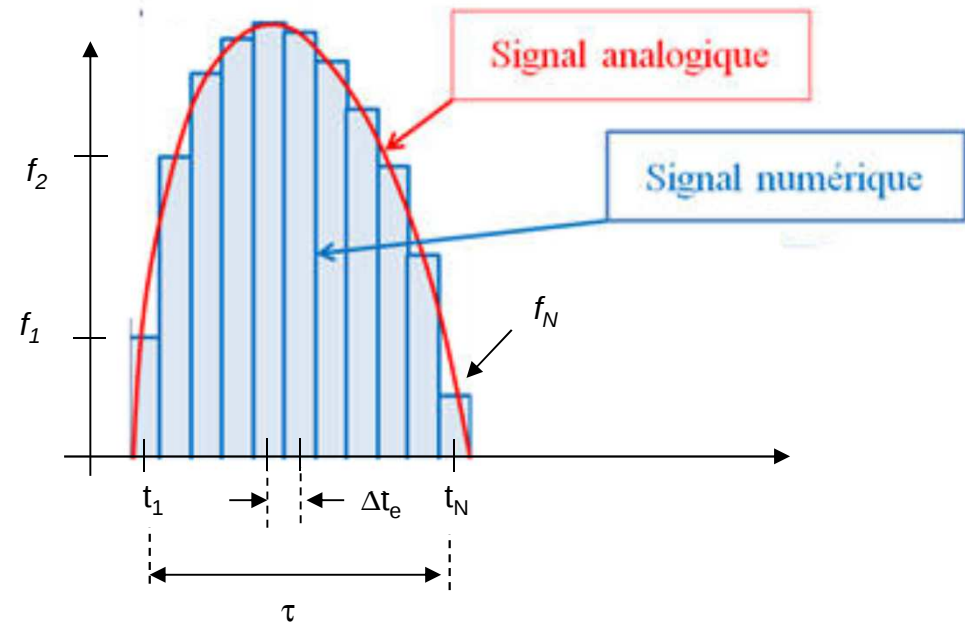
$F(\nu)$ est calculée pour un nombre fini M de valeurs de ν :

Pour une valeur ν_j quelconque on a:

$$F(\nu_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^N f_n \cdot e^{-2i\pi\nu_j t_n \cdot \Delta t_e}$$

avec $t_n = t_1 + n \cdot \Delta t_e$

et $\Delta t_e = \frac{\tau}{N} = \frac{1}{F_{ech}}$



$$F(\nu_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \Delta t_e \cdot e^{-2i\pi\nu_j t_1} \sum_{n=1}^N f_n \cdot e^{-2i\pi\nu_j \cdot n \cdot \Delta t_e} \quad \text{En écrivant} \quad \nu_j = j \cdot \frac{F_{ech}}{M} = j \cdot \frac{N}{M} \cdot \frac{1}{\tau}$$

On obtient
$$F(\nu_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \Delta t_e \cdot e^{-2i\pi \frac{t_1}{M \cdot \Delta t_e}} \cdot \sum_{n=1}^N f_n \cdot e^{-2i\pi \cdot \frac{j \cdot n}{M}}$$

Calcul numérique de $F(\nu)$

On prend en général $M = N$. Le calcul se ramène alors à calculer N sommes du type

$$S_j = \sum_{n=1}^N f_n \cdot e^{-2i\pi \cdot \frac{j \cdot n}{N}} \quad \text{Pour } j = 1, 2, \dots, N$$

Nombre d'opérations nécessaires :

N multiplications de 2 nombres complexes + $(N-1)$ additions de nombres complexes

$4N$ multiplication réelles + $2N-2$ additions réelles

Pour les N fréquences du spectres numérique on a donc

 $4N^2$ multiplications et $2N^2 - 2N$ additions

Augmentation en $4N^2$ du nombre d'opérations et donc du temps de calcul !!!

Sur 1024 points (2^{10}) plus de 4 millions d'opérations

Algorithme de calcul : Fast Fourier Transform (FFT)

J. W Cooley (IBM) and J.W. Tukey (Bell Labs)

Idée de base : réduire le nombre d'opérations à faire. Principe de dichotomie

Exemple pour N = 8 $\longrightarrow$ calcul complet = transformée de Fourier discrète (TFD) à 8 termes

$$F_j = f_1 \cdot e^{-\frac{2i\pi}{8} \cdot j \times 1} + f_2 \cdot e^{-\frac{2i\pi}{8} \cdot j \times 2} + f_3 \cdot e^{-\frac{2i\pi}{8} \cdot j \times 3} + \dots + f_8 \cdot e^{-\frac{2i\pi}{8} \cdot j \times 8}$$

On décompose en 2 TFD à 4 termes:

Termes pairs: $P_j = f_2 \cdot e^{-\frac{2i\pi}{4} \cdot j \times 1} + f_4 \cdot e^{-\frac{2i\pi}{4} \cdot j \times 2} + f_6 \cdot e^{-\frac{2i\pi}{4} \cdot j \times 3} + f_8 \cdot e^{-\frac{2i\pi}{4} \cdot j \times 4}$

Termes impairs: $\tilde{I}_j = e^{-\frac{2i\pi}{8} \cdot j \times 1} \left[f_1 + f_3 \cdot e^{-\frac{2i\pi}{4} \cdot j \times 1} + f_5 \cdot e^{-\frac{2i\pi}{4} \cdot j \times 2} + f_7 \cdot e^{-\frac{2i\pi}{4} \cdot j \times 3} \right] = e^{-\frac{2i\pi}{8} \cdot j} \cdot I_j$

D'où

$$F_j = P_j + e^{-\frac{2i\pi}{8} \cdot j} \cdot I_j$$

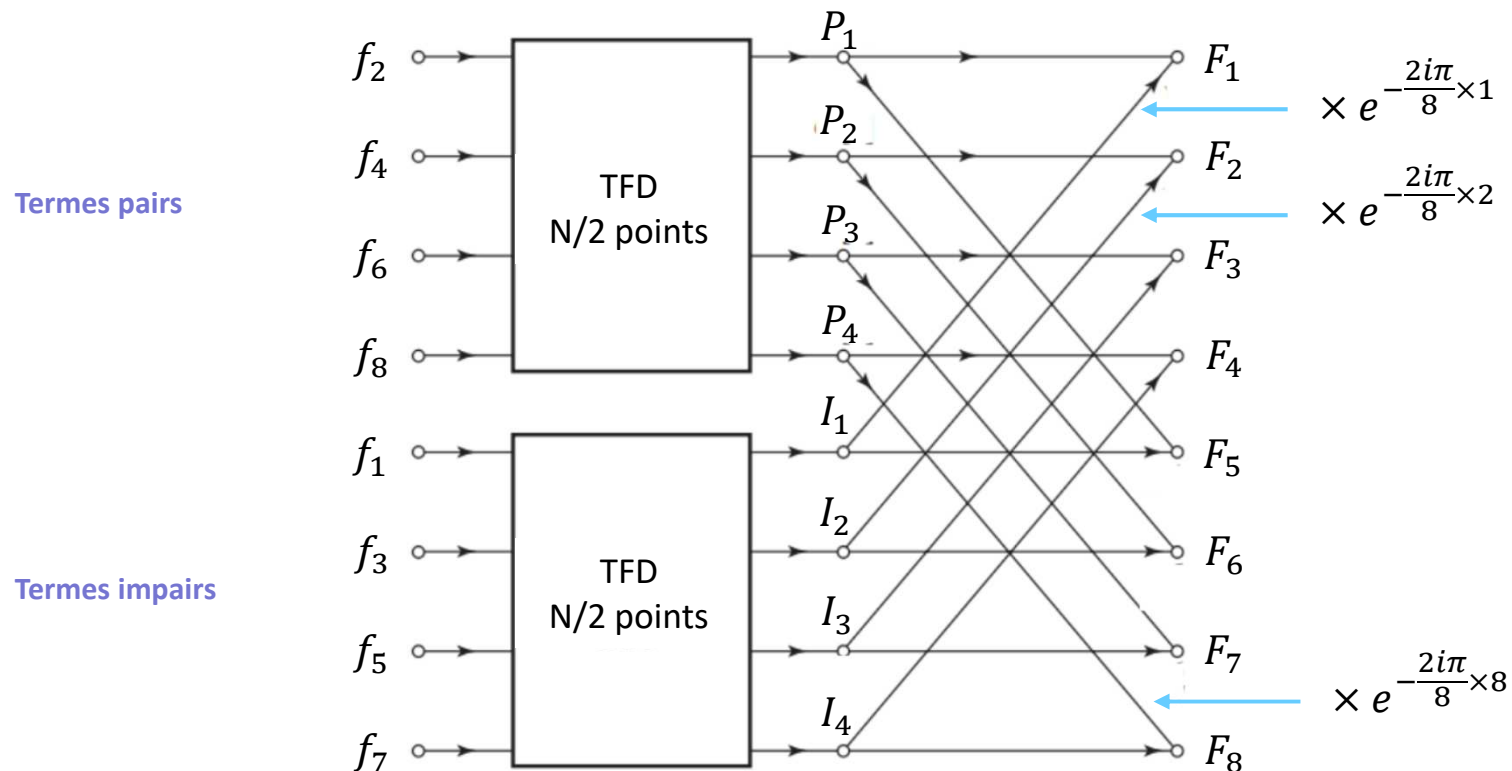
$\nearrow$
TFD à 4 points
périodique de période 4

$\nwarrow$
TFD à 4 points
périodique de période 4

Algorithme de calcul : Fast Fourier Transform (FFT)

$$F_{j+4} = P_{j+4} + e^{-\frac{2i\pi}{8} \cdot (j+4)} \cdot I_{j+4} = P_j + e^{-\frac{2i\pi}{8} \cdot (j+4)} \cdot I_j$$

le calcul de P_j et I_j permet d'obtenir F_j et F_{j+4}

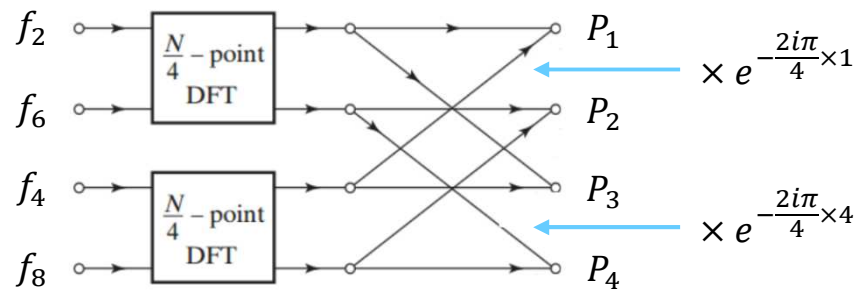


Nombre d'opérations nécessaires :

- calcul direct : $4N^2 = 256$ multiplications
- après dichotomie: $2 \times 4 \times (N/2)^2 + 4N = 160$ multiplications

Algorithme de calcul : Fast Fourier Transform (FFT)

On répète la méthode pour décomposer chaque bloc de TFD à 4 points en 2 blocs de TFD à deux points



Dernière opération:

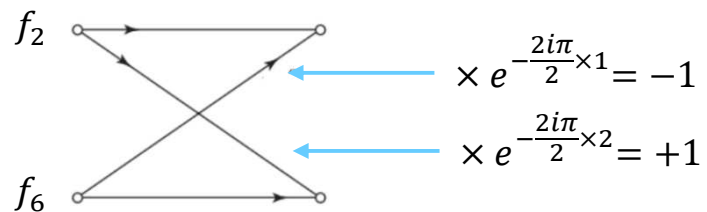
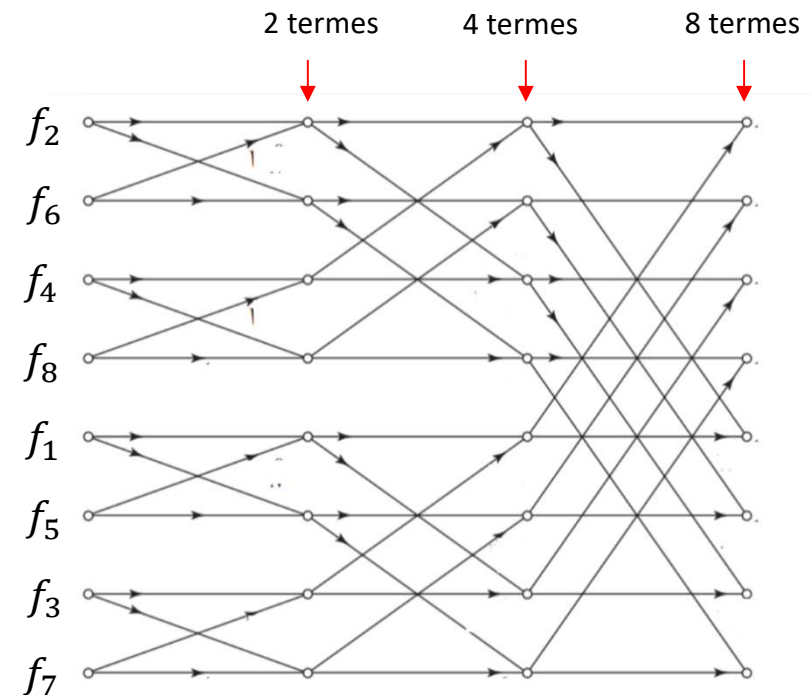


Diagramme complet



Algorithme de calcul : Fast Fourier Transform (FFT)Nécessité d'avoir un nombre d'échantillons $N = 2^q$

Calcul complet

FFT

TFD à N points

 $(N/2)$ TFD à 2 points $\log_2(N)$ itérationsNombre de
multiplicationsNombre de
multiplications

$$4N^2$$

$$4N \log_2(N)$$

Exemple : N = 8 256

96 R=2.6

Exemple : N = 256 262 144

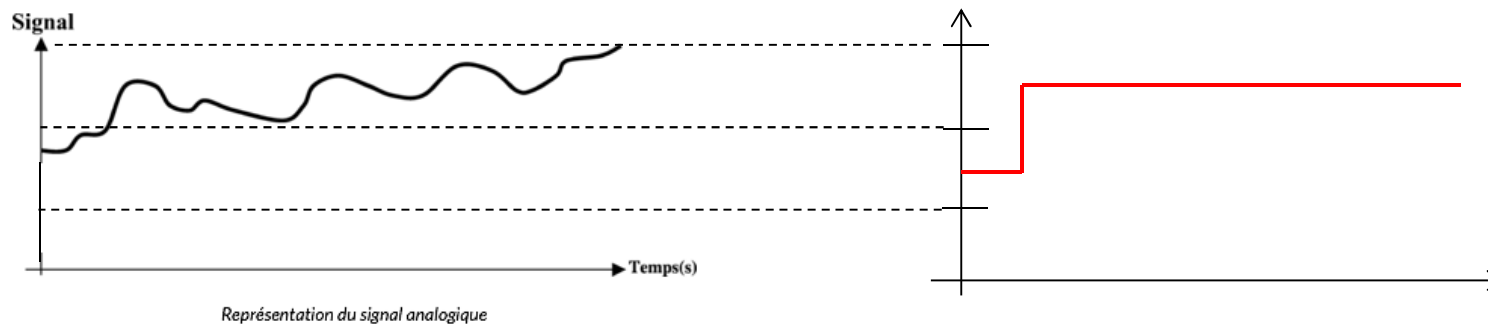
8 192 R=32

Exemple : N = 1024 4 194 304

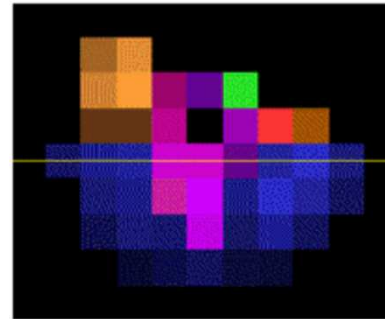
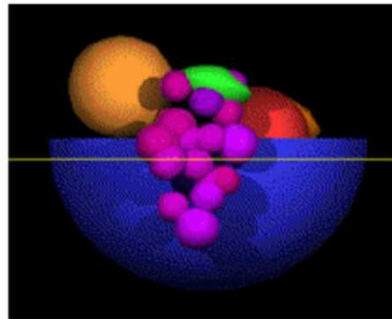
40 960 R=102

Les limites de la numérisation :

- Résolution et linéarité du CAN (résolution numérique)
 - Fréquence d'échantillonnage
 - Fenêtrage
- Résolution numérique: les variations de faible amplitude sont traduites par une même valeur binaire



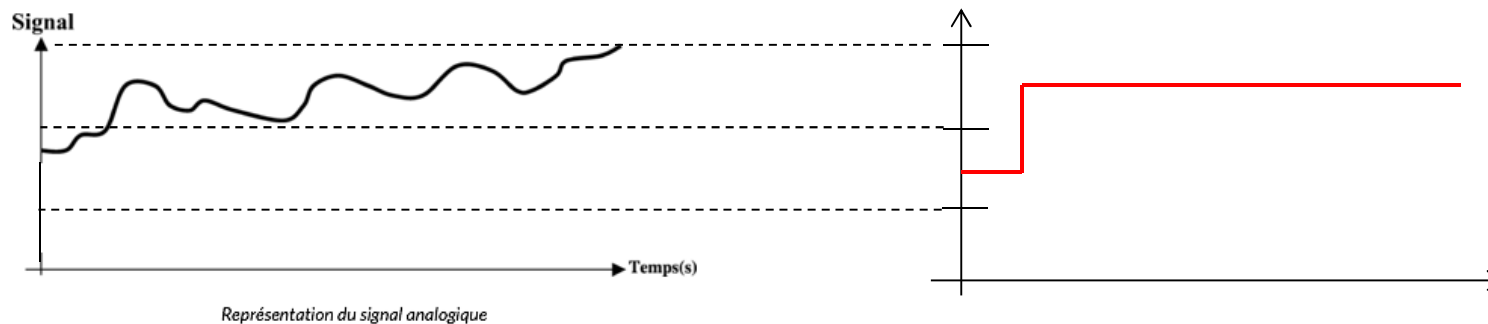
Exemple : CAN 8 bits avec entrée 10 Volts pleine échelle $\longrightarrow$ résolution : $\Delta V = 39 \text{ mV}$



Les limites de la numérisation :

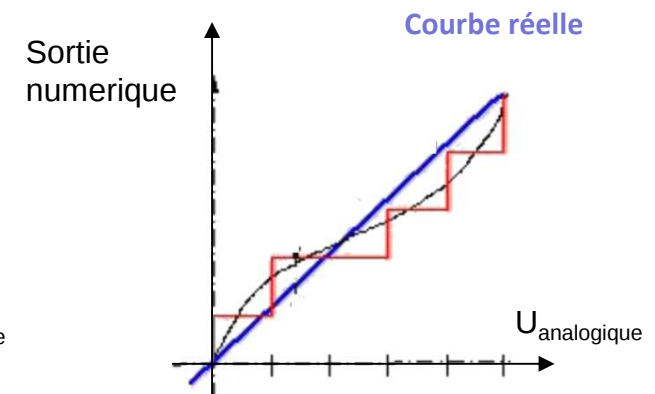
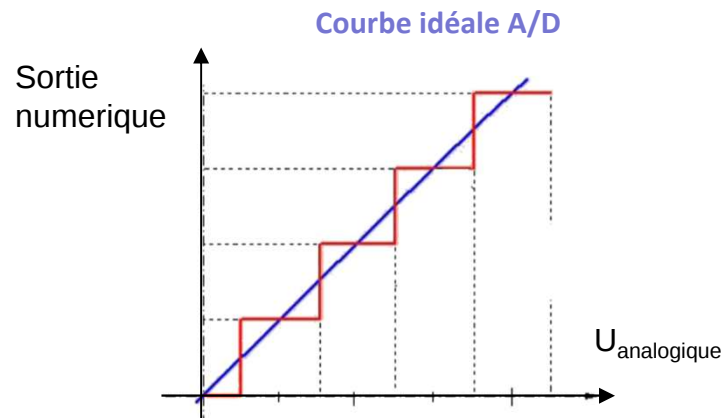
- Résolution et linéarité du CAN (résolution numérique)
- Fréquence d'échantillonnage
- Fenêtrage

- Résolution numérique: les variations de faible amplitude sont traduites par une même valeur binaire



Exemple : CAN 8 bits avec entrée 10 Volts pleine échelle $\longrightarrow$ résolution : $\Delta V = 39 \text{ mV}$

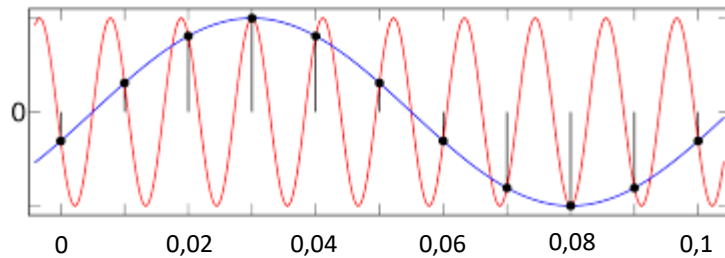
- Problème de linéarité



Les limites de la numérisation :

- Résolution du CAN (résolution numérique)
 - Fréquence d'échantillonnage
 - Fenêtrage
-
- Fréquence d'échantillonnage, repliement de spectre et théorème de Shannon

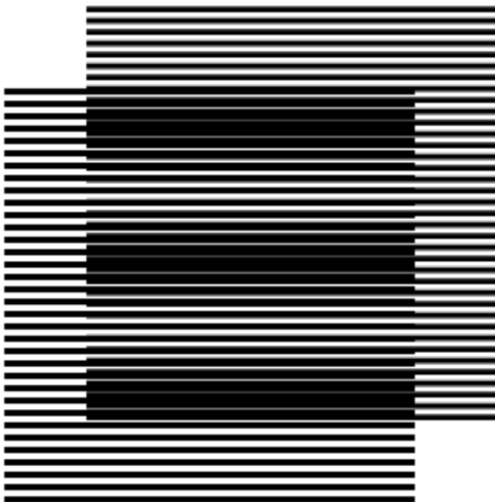
Sous échantillonnage :



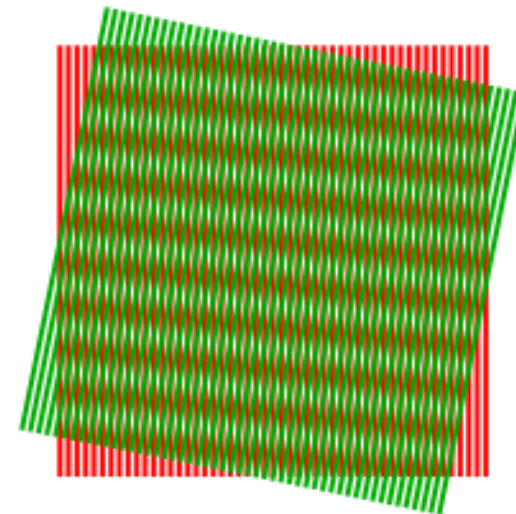
Signal de fréquence $f_0 = 90$ Hz

Fréquence d'échantillonnage : $f_e = 100$ Hz

Signal numérisé : $f_n = 10$ Hz !!



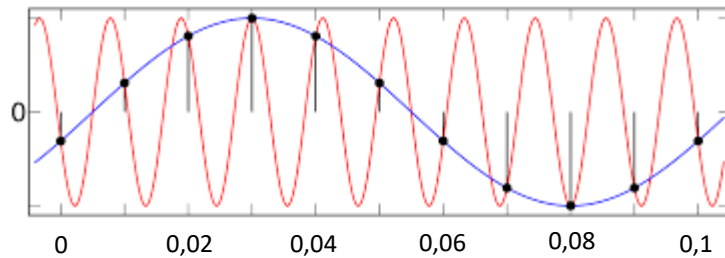
Effet de Moiré



Les limites de la numérisation :

- Résolution du CAN (résolution numérique)
 - Fréquence d'échantillonnage
 - Fenêtrage
-
- Fréquence d'échantillonnage, repliement de spectre et théorème de Shannon

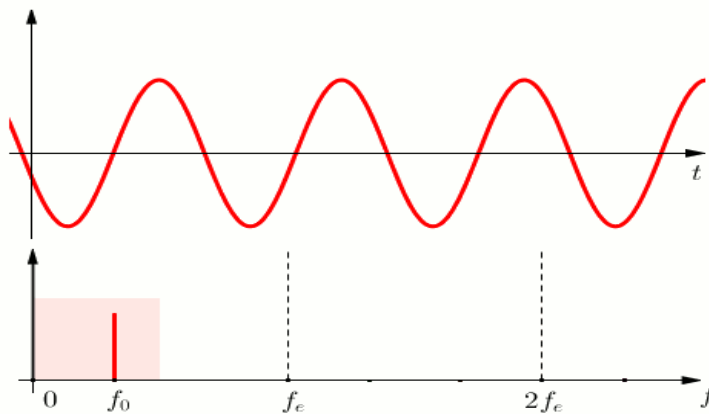
Sous certaines conditions, différents signaux peuvent donner le même signal numérique !!!



Signal de fréquence $f_0 = 90 \text{ Hz}$

Fréquence d'échantillonnage : $f_e = 100 \text{ Hz}$

Signal numérisé : $f_n = 10 \text{ Hz} !!$



$$f_0 = f_e - f_n = 90 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2f_e - f_n = 190 \text{ Hz}$$

$$f_1 = f_e + f_n = 110 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 2f_e + f_n = 210 \text{ Hz}$$

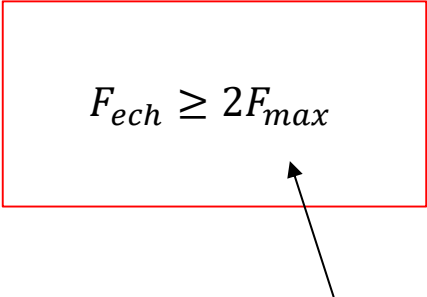
$$F_n = 10 \text{ Hz}$$

Les limites de la numérisation :

- Résolution du CAN (résolution numérique)
 - Fréquence d'échantillonnage
 - Fenêtrage
-
- Fréquence d'échantillonnage, repliement de spectre et théorème de Shannon

Condition d'unicité du spectre de Fourier: **Théorème de Shannon**

Pour qu'un signal numérisé aie le même spectre de Fourier que le signal analogique de départ il faut et il suffit que:

$$F_{ech} \geq 2F_{max}$$


Fréquence maximum présente dans le spectre de Fourier du signal analogique

Les limites de la numérisation :Démonstration du **Théorème de Shannon**

Considérons un signal analogique $S(t)$. Le signal échantillonné correspondant est alors donné par :

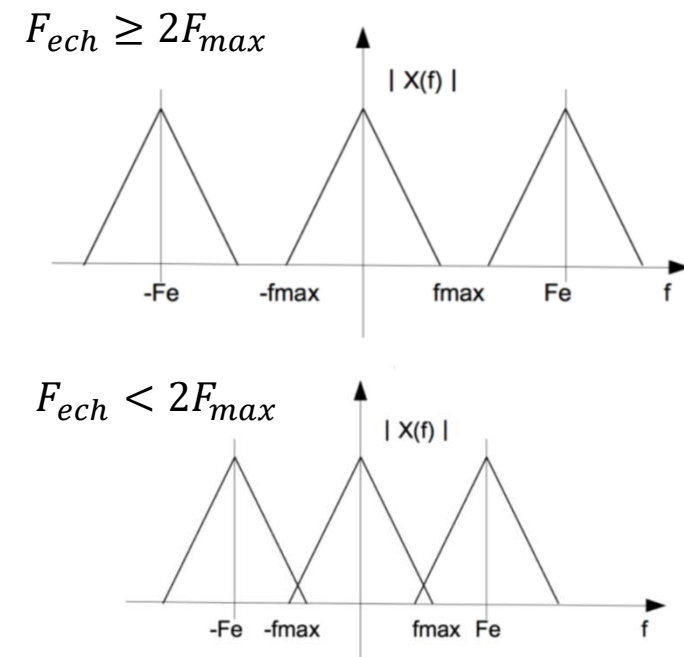
$$S_n(t) = S(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n(t - k \cdot T_e)$$

En prenant la transformée de Fourier:

$$TF[S_n(t)] = TF[S(t)] \otimes TF\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta_n(t - k \cdot T_e)]\right]$$

$$TF[S_n(t)] = TF[S(t)] \otimes [F_e \cdot \sum \delta(f - k \cdot F_e)]$$

Spectre de Fourier du signal analogique



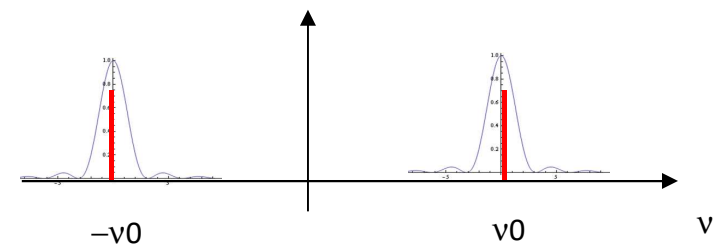
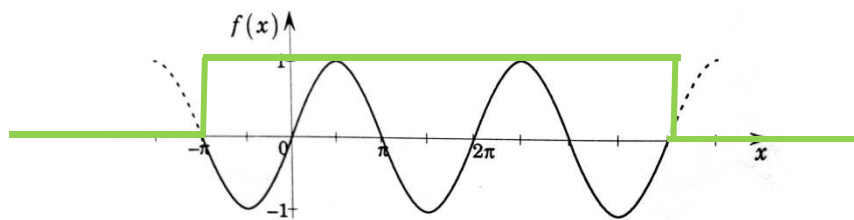
Filtre anti repliement (anti aliasing) : filtre passe bas $f_c = F_{ech}/2$

Les limites de la numérisation :Problème de fenêtrage:

Nombre fini d'échantillons $\longrightarrow$ numérisation sur un intervalle de temps fini (fenêtre)

$f(t) \longrightarrow f(t) \cdot h(t)$ Où $h(t)$ est une fonction qui détermine l'intervalle de temps

$$TF[f(t)] \longrightarrow TF[f(t)] \otimes TF[h(t)]$$



$\longrightarrow$ Élargissement du spectre + structures parasites

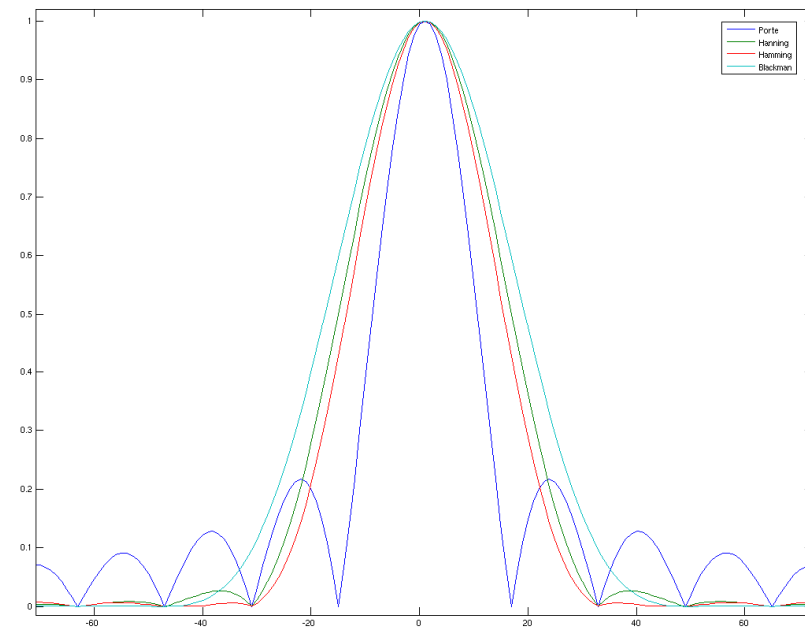
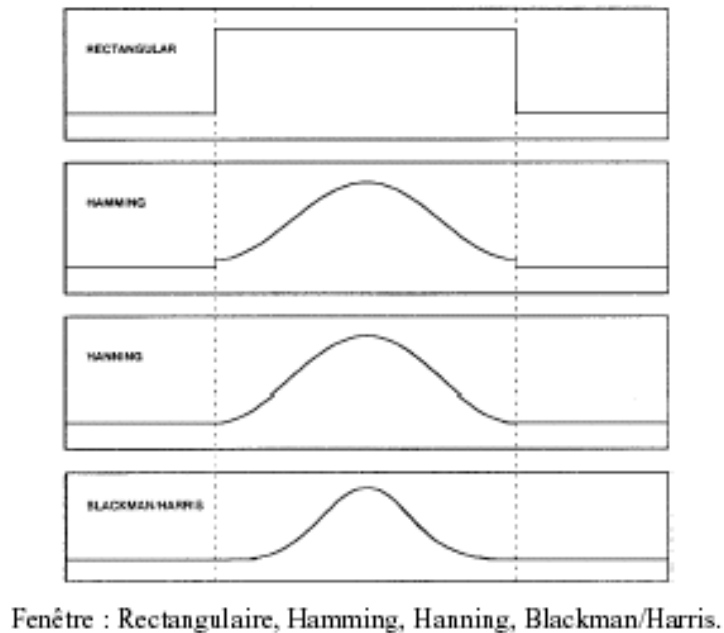
Les limites de la numérisation :

Problème de fenêtrage:

Différent type de fenêtres:

Rectangulaire : faible élargissement mais des pics parasites (fonction sinc)

Blackman : pas de pics supplémentaires mais élargissement plus important



Plus la durée d'acquisition est grande plus l'effet d'élargissement est faible

CHAPITRE 2 :

Filtres et analyse de Fourier

Rappel sur les filtres passifs

Filtre = quadripôle tel que :

$$\underline{V_s(\omega t)} = \underline{H(j\omega)} \cdot \underline{V_e(\omega t)}$$

↑
nombre complexe

$$\underline{H(j\omega)} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\varphi} \quad = \text{fonction de transfert du filtre}$$

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{V_s}{V_e} \right| = G_V(\omega) \quad = \text{gain en tension du filtre}$$

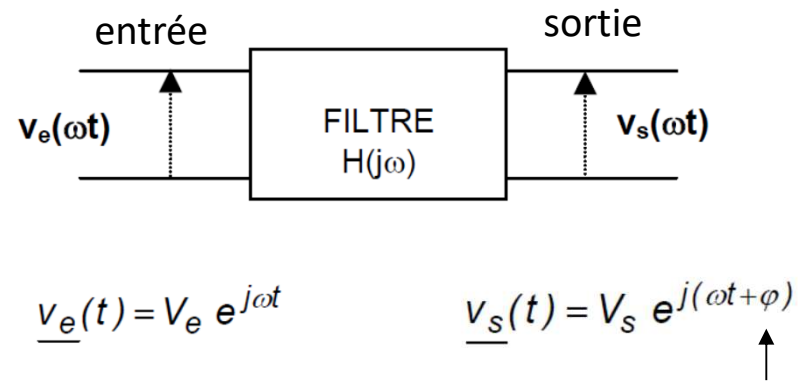
Pour des questions pratiques on définit le gain en décibel: $g_{dB} = 20 \cdot \log(G_V)$

en général $G_V < 1$
 $g_{dB} < 0$

Exemples : $G_V = \frac{1}{2} \quad g_{dB} = -6 \text{ dB}$

$G_V = \frac{1}{10} \quad g_{dB} = -20 \text{ dB}$

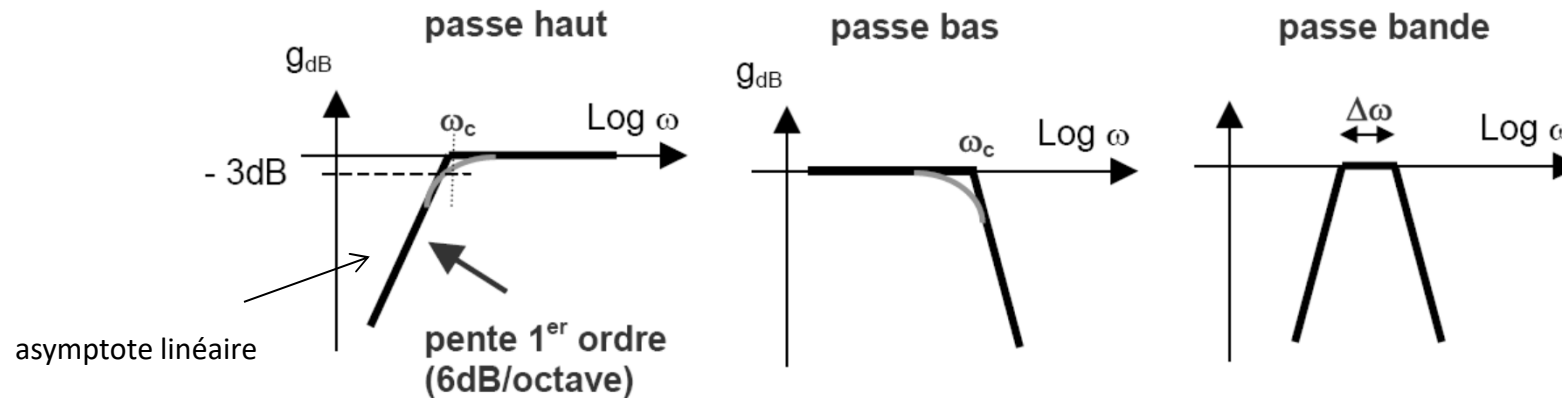
$G_V = \frac{1}{100} \quad g_{dB} = -40 \text{ dB}$



↑
déphasage entre
 $V_e(t)$ et $V_s(t)$
dépend de ω

Rappel sur les filtres passifs

Diagramme de Bode : représentation de $g_{dB} = f(\log \omega)$



Permet de définir une fréquence (pulsation de coupure)
Asymptote linéaire → pente du filtre

ω_c telle que $g_{dB}(\omega_c) = -3dB$

$$G_V(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

Ordre d'un filtre (passe bas):

1^{er} ordre

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{A_1\omega + A_0}$$

Polynôme de degré 1

2nd ordre

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{A_2\omega^2 + A_1\omega + A_0}$$

Polynôme de degré 2

pente

ordre 1 : -6dB/octave

ordre 2 : -12dB/octave

ordre 3 : -18dB/octave

Rappel sur les filtres passifs

$$\underline{V_s}(\omega t) = \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{V_e}(\omega t)$$

$$\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)| \cdot e^{j\varphi}$$

$$|\underline{H}(j\omega)| = \left| \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} \right| = G_V(\omega)$$

Calcul de la fonction de transfert pour un cas simple : **structure en pont diviseur**

Hypothèse:
courant de sortie nul

loi d'Ohm instantanée $\underline{U}(t) = \underline{Z} \cdot \underline{i}(t)$

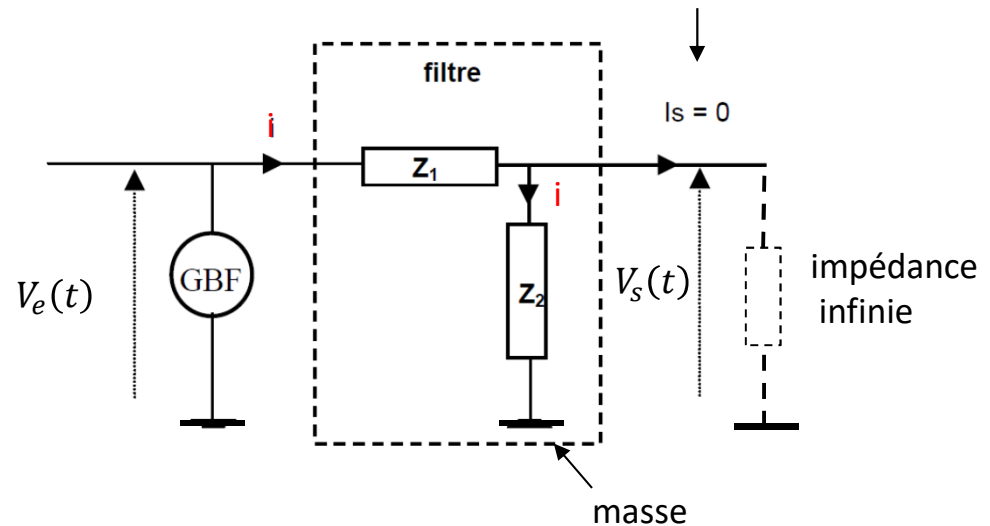
impédance

$$\underline{V_e}(t) = (\underline{Z_1} + \underline{Z_2}) \cdot \underline{i}$$

$$\underline{V_s}(t) = \underline{Z_2} \cdot \underline{i}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

$$G_V(\omega) = \left| \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} \right|$$



bobine



$$\underline{Z_L} = j \cdot L \omega$$

résistance



$$\underline{Z_R} = R$$

condensateur

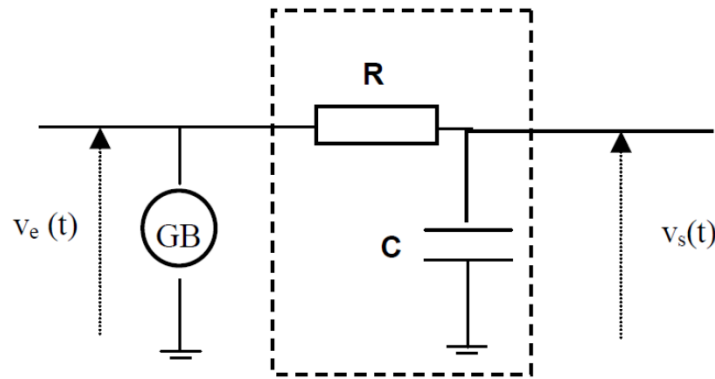


$$\underline{Z_C} = \frac{-j}{C \omega}$$

Impédances usuelles

Rappel sur les filtres passifs

Exemple : filtre RC



$$\underline{V_s}(\omega t) = \underline{H(j\omega)} \cdot \underline{V_e}(\omega t)$$

$$\underline{H(j\omega)} = |\underline{H(j\omega)}| \cdot e^{j\varphi}$$

$$|\underline{H(j\omega)}| = \left| \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} \right| = G_V(\omega)$$

$$\underline{Z_1} = R$$

$$\underline{Z_2} = \frac{-j}{C\omega}$$

$$\underline{H(j\omega)} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{-j/C\omega}{R - j/C\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

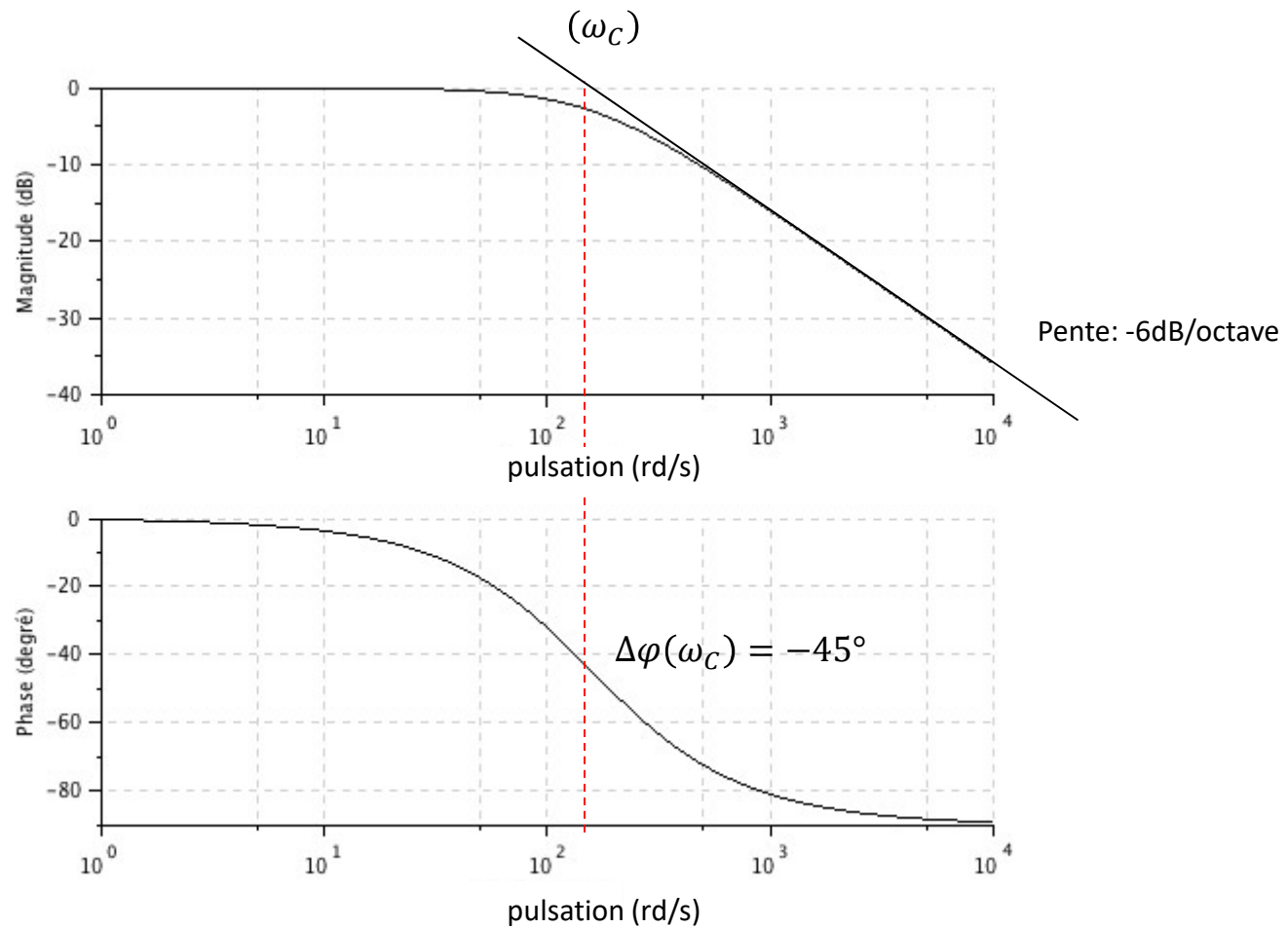
$$|\underline{H(j\omega)}| = \left| \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} \right| = G_v = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

Le déphasage est tel que : $\tan(\varphi) = \frac{\text{Im}(\underline{H(j\omega)})}{\text{Re}(\underline{H(j\omega)})} = -RC\omega$

Quand $\omega \rightarrow 0$ $G_V \rightarrow 1$
 $\omega \rightarrow \infty$ $G_V \rightarrow 0$



Filtre passe bas

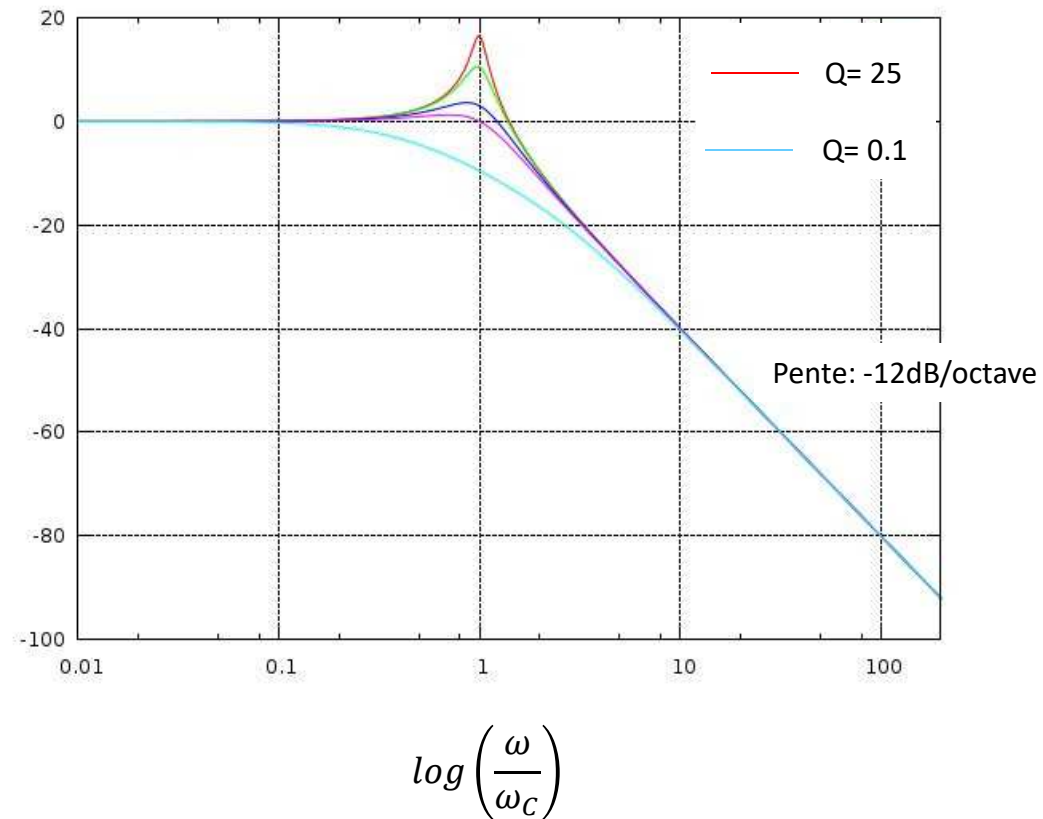
Rappel sur les filtres passifsDiagramme de Bode d'un filtre passe bas du 1^{er} ordre

Rappel sur les filtres passifs

Forme canonique

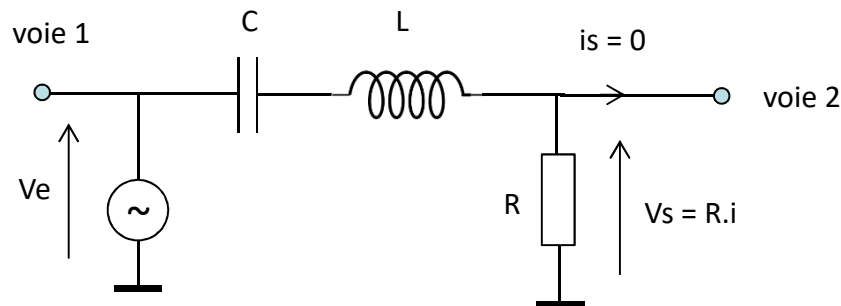
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + j \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Q: facteur de qualité

Diagramme de Bode d'un filtre passe bas du 2nd ordre

Circuits résonnants – filtres passe bande

Rappel : circuit RLC série



$$V_e(t) = Z_{tot} \cdot i(t)$$

$$V_s(t) = R \cdot i(t)$$

$$Z_{tot} = R + j \cdot \left(l\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

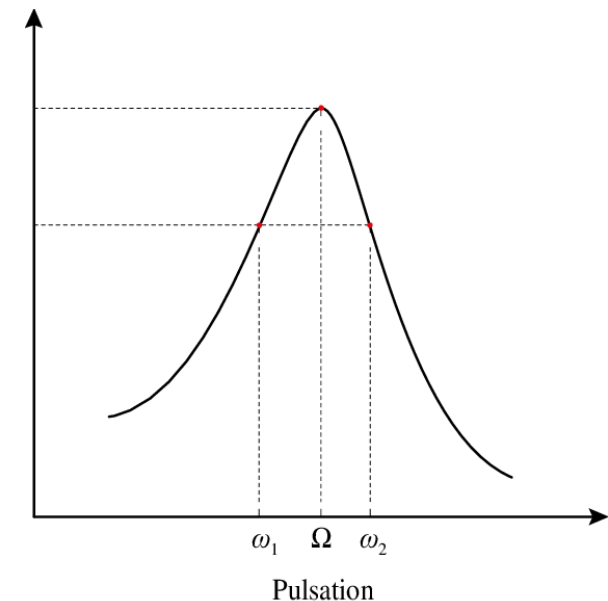
$$|Z_{tot}| = \sqrt{R^2 + \left(l\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

Fréquence (pulsation) particulière ω_0
pour laquelle:

$$Z_{tot} = Z_{mini} = R \quad \rightarrow \quad \left(l\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} \right) = 0 \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$\rightarrow V_s = V_{max}$ phénomène de résonance

Notion de bande passante



$$g_{dB}(\omega_1) = g_{dB}(\omega_2) = g_{dB}(\omega_0) - 3dB$$

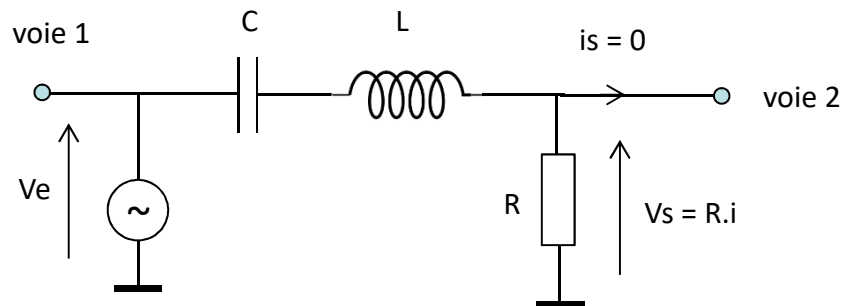
$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

Facteur de qualité :

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 \cdot L}{R}}$$

Circuits résonnants – filtres passe bande

Rappel : circuit RLC série



$$V_e(t) = Z_{tot} \cdot i(t) \quad Z_{tot} = R + j \cdot \left(l\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

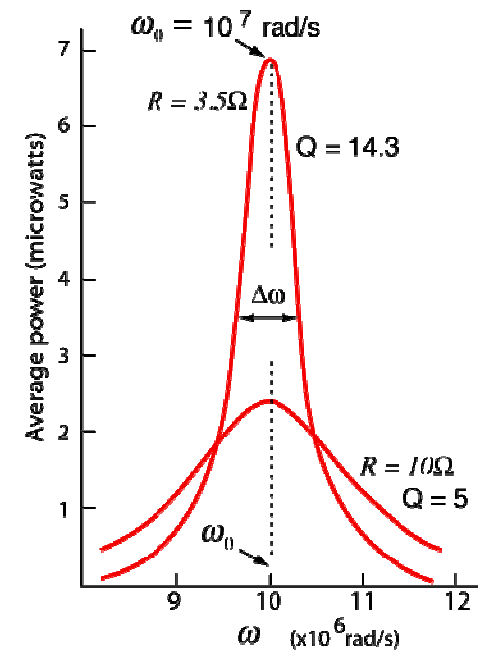
$$V_s(t) = R \cdot i(t) \quad |Z_{tot}| = \sqrt{R^2 + \left(l\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

Fréquence (pulsation) particulière ω_0
pour laquelle:

$$Z_{tot} = Z_{mini} = R \quad \rightarrow \quad \left(l\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} \right) = 0 \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$\rightarrow V_s = V_{max}$ phénomène de résonance

Filtre passe bande



Facteur de qualité :

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 \cdot L}{R}}$$

Circuits résonnants – filtres passe bande

Rappel : circuit RLC série

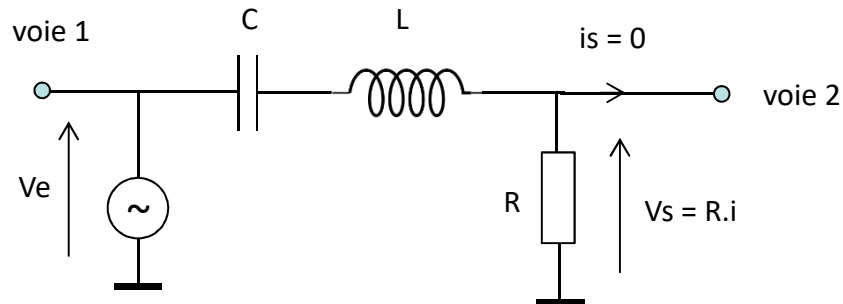
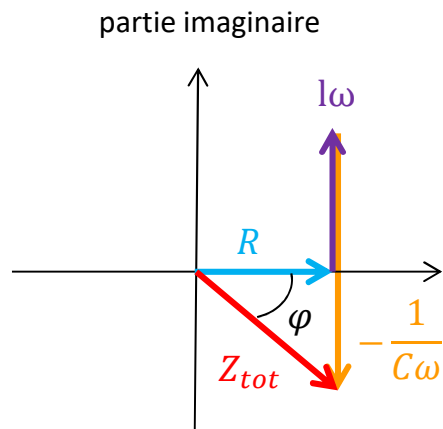
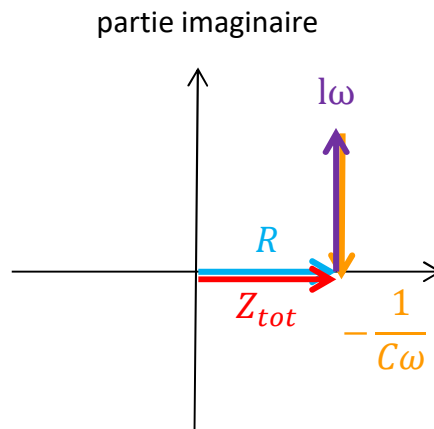


Diagramme de Fresnel



$$(\omega \neq \omega_0)$$

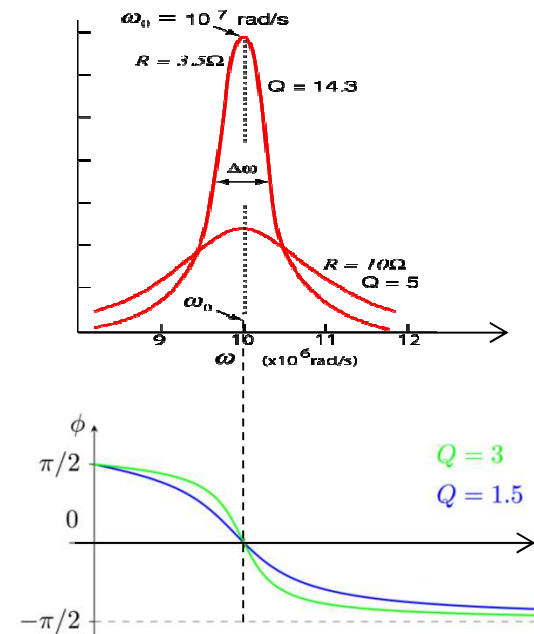
$$(\varphi < 0)$$



$$(\omega = \omega_0)$$

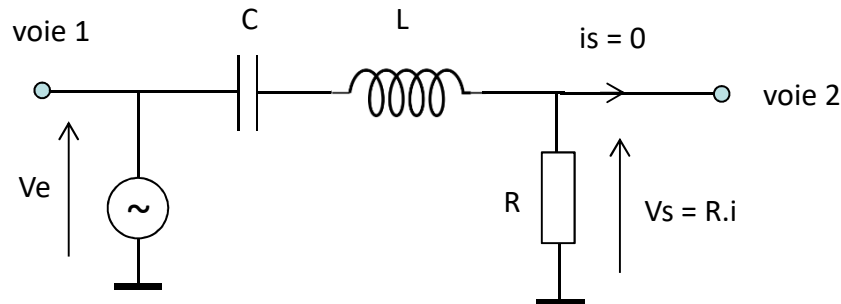
$$(\varphi = 0)$$

Déphasage



Circuits résonnants – filtres passe bande

Rappel : circuit RLC série



Problème du circuit RLC série en tant que filtre:

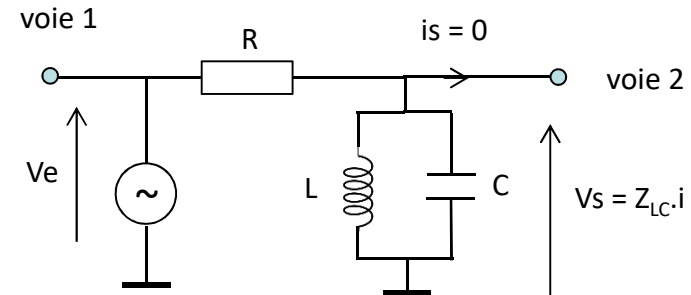
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 \cdot L}{R}$$

Pour augmenter le facteur de qualité on doit diminuer R

→ i augmente (consommation de puissance)

circuit RLC bouchon

Cas idéal: $r_L = 0$



$$|H(j\omega)| = \frac{Z_{LC}}{Z_{LC} + R} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{Z_{LC}} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}$$

$$Z_{LC} = j \cdot \frac{L\omega}{1 - LC\omega^2} \quad \text{Pour} \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z_{LC} \rightarrow \infty$$

Le courant dans la branche LC tends vers 0 → antirésonance en courant

D'où le nom de circuit bouchon

MAIS $V_s = V_e$ (Car $V_s = V_e - R.i$) → résonance en tension

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{R}{\omega_0 \cdot L} \rightarrow \text{On doit augmenter R pour augmenter la sélectivité du filtre}$$