

Outils Logiques - L1 MIASHS - TD 1

Logique des propositions

Romain Péchoux

Exercice 1 (Limites). *Voyez-vous des limites à la logique des propositions en terme d'expressivité ? C'est-à-dire y a-t-il des propriétés que vous ne pouvez pas modéliser ? Donnez des exemples.*

Exercice 2 (Syntaxe). *A l'aide de la grammaire vue en cours, dire si les formules suivantes sont syntaxiquement correctes (justifiez):*

- $\perp$
- $P \wedge Q$
- $P \wedge R \wedge Q$
- $P \neg R$
- $P \vee \neg R \wedge Q$

Y a-t-il un problème concernant certaines des formules correctes ? Voyez-vous un moyen de corriger la grammaire pour résoudre ce problème ?

Exercice 3 (Sémantique). *Évaluer les formules suivantes:*

- $(P \wedge Q) \Rightarrow R$, pour la distributions $\delta(P) = 1, \delta(Q) = 1, \delta(R) = 1$.
- $(P \wedge \neg Q) \vee R$, pour la distributions $\delta(P) = 0, \delta(Q) = 1, \delta(R) = 0$.

Exercice 4 (Modèle). *Donner un modèle des formules suivantes:*

- $(P \wedge Q) \Rightarrow R$
- $(A \Leftrightarrow B) \wedge (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$
- $M \Rightarrow (M \Rightarrow P)$
- $(M \Rightarrow M) \Rightarrow \perp$
- $M \vee \neg M$

Parmi ces formules lesquelles sont satisfiables, tautologiques, contradictoires ? $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ est-elle conséquence logique de $\{R, Q\}$? Trouver les ensembles minimaux (au sens de l'inclusion) dont $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ est la conséquence logique.

Exercice 5 (Tautologie $\neq$ non contradictoire). *Montrer que F est tautologique si et seulement si $\neg F$ n'est pas satisfiable.*

Exercice 6 (Table de vérité). *Montrer que la formule suivante est satisfiable en donnant sa table de vérité:*

$$A \wedge \neg B \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \Rightarrow D)$$

En quoi est-ce fastidieux ? Peut-on trouver une solution plus "simple" ?

Exercice 7 (Arbre de Beth). *Reprendre la première question de l'exercice précédent en utilisant les arbres de Beth en lieu et place de la table de vérité. Y a-t-il une amélioration ? Est-ce vrai en général ?*

Exercice 8 (Modélisation : Une enquête du Lieutenant Colombo). *Le lieutenant Colombo enquête sur un homicide se déroulant à Nancy dans la nuit du 29 au 30 février. Il a effectué les déductions suivantes:*

1. *Jacques ou Martin est coupable.*
2. *Si Martin est coupable alors le crime a lieu avant minuit.*
3. *Si le crime a eu lieu à partir de minuit alors Jacques est coupable.*
4. *Le crime a eu lieu avant minuit.*

L'inspecteur Colombo est un expert de la logique des propositions. Que peut-il en déduire sur l'identité du (ou des) tueur(s) ?

Peut-il déduire des informations supplémentaires s'il dispose de l'indice suivant:

Si Jacques est coupable alors le crime a eu lieu à partir de minuit.