

Mécanique des Milieux Continus

19 janvier 2021 1h30 Aucun document autorisé

En raison de la raréfaction des ressources, les industries du pétrole sont amenées à creuser de plus en plus profond pour pomper des pétroles de moins en moins bonne qualité. Nous nous intéresserons dans ce sujet à l'analyse des contraintes qui sont appliquées au niveau de la paroi du puits de pétrole, et qui seront de deux types :

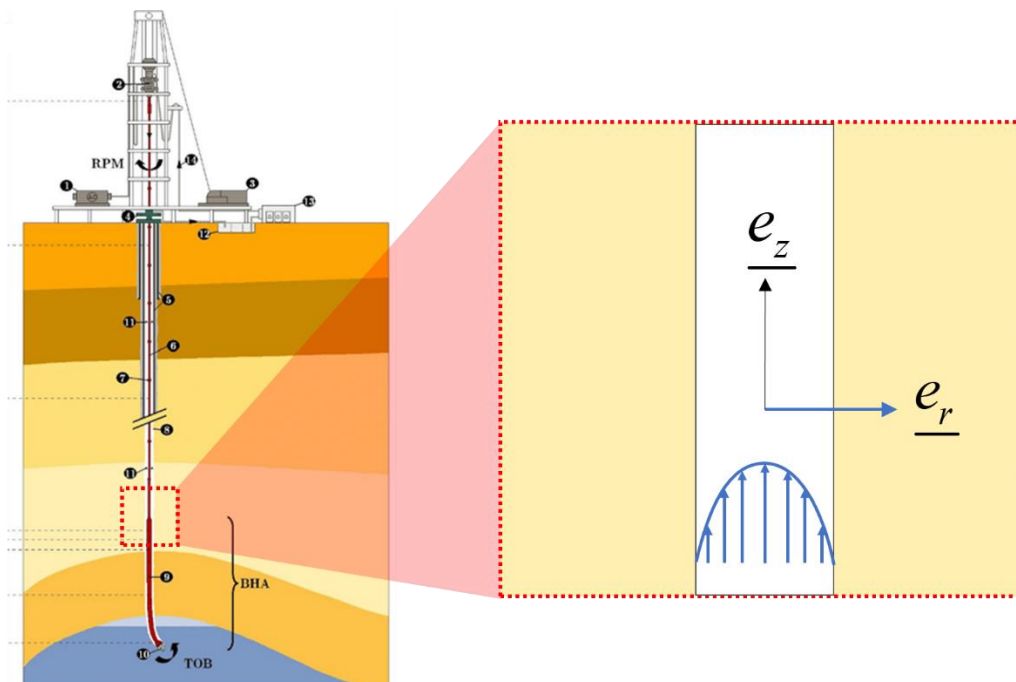
Partie 1

D'une part, l'écoulement d'un fluide visqueux au sein d'un puits (de section cylindrique) va créer des contraintes de cisaillement que l'on va tenter de déterminer.

Partie 2

D'autre part, la pression du fluide due à la hauteur du puits de pétrole va créer des contraintes de compression au niveau de la paroi, que l'on va également tenter de déterminer. On cherchera également à savoir à quelle distance on peut creuser sans risque un second puit.

R	Rayon du puit
H	hauteur du puit
p	pression du fluide à l'intérieur du puit
p_{atm}, p_{nappe}	pression atmosphérique et pression dans la nappe de pétrole
$\underline{V} = V \underline{e}_z$	vitesse d'écoulement du fluide
ρ, η	masse volumique et viscosité dynamique du pétrole
λ, μ	paramètres de Lamé des roches qui constituent la paroi du puit



Partie 1 : contrainte due à l'écoulement du fluide

Dans cette première partie on considère l'écoulement du pétrole (masse volumique ρ et viscosité dynamique η) à la vitesse $\underline{V} = V \underline{e}_z$ dans le puits de rayon R .

On considère que l'équation de Navier-Stokes est valide, et que l'écoulement est stationnaire. On peut facilement faire l'hypothèse des formes suivantes pour les champs de pression et de vitesses :

$$\underline{v} = v_z(r) \underline{e}_z \quad p = p(r, z)$$

1. A partir de l'équation de Navier-Stokes, écrire (sans les résoudre) le système d'équations qui régit l'écoulement du fluide. (/3)

2. A partir des équations obtenues, montrer que la solution du problème s'obtient en résolvant un système du type suivant :

$$\forall (r, z), \quad f(r) = g(z) \quad (/1)$$

Remarque : la solution d'une telle équation est nécessairement $f(r) = g(z) = K$ avec $K = \text{cste}$

3. D'après ce qui précède, on a donc le système :
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_z(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} = \frac{K}{\eta} \\ \frac{\partial p(z)}{\partial z} = K - \rho g \end{cases}$$

Montrer que le champ $v_z(r) = \frac{K}{\eta} \frac{r^2}{4} + A \ln r + B$ est solution de cette équation. (/1)

4. Déterminer les deux constantes A et B en considérant d'une part la condition d'adhésion à la paroi du puit, et d'autre part le fait que la vitesse est définie au centre du puits ($r=0$) (/2)

5. Trouver la constante K en considérant le fait que la pression est égale à la pression p_{nappe}

en $z=0$ et à p_{atm} en $z=H$. On rappelle que : $\frac{\partial p(z)}{\partial z} = K - \rho g$ (/1)

Remarque : on retrouve la forme (bien connue !) de l'écoulement *de Poiseuille* représenté sur la figure ci-dessus (on gardera cette nouvelle forme pour la question suivante) :

$$v_z(r) = V_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{avec} \quad V_{\max} = -\frac{R^2}{4\eta} \left(\frac{\Delta p}{H} + \rho g \right) \quad (\text{idem que l'annale de Janvier 2016})$$

Finalité

On sait maintenant calculer le débit du pétrole qui va s'extraire du puits !

On constate sans surprise que la vitesse diminue avec la hauteur du puits et avec la viscosité, et augmente avec la différence de pression $\Delta p = p_{atm} - p_{nappe}$ et le rayon R .

6. On cherche à savoir si la contrainte de cisaillement générée par cet écoulement à la surface du puits sera négligeable ou non devant la contrainte due à la pression. Calculer le tenseur des contraintes à la surface du puit. (/2)

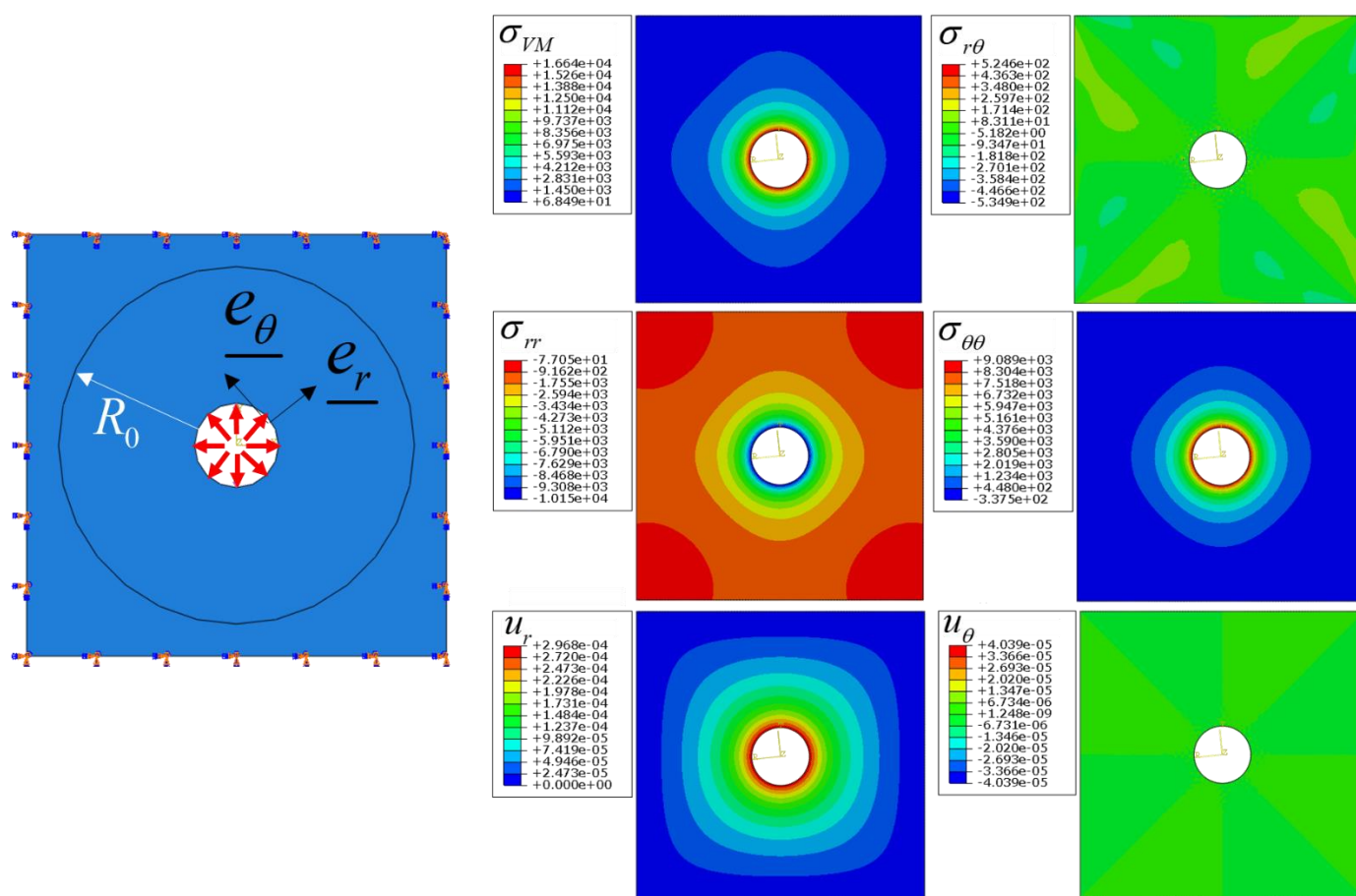
Finalité

On vient de calculer la contrainte à la surface du puits due à l'écoulement du pétrole. Une application numérique montrerait que cette contrainte est **négligeable** devant la contrainte qui va s'exercer en raison de la pression du fluide, que l'on va étudier désormais.

Partie 2 : contrainte due à la pression

On se place désormais au sein d'une section du puits. On considère donc une inclusion circulaire de rayon R dans un plan infini, et dans toute la suite on se placera en deux dimensions seulement (hypothèse de « déformations planes » ici). On considère que l'hypothèse des petites perturbations sera respectée.

A la suite d'une modélisation numérique (utilisant la Méthode des Eléments Finis, programme du S8 à l'ENSEM), les différents résultats ci-dessous ont été obtenus. Nous allons tenter de retrouver des résultats semblables par le calcul.



7. La face interne du puits est soumise à la pression p . Traduire cette condition sur le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en $r = R$. (/1)

(suite au dos)

8. A partir de la figure ci-dessus, justifier le fait qu'il soit possible de faire les hypothèses suivantes : $\underline{\underline{\sigma}}(r) = \sigma_{rr}(r) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$ et $\underline{u}(r) = u_r(r) \underline{e}_r$ (/1)

9. Calculer le tenseur des déformations linéarisé à partir de ce champ de déplacements (/1)

10. Calculer le tenseur des contraintes correspondant, en considérant que le matériau qui constitue le sol est élastique linéaire et isotrope. (/1)

(suite au dos)

11. A partir de l'équation d'équilibre, montrer que le champ de déplacement doit satisfaire l'équation différentielle : $\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0$ (/2)

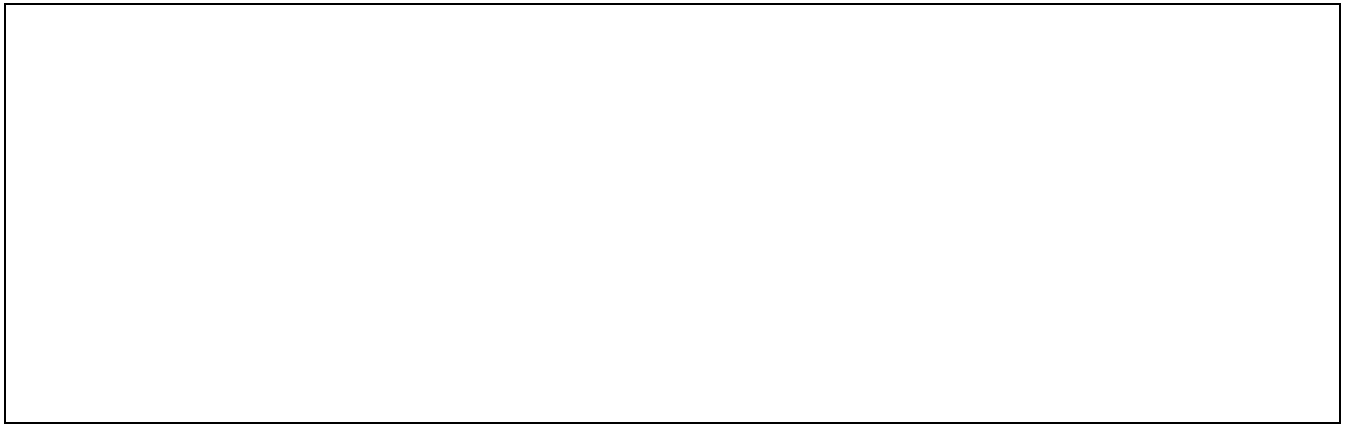
Remarque : ce calcul est identique à celui mené dans les examens de 2016, 2018 et 2019 !

12. Le champ : $u_r(r) = \frac{D}{r} + Cr$ est solution de cette équation. A partir de la figure ci-dessus, on peut faire l'hypothèse que pour un certain rayon $r = R_0$ le déplacement peut être considéré nul. En déduire que : $u_r(r) = Cr \left(1 - \frac{R_0^2}{r^2} \right)$ (/1)

13. A partir de la question 7, décrire la démarche permettant de trouver la constante C (/1)

14. On s'intéresse désormais à $\sigma_{\theta\theta}$ uniquement (la figure ci-dessus montre que l'on peut négliger σ_{rr}). Montrer que $\sigma_{\theta\theta} = 2\lambda C$ pour le rayon $r = R_0$. (/1)

(suite au dos)



15. Que vaudra cette contrainte si un deuxième puits est creusé à une distance $D = 2R_0$ du premier puits ? Faire schéma explicatif. (/1)



Finalité

On peut donc maintenant juger de l'influence de la présence d'un premier puits sur les contraintes dans le sol, et juger de la distance à laquelle forer un deuxième puits pour que la contrainte cumulée ne dépasse pas la contrainte admissible par les roches qui constituent le sol.

Formulaire

Tenseur des déformations linéarisé : $\frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$

Tenseur taux de déformation : $\frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}} \underline{v} + (\underline{\underline{grad}} \underline{v})^T)$

En coordonnées cylindriques (3D):

$$[\underline{\underline{Grad}} \underline{T}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_r}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta) & \frac{\partial T_r}{\partial z} \\ \frac{\partial T_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r) & \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial T_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} & \frac{\partial T_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad [\underline{\underline{div}} \underline{T}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(T_{r\theta} + T_{\theta r}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Equation d'équilibre : $\underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{\underline{f}}^m - \underline{\underline{a}}) = \underline{0}$

Loi de Hooke : $\underline{\underline{\sigma}} = (\lambda Tr \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$

Comportement du fluide newtonien : $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\eta \underline{\underline{d}}$

Equation de Navier-Stokes : $\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{grad}}(p) + \eta \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$