Chapitre 1
Introduction aux probabilités et à la combinatoire

Cours d'Irène Marcovici - L2 Informatique

Motivations :
- Acquérir des compétences utiles pour l'informatique
- Exercer l'esprit critique (exemple : dans un bassin d'emploi où il y a autant de femmes que d'hommes, l'entreprise A a 45 femmes sur 100 employés, l'entreprise B a 462 femmes sur 1000 employés, laquelle respecte le mieux la parité dans ses recrutements ?)

Table des matières

Objectif : modéliser une expérience aléatoire
- Construire un ensemble Ω des issues possibles (un univers)
- Le munir d'un outil (une probablilité) permettant de mesurer la chance d'obtenir un résultat ou un ensemble de résultats

Nécessité d'être precis dans la modélisation (exemple : paradoxe de la cordre de Bertrand)

1 Expérience aléatoire

1.1 Notions d'univers, d'événements

Définition (Expérience aléatoire, univers, issue, événement)**.**

On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont le résultat n'est pas connu à l'avance.
L'ensemble des tous les résultats possibles est noté Ω, il s'agit de **l'univers** de l'expérience.
On appelle **issue** ou **éventualité** un résultat possible $\omega \in \Omega$ de cette expérience aléatoire.
Un **événement** est une partie (un sous-ensemble) de l'univers.

1.2 Exemples

Expérience 1 On lance un dé cubique dont les faces sont des numéros de 1 à 6.
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = [\![1, 6]\!]$.
- L'événement "obtenir un 6" correspond à la partie de Ω : $A = \{6\}$.
- L'événement "obtenir un nombre pair" correspond à la partie de Ω : $B = \{2, 4, 6\}$.

Expérience 2 On lance une pièce deux fois de suite.
- $\Omega = \{PF, PP, FP, FF\}$.
- "obtenir au moins une fois pile" donne la partie de Ω : $A = \{PF, FP, PP\}$.

Expérience 3 On lance deux dés cubiques, un rouge et un noir.
- $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), \ldots, (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} = \{(i, j) | i, j \in [\![1, 6]\!]\} = [\![1, 6]\!]^2$. Il y a en tout 36 résultats possibles.
- $A =$ "obtenir un double 6" donne la partie de Ω : $\{(6, 6)\}$.
- $B =$ "obtenir un double" donne la partie de Ω : $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.
- $C =$ "obtenir au moins un 6" donne la partie de Ω : $\{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} = ([\![1, 6]\!] \times \{6\}) \cup (\{6\} \times [\![1, 6]\!])$ C'est un ensemble de cardinal 11.

Expérience 4 On lance une fléchette sur une cible de rayon 30 cm.
- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 30\}$
- l'événement "la fléchette est à moins de 10 cm du centre" donne la partie de Ω : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 10\}$.

Remarque. On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Lorsque Ω est fini ou dénombrable, sauf mention du contraire, l'ensemble des événements (c'est-à-dire l'ensemble des parties de Ω auxquelles il est pertinent de s'intéresser dans le cadre de l'expérience) est constitué de $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier (autrement dit, toutes les parties de Ω sont des événements, dignes d'intérêt !). Ce n'est plus toujours le cas lorsque Ω n'est pas dénombrable...

1.3 Lexique probabiliste

Vocabulaire des événements	**Vocabulaire des ensembles**	**Notation**
événement certain	Univers	Ω
événement impossible	Vide	$\emptyset$
issue, éventualité	élément de Ω	$\omega \in \Omega$
événement élémentaire	singleton	$\{\omega\} \subset \Omega$
événement contraire	complémentaire	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
les événements A et B sont réalisés	intersection	$A \cap B$
les événements A ou B sont réalisés	réunion	$A \cup B$
les événements A et B sont incompatibles	disjoints	$A \cap B = \emptyset$
l'événement A implique l'événement B	inclus	$A \subset B$

Remarque. Si $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est une famille d'événements :

1. l'événement $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ correspond à l'événement : au moins un des événements A_1 ou A_2 ou ... ou A_n est réalisé.
2. l'événement $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ correspond à l'événement : les événements A_1 et A_2 et ... et A_n sont tous réalisés.
3. l'événement $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}$ correspond à l'événement : au moins un des événements A_1 ou A_2 ou ... ou A_n n'est pas réalisé.
4. l'événement $\displaystyle\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ correspond à l'événement : aucun des événements A_1, A_2, ... A_n n'est réalisé.

Définition (Système complet d'événements).

Soit $I = \{1, \ldots, n\}$ ou $I = \mathbb{N}$. La famille $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** de Ω si :
- pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$,
$$A_i \cap A_j = \emptyset$$
- on a :
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega.$$

Du côté du vocabulaire des ensembles, cela correspond à une **partition**.

Exemple 1. Pour l'Expérience 1 (lancer d'un dé), $\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}$ est un s.c.e.

Remarque. Pour tout événement A, le couple $(A, \overline{A})$ forme un s.c.e.

2 Notion de probabilité

2.1 Définition

Définition (Probabilité).

Une probabilité est une application qui à un événement $A \subset \Omega$ associe un nombre réel $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$, et qui vérifie :
1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. pour toute suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux disjoints, on a $\mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$.

Exemple 2. Pour l'Expérience 1 (lancer d'un dé), $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, et l'ensemble des événements "intéressants" est $\mathcal{P}(\Omega)$. On peut définir une probabilité en posant $\mathbb{P}(A) = (\operatorname{Card} A)/6$ pour tout $A \subset \Omega$. Cela correspond à supposer que le dé n'est pas truqué. Mais il y a plein d'autres manières de définir une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$, qui seront pertinentes si le dé est truqué.

2.2 Propriétés

Proposition (Lien avec les opérations sur les événements).

Si A et B sont deux événements de Ω, alors :
1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
3. $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Démonstration.
1. $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \cup \emptyset \cup \ldots) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$ donc on ne peut pas avoir $\mathbb{P}(\emptyset) > 0$.
2. On utilise le point précédent : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
3. D'après ce qui précède, $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
4. Comme $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, on a $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.

5. On a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B))$ et on conclut avec le point précédent.

$\square$

Proposition (Croissance de $\mathbb{P}$)**.**

L'application $\mathbb{P}$ est croissante au sens de l'inclusion :

$$A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B).$$

Démonstration. Comme $A \subset B$, alors par une proposition précédente $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$, et donc comme $\mathbb{P}$ est positive : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A) \geqslant \mathbb{P}(A)$. $\square$

Proposition (Lien entre probabilité et s.c.e.)**.**

Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de Ω, alors :

$$\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

Proposition (Formule des probabilités totales)**.**

Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de Ω, alors pour tout événement B,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

En particulier, pour tous événements A et B, on a $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$.

Démonstration. Par définition d'un s.c.e.,

$$B = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i),$$

et les $(B \cap A_i)$ sont incompatibles entre eux. Il suffit alors d'utiliser l'additivité de la probabilité. $\square$

3 Équiprobabilité et combinatoire

3.1 Notion d'équiprobabilité

Dans de nombreux cas intéressants, quand on modélise l'expérience aléatoire, on suppose que les différents résultats possibles on tous "autant de chance" d'arriver (dé équilibré, pièce non truquée...). L'univers Ω est alors muni d'une probabilité uniforme.

Définition (Équiprobabilité).

Soit Ω un ensemble fini. Il existe une unique probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires : pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\operatorname{Card}\Omega},$$

et pour tout $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card}\Omega} = \frac{\text{Nb de cas favorables}}{\text{Nb de cas possibles}}.$$

On dit alors qu'on est en situation d'**équiprobabilité**.
L'art de calculer $\operatorname{Card}\Omega$ est appelé la **combinatoire**.

Exemple 3. On lance 2 dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 6 ?
Pour faire l'hypothèse d'équiprobabilité, il faut choisir $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, qui est de cardinal 36.
Il faut ensuite dénombrer les possibilités : $(1,5)$, $(5,1)$, $(3,3)$, $(2,4)$ et $(4,2)$.
Donc la réponse est $5/36$.

⚠ Si on lance deux dés simultanément et qu'on s'intéresse aux événements A="obtenir un 1 et un 5" et B="obtenir deux 3", l'événement A est deux fois plus probables que l'événement B !

3.2 Dénombrements classiques

3.2.1 Produit cartésien

Définition (Produit cartésien d'ensembles).

Soit $n \geqslant 2$ et $E_1, ..., E_n$ des ensembles. On définit le produit cartésien des $E_1, ..., E_n$ de la façon suivante :

$$E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ tels que } \forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \in E_i\}.$$

Un élément $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $E_1 \times E_2 ... \times E_n$ est appelé un *n-uplet* ou *n-liste*.

Remarque. Pour les petites valeurs de n, il existe des dénominations plus communes :
- un 2-uplet est appelé un *couple* ;
- un 3-uplet est appelé un *triplet* ;
- un 4-uplet est appelé un *quadruplet.*

La notation $\times$ se lit "croix" : $E \times F$ est lu "E croix F".
Lorsque l'on fait le produit cartésien n fois du même ensemble E, on note le résultat E^n. Par exemple, $E^3 = E \times E \times E$.

⚠ Un n-uplet est ordonné et se note entre parenthèses, contrairement à une partie à n éléments qui est sans ordre et se note entre accolades. Par exemple, $(1,2,3) \neq (1,3,2)$ mais $\{1,2,3\} = \{1,3,2\}$.

Proposition (Cardinal d'un produit cartésien).

Soit $E_1, ..., E_n$ des ensembles finis. Alors

$$\operatorname{Card}(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(E_i).$$

En particulier, on a $\mathrm{Card}(E^n) = (\mathrm{Card}(E))^n$.

Exemple 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue 5 tirages successifs avec remise d'une boule, dans une urne de n boules numérotées de 1 à n.

— $\Omega = \{1, \dots, n\}^5$, et $\mathrm{Card}\,\Omega = n^5$.

— Un représentant de Ω est un 5-uplet $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ avec $1 \leqslant i_j \leqslant n$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

— Soit A l'événement "la somme des chiffres obtenus est inférieure ou égale à 6".
Cela correspond à la partie de : $\{(1,1,1,1,1),(2,1,1,1,1),(1,2,1,1,1),(1,1,2,1,1),(1,1,1,2,1),(1,1,1,1,2)\}$
Donc $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{n^5}$.

3.2.2 Arrangements

Définition (Arrangement).

Soit $n \geqslant 1$ et E un ensemble de cardinal n. On appelle arrangement de k éléments de E un suite de k éléments de E, sans répétition. Il s'agit donc d'un k-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in E^k$ tel que si $i \neq j$, $x_i \neq x_j$.

Proposition (Nombre d'arrangements).

Le nombre d'arrangements de k éléments d'un ensemble E de cardinal n vaut :

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Exemple 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue 5 tirages successifs sans remise d'une boule, dans une urne de n boules numérotées de 1 à n (on suppose $n \geqslant 5$).

— $\Omega =$ l'ensemble des arrangements de 5 éléments de $\{1, \dots, n\}$, et $\mathrm{Card}\,\Omega = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.

— Un représentant de Ω est un 5-uplet $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ tel que si $j \neq k$, $i_j \neq i_k$.

— Soit A l'événement "la deuxième boule tirée est la boule qui porte le numéro 1".
A correspond à l'ensemble des 5-uplets de la forme $(x_1, 1, x_2, x_3, x_4)$, où (x_1, x_2, x_3, x_4) forme un arrangement de 4 éléments de l'ensemble $[\![2, n]\!]$. Il y en a $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.
Donc $\mathbb{P}(A) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{1}{n}$.

— En fait, si on note A_i l'événement "la deuxième boule tirée est la boule qui porte le numéro i" (de sorte que $A_1 = A$), la famille $(A_1, \dots, A_n)$ forme un système complet d'événements. Ainsi $\mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n) = 1$.
Comme les A_i ont tous la même probabilité, on retrouve $\mathbb{P}(A_1) = \dots = \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$.

3.2.3 Permutations

Définition (Permutation d'un ensemble fini).

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Une permutation des éléments de E est une liste ordonnée sans répétition de tous les éléments de E, c'est-à-dire un arrangement de n éléments de E.

Proposition (Nombre de permutations).

Il y a $n!$ permutations d'un ensemble de cardinal n.

Exemple 6. On tire successivement et sans remise n boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
$\Omega =$ l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$, et $\mathrm{Card}\,\Omega = n!$.

3.2.4 Combinaisons

Définition (Combinaisons)**.**

Soit $n \geqslant 1$ et E un ensemble fini de cardinal n. On appelle combinaison de k éléments de E tout sous-ensemble de E contenant k éléments.

Proposition (Nombre de combinaisons)**.**

Soit E un ensemble de cardinal n, et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
Le nombre de combinaisons de k éléments de E est égal à

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Prenons par exemple $E = \{1, \ldots, 5\}$ et $k = 3$. Un exemple de combinaison de 3 éléments de E est $\{2, 3, 5\}$. En permutant les éléments, on peut lui associer 6 arrangements de 3 éléments de E : (2,3,5), (2,5,3), (3,2,5), (3,5,2), (5,2,3), (5,3,2).
Plus généralement, à chaque combinaison de k éléments d'un ensemble E, on peut associer $k!$ arrangements différents, en permutant les éléments de l'ensemble. Ainsi, il y a $k!$ fois plus d'arrangements de k éléments que de combinaisons de k éléments.

Exemple 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue un tirage de 5 boules prises simultanément dans une urne de n boules numérotées de 1 à n (on suppose $n \geqslant 5$).

- $\Omega =$ l'ensemble des combinaisons de 5 éléments de $\{1, \ldots, n\}$, et $\operatorname{Card}\Omega = \binom{n}{5}$.
- Un représentant de Ω est un sous-ensemble $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$ de 5 éléments de $\{1, \ldots, n\}$ (de sorte que si $j \neq k$, $i_j \neq i_k$).

Remarque. Le nombre total de combinaisons (pour k de 0 à n) est égal au nombre de sous-ensembles de E, et vaut 2^n. En effet, choisir un sous-ensemble (de cardinal quelconque) de E revient à décider pour chacun des n éléments de E si on le choisit ou non dans le sous-ensemble. Il y a deux possibilités à chaque fois, soit 2^n choix possibles en tout. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Plus généralement, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k} = (a+b)^n.$$

C'est la **formule du binôme de Newton** (la formule précédente correpond au cas particulier $a = b = 1$).

3.3 Bijection

Définition (Bijection)**.**

Une application $f : E \to F$ est une bijection si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :

- $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$ (alors f est une surjection)
- si x, y sont deux éléments distincts de E, alors $f(x) \neq f(y)$ (f est une injection).

Propriété.

S'il existe une bijection entre E et F, alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Exemple 8. Le nombre de chemins qui vont de $(0,0)$ à (m,n) en faisant uniquement des pas d'une unité vers la droite ou vers le haut est égal au nombre de mots de $m+n$ lettres qu'on peut écrire avec m fois la lettre x et n fois la lettre y, et vaut $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$.

Jusqu'ici, on a supposé qu'on travaillait avec des ensembles finis. Le cas des ensembles infinis est plus compliqué : on ne peut pas parler du cardinal d'un ensemble infini, mais on peut se demander si tous les ensembles infinis ont la même taille. Par exemple, on pourrait avoir envie de dire que $\mathbb{N}^*$ "est plus petit" que $\mathbb{N}$, et cependant, l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

est une bijection. On choisit de dire que deux ensembles infinis sont de même taille s'il sont en bijection.

Définition.

Un ensemble E est dit **dénombrable** si et seulement s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et E.

Une bijection de $\mathbb{N}$ dans E est appelée une **énumération** des éléments de E. Autrement dit, un ensemble est dénombrable si on peut numéroter ses éléments avec les entiers naturels.

Exemple 9. $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et l'ensemble des nombres premiers sont des ensembles dénombrables. On peut aussi montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Hôtel de Hilbert.

Proposition.

(i) Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.
(ii) Un produit cartésien fini d'ensembles finis ou dénombrables est fini ou dénombrable.
(iii) Une union finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

On admet ces propriétés.

Exemple 10. Pour p entier positif, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.

Nous allons montrer maintenant qu'il existe des ensembles infinis non dénombrables.

Proposition.

$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration. On utilise le procédé de la diagonale de Cantor. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ soit dénombrable. On peut donc numéroter ses éléments $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x_0, x_1, \ldots\}$. Un point de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est une suite de 0 et de 1 : on note ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$x_i = (x_{i,0}, x_{i,1}, \ldots) = (x_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}.$$

On va maintenant construire un élément $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ différent de tous les x_i : on pose

$$\forall j \in \mathbb{N},\ y_j = \begin{cases} 0 \text{ si } x_{j,j} = 1 \\ 1 \text{ si } x_{j,j} = 0 \end{cases}$$

Pour un entier naturel i quelconque, par construction, $y_i \neq x_{i,i}$, donc $y \neq x_i$; ainsi, pour tout entier $i \geqslant 0$, $y \neq x_i$ et ainsi $y \notin \{x_0, x_1, \ldots\}$; cependant, $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Ceci contredit donc $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x_0, x_1, \ldots\}$. $\square$

En conséquence, l'univers $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ modélisant l'expérience consistant à lancer indéfiniment une pièce, n'est pas dénombrable.
On peut construire une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et en déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (admis).
⚠ Il n'existe pas de probabilité uniforme sur un ensemble infini dénombrable !

3.4 Probabilité uniforme sur $[0,1]$

On veut modéliser le générateur de nombres aléatoire de la calculatrice ou du tableur, on aimerait comprendre ce que signifie "tirer un nombre au hasard dans $[0,1]$ de façon uniforme". Comme l'ensemble $[0,1]$ est infini non dénombrable, on ne peut pas procéder comme précédemment.

Théorème (admis)**.**

Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ définie sur tous les sous-ensembles "agréables" de $[0,1]$ et qui associe à tout intervalle fermé de $[0,1]$ sa longueur. Cette probabilité est appelée **probabilité uniforme** sur $[0,1]$, et satisfait :
(i) Soit $a, b \in [0,1]$ tels que $a < b$, alors

$$\mathbb{P}([a,b]) = \mathbb{P}(]a,b[) = \mathbb{P}(]a,b]) = \mathbb{P}([a,b[) = b - a.$$

(ii) Pour tout $a \in [0,1]$, $\mathbb{P}(\{a\}) = 0$.

⚠ Pourquoi ne peut-on pas écrire $\mathbb{P}([0,1]) = \sum_{a\in[0,1]} \mathbb{P}(\{a\})$?
Quelle est la probabilité de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$?