Chapitre 2
Indépendance et probabilités conditionnelles

Cours d'Irène Marcovici - L2 Informatique

Table des matières

1 Indépendance

1.1 Indépendance de deux événements

Définition (Indépendance)**.**

Soient A et B deux événements définis sur le même univers Ω, et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. On dit que A et B sont **indépendants** si

$$\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}\left(A\right) \mathbb{P}\left(B\right).$$

Exemple 1. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes, et on considère les 3 événements suivants :
A : "la carte tirée est rouge",
B : "la carte tirée est un cœur"
C : "la carte tirée est un roi".
Savoir que C est réalisé ne donne a priori aucune indication quant au fait que cette carte soit un cœur. En revanche, si on sait que A est réalisé, ont sait qu'on a "plus de chance" d'avoir tiré un cœur. Formellement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}(\text{"la carte tirée est le roi de cœur"}) = 1/32 \\ \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) &= (8/32) \times (4/32) = 1/32. \end{aligned}$$

Donc B et C sont indépendants.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(\text{"la carte tirée est un cœur"}) = 8/32 = 1/4 \\ \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) &= (16/32) \times (8/32) = 1/8. \end{aligned}$$

Donc A et B ne sont pas indépendants.

⚠ Ne pas confondre **indépendance** et **incompatibilité** !

— **L'indépendance ne peut se juger qu'en rapport à la probabilité**. A et B sont indépendants ssi

$$\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}\left(A\right) \mathbb{P}\left(B\right).$$

— **L'incompatibilité est elle une notion ensembliste, qui ne dépend pas de la probabilité**
A et B sont incompatibles ssi

$$A \cap B = \emptyset,$$

et on a alors :

$$\mathbb{P}\left(A \cup B\right) = \mathbb{P}\left(A\right) + \mathbb{P}\left(B\right).$$

Remarque. $\emptyset$ et Ω sont indépendants de n'importe quel événement.

1.2 Indépendance d'une famille d'événements

La notion d'indépendance s'étend aux familles de plusieurs événements de la manière suivante.

Définition.

On dit que les événements A_1, A_2,…, A_n sont *indépendants* si pour tout sous-ensemble non vide $\{j_1, \ldots, j_p\}$ de $\{1, \ldots, n\}$, on a

$$\mathbb{P}\big(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_p}\big) = \mathbb{P}\big(A_{j_1}\big)\, \mathbb{P}\big(A_{j_2}\big) \ldots \mathbb{P}\big(A_{j_p}\big).$$

⚠ Il ne suffit pas que l'on ait

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)\ldots\,\mathbb{P}(A_n).$$

Il ne suffit pas non plus que, pour chaque paire $\{i,j\} \subset \{1,\ldots,n\}$, les événements A_i et A_j soient indépendants. Pour donner un exemple, considérons l'espace correspondant à deux lancers de pile ou face (pièce non truquée) et prenons

$$\begin{aligned} A &: \text{"pile au premier lancer"} \\ B &: \text{"pile au second lancer"} \\ C &: \text{"même résultat aux deux lancers"} \end{aligned}$$

Les événements A, B, C sont indépendants deux à deux mais non indépendants.

2 Probabilités conditionnelles

2.1 Définition

Définition (Probabilité conditionnelle)**.**

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle *probabilité conditionnelle* de A sachant B le nombre suivant, noté $\mathbb{P}_B(A)$ ou $\mathbb{P}(A \,|\, B)$:

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Exemple 2. On pioche au hasard une carte dans un jeu non truqué de 32 cartes. On a alors par exemple

$$\mathbb{P}(\text{"cœur"} \,|\, \text{"dame"}) = \frac{\mathbb{P}(\text{"dame de cœur"})}{\mathbb{P}(\text{"dame"})} = \frac{1/32}{4/32} = \frac{1}{4}$$

et

$$\mathbb{P}(\text{"cœur"} \,|\, \text{"rouge"}) = \frac{\mathbb{P}(\text{"cœur"})}{\mathbb{P}(\text{"rouge"})} = \frac{8/32}{16/32} = \frac{1}{2}.$$

En effet,

$$\text{"dame"} \cap \text{"cœur"} = \text{"dame de cœur"} \quad \text{et} \quad \text{"cœur"} \cap \text{"rouge"} = \text{"cœur rouge"} = \text{"cœur"}.$$

Proposition.

Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. L'application $\mathbb{P}_B$ définit une probabilité sur Ω.

Le fait que $\mathbb{P}_B$ soit une probabilité implique que cela vérifie toutes les propriétés vues précédemment. Par exemple, $\mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(\bar{A}) = 1$.

⚠ Même si l'on écrit $\mathbb{P}(A \,|\, B)$, ce qui est entre parenthèses, $A \,|\, B$, n'est ni un événement ni rien du tout, ce n'est qu'une écriture qui ne veut rien dire toute seule !

Proposition.

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \,|\, B) = \mathbb{P}(A).$$

Démonstration. En effet, comme $\mathbb{P}(B) > 0$, on peut diviser : A et B sont indépendants $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \,|\, B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$. □

2.2 Propriétés de calcul

Les propositions suivantes sont particulièrement utiles dans les calculs.

Proposition (Formule des probabilités composées)**.**

Soit $n \geqslant 1$ et $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'événements telle que $\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right) \neq 0$. Alors

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right) \mathbb{P}_{A_1}\left(A_2\right) \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}\left(A_3\right) \ldots \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}\left(A_n\right).$$

Démonstration. On le montre simplement par récurrence sur n. □

Exemple 3. On tire trois fois de suite, sans remise, dans une urne composée de 7 boules blanches et 6 rouges. Pour $i = 1$ à 3, on pose $B_i =$"le i-ème tirage donne une boule blanche", on définit de même l'événement R_i. Calculer $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3)$.
La formule donne :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = \frac{7}{13} \times \frac{6}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{21}{143}.$$

Proposition (Formule de Bayes)**.**

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\, \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Cette proposition sert à "retourner" le conditionnement : on l'utilise pour calculer $\mathbb{P}(A \mid B)$ lorsqu'on connaît $\mathbb{P}(B \mid A)$.

Proposition (Formule des probabilités totales)**.**

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements tel que $\forall i \in I,\ \mathbb{P}(A_i) > 0$. Alors pour tout événement B, on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \mid A_i)\, \mathbb{P}(A_i).$$

On peut combiner les deux dernières propositions pour obtenir l'énoncé suivant.

Proposition.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements tel que $\forall i \in I,\ \mathbb{P}(A_i) > 0$ et B un événement de probabilité non nulle. Alors pour tout $j \in I$, on a

$$\mathbb{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_j)\, \mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \mid A_i)\, \mathbb{P}(A_i)}.$$

Un cas très utile est donné par le système complet $(A, \bar{A})$. Si $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, alors

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\, \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \mid A)\, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid \bar{A})\, \mathbb{P}(\bar{A})}.$$

Exemple 4. Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie.

1. lorsque le test est appliqué à une personne malade, le test est positif dans 99,8% des cas.
2. lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans 99,6% des cas.

On sait qu'une personne sur 100 000 est malade. Peut-on avoir confiance en ce test ? C'est dire, sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit malade ?
On note M l'événement "la personne est malade" et T l'événement "le test est positif". L'énoncé nous donne :

$$\mathbb{P}_M(T) = 0,998 \quad \mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,996 \quad \mathbb{P}(M) = \frac{1}{100000},$$

et on cherche à calculer $\mathbb{P}_T(M)$. La formule précédente nous donne :

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T)}{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(T)} = \frac{0,00001 \times 0,998}{0,00001 \times 0,998 + 0,99999 \times (1 - 0,996)} = 0,0025.$$

Donc même si le test est positif, il y a très peu de chances que la personne soit malade $(0,25\%)$.

3 Expériences successives indépendantes

3.1 Jeu de pile ou face, ou schéma de Bernoulli fini

Soit $n \geq 1$. On lance n fois de suite une pièce qui tombe sur pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et sur face avec probabilité $1-p$. L'univers naturel pour cette expérience est donc l'ensemble $\Omega = \{P,F\}^n$ des n-uplets à valeurs dans $\{P,F\}$. Par exemple, si $n = 4$, une issue possible est $\omega = (P,F,F,P) \in \Omega$.

3.1.1 Probabilité d'un événement élémentaire

Pour $k \in \{1,\ldots,n\}$, soit A_k l'événement "obtenir P au k-ème lancer". Alors, pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, $\mathbb{P}(A_k) = p$. De plus, il est naturel de supposer que les $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ sont indépendants.
Ceci permet de déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.
Soit $\omega = (\omega_i)_{1\leq i\leq n} \in \Omega$ fixé. On note $I(\omega)$ l'ensemble des numéros des lancers ayant donné pile pour ce résultat ω.

$$I(\omega) = \{i \in \{1,\ldots,n\} : \omega_i = P\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Card} I(w) = \text{ nombre de piles obtenus.}$$

Alors,

$$\{\omega\} = \left(\bigcap_{i\in I(w)} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\notin I(w)} \overline{A_j}\right).$$

Comme les événements $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ sont indépendants,

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i\in I(w)} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\notin I(w)} \overline{A_j}\right)\right) = \left(\prod_{i\in I(w)} \mathbb{P}(A_i)\right)\left(\prod_{j\notin I(w)} \mathbb{P}(\overline{A_j})\right) = p^{\operatorname{Card}(I(w))}(1-p)^{n-\operatorname{Card}(I(w))}.$$

On remarque en particulier que $\mathbb{P}(\{\omega\})$ ne dépend que du nombre de piles dans ω, et non pas des numéros des lancers ayant donné pile.

3.1.2 Probabilité d'obtenir k piles

Soit $k \in \{0,\ldots,n\}$. Notons B_k l'événement "obtenir exactement k fois pile". Quelle est la probabilité de B_k ? On a :

$$\mathbb{P}(B_k) = \sum_{\omega\in B_k} \mathbb{P}(\omega).$$

Or $\omega \in B_k \Leftrightarrow \operatorname{Card} I(\omega) = k$, donc tous les événements élémentaires $\omega \in B_k$ ont la même probabilité $\mathbb{P}(\omega) = p^k(1-p)^{n-k}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(B_k) = \sum_{\omega\in B_k} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega\in B_k} p^k(1-p)^{n-k} = p^k(1-p)^{n-k}\operatorname{Card}(B_k).$$

Il nous reste donc à déterminer le cardinal de B_k, c'est-à-dire à compter combien il existe d'éléments de $\{P,F\}^n$ écrits avec exactement k fois la lettre P et $n-k$ fois F. Il suffit de déterminer la place des k lettres P parmi les n places possibles, et de compléter ensuite avec des F. Ainsi,

$$\mathrm{Card}(B_k) = \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarquons que les $(B_k)_{0\leq k\leq n}$ forment un système complet d'événements. La formule du binôme assure que

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1,$$

ceci est toujours vrai pour un système complet.

Proposition.

On considère une expérience aléatoire à deux issues possibles A et B, telle que $\mathbb{P}(A) = p$ (et $\mathbb{P}(B) = 1-p)$). On répète n fois cette expérience aléatoire, chaque répétition étant indépendante des précédentes. Soit X le nombre de résultats A obtenus. Alors,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On dira que X suit une *loi binomiale de paramètre n et p* (cf. prochain chapitre).

Exemple 5. On effectue 5 tirages successifs indépendants d'une pièce truquée, qui tombe sur pile avec probabilité p et sur face avec probabilité $1-p$. La probabilité d'obtenir exactement 3 fois pile vaut $\binom{5}{3}p^3(1-p)^2 = 10p^3(1-p)^2$.

Exemple 6. On considère une urne contenant r boules rouges et b boules bleues. On tire n fois de suite une boule, avec remise. A chaque tirage, la probabilité de tirer une boule rouge vaut $\frac{r}{r+n}$. Donc la probabilité qu'au cours de ces n tirages, on ait tiré exactement k fois une boule rouge, vaut : $\binom{n}{k}(\frac{r}{r+b})^k(\frac{b}{r+b})^{n-k}$.

3.2 Jeu infini de pile ou face, ou schéma de Bernoulli

Si l'on veut étudier par exemple l'instant où l'on obtient le premier pile au cours d'un jeu de pile ou face, on ne peut pas se restreindre à n lancers, il faut considérer une suite infinie de lancers.
On doit donc modéliser une suite infinie de lancers indépendants, tombant avec probabilité $p \in]0,1[$ sur pile et avec probabilité $1-p$ sur face.
L'univers correspondant à cette expérience est l'ensemble $\Omega = \{P,F\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{P,F\}$. C'est un ensemble infini non dénombrable.

Quelle est la probabilité d'un événement élémentaire ?
On note toujours A_k l'événement "obtenir P au k-ème lancer".
Soit $\omega \in \Omega$. Par exemple, $\omega = (P,F,F,P,P,F,\ldots)$. On a

- $\{\omega\} \subset A_1$, donc $\mathbb{P}(\{\omega\}) \leqslant \mathbb{P}(A_1) = p$
- $\{\omega\} \subset A_1 \cap \overline{A}_2$, donc $\mathbb{P}(\{\omega\}) \leqslant \mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A}_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(\overline{A}_2) = p(1-p)$
- $\{\omega\} \subset A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$, donc $\mathbb{P}(\{\omega\}) \leqslant \mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(\overline{A}_2)\mathbb{P}(\overline{A}_3) = p(1-p)^2$
- etc.

On en déduit que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0$!
On ne peut plus écrire de formule du type $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$. Cela vient du fait que Ω est infini non dénombrable. Contrairement au schéma de Bernoulli fini, ici, il ne suffit pas de connaître la probabilité des événements élémentaires pour décrire la probabilité.

Remarque. L'argument précédent montre que la probabilité d'obtenir la suite $(F,F,F,\ldots)$ est nulle. Donc, avec probabilité 1, on finira par voir apparaître un pile.

Quelle est la probabilité que le premier pile sorte au k-ème lancer ? Pour $k \geq 1$, on note B_k l'événement "pile sort pour la première fois au k-ème tirage". Alors, en utilisant l'indépendance des événements $(A_k)_{k\geq 1}$,

$$\forall k \geq 1 \quad B_k = \left(\bigcap_{1\leq i\leq k-1} \overline{A}_i \right) \cap A_k \quad \text{et donc} \quad \mathbb{P}(B_k) = \left(\prod_{1\leq i\leq k-1} \mathbb{P}(\overline{A}_i) \right) \mathbb{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p.$$

Proposition.

On considère une expérience aléatoire à deux issues possibles A et B, telle que $\mathbb{P}(A) = p$ (et $\mathbb{P}(B) = 1-p$)). On répète cette expérience aléatoire, chaque répétition étant indépendante des précédentes. Soit X le premier instant où l'événement A se produit. Alors,

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p.$$

On dira que X suit une *loi géométrique de paramètre* p (cf. prochain chapitre).

Application. Un singe tape au hasard des lettres d'un clavier (qui ne comporte que les 26 touches des 26 lettres de l'alphabet). On suppose qu'il n'a pas de préférence particulière pour certaines lettres, et que ses différents choix sont indépendants. Montrer que si on est suffisamment patient, on verra un jour le mot "abracadabra" apparaître.

Indication : "abracadabra" compte 11 lettres. Noter A_k l'événement : "abracadabra" apparaît entre les lettres $11k+1$ et $11k+11$ et imiter la preuve du jeu de pile ou face.