

Examen du 20 janvier

Durée : 2h. Tous documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques interdits.

Commentaire général :

Il faut faire très attention à expliquer le contexte et les hypothèses quand on cite des théorèmes, particulièrement dans les questions de cours !! On ne peut pas répondre à la question sur la formule des résidus en écrivant juste la formule sans expliquer ce qu'il y a dedans : soit f une fonction méromorphe au voisinage d'un ouvert borné U , P l'ensemble de ses pôles dans U , alors on a la formule...

Exercice 1. Soit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ et $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.

(a) Question de cours : rappeler le principe du maximum.

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U . Si $|f|$ a un maximum local sur U , alors f est constante.

Autre énoncé : Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert borné U et continue sur le compact $\bar{U}$. Alors $|f|$ atteint son maximum sur la frontière $\partial U = \bar{U} \setminus U$ de U .

(b) Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{H}$.

f est le quotient de deux fonction holomorphes sur $\mathbb{H}$. Le dénominateur s'annule uniquement en i , qui n'est pas dans $\mathbb{H}$. Donc f est holomorphe.

(c) Montrer que f est à valeurs dans le disque unité ouvert.

Il faut montrer que $|f| < 1$ sur $\mathbb{H}$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{H}$. Alors

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{z-i}{z+i} \right| \\ &= \frac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2y}{x^2 + y^2 + 1 + 2y} \\ &< 1 \text{ car } y > 0. \end{aligned}$$

(d) Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}, \Im(g(z)) > 0$. Montrer que g est constante.

g est à valeurs dans $\mathbb{H}$, donc on peut définir la composée $h = f \circ g$ qui est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. D'après la question c), $|h(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc le théorème de Liouville nous dit que h est une constante $C \in \mathbb{C}$. On a $\frac{g(z)-i}{g(z)+i} = C$, donc $g(z)-i = C(g(z)+i)$ et

$$g(z) = \frac{i(1+C)}{1-C} \text{ est bien une constante.}$$

Commentaires :

(a) C'est une question de cours, il y a un théorème qui s'appelle le principe du maximum ! Certains ont juste donné la définition d'un maximum, ça n'est pas ce que j'attendais.

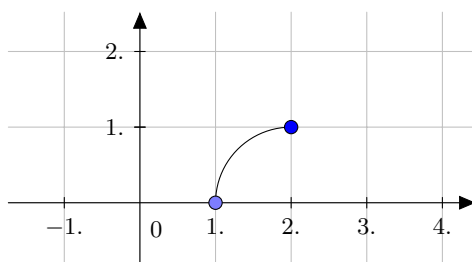
(b) Beaucoup se sont lancés dans des calculs TRES PENIBLES pour vérifier Cauchy-Riemann. Non seulement ça fait perdre un temps fou, mais la probabilité de se tromper est non nulle et c'était vraiment inutile.

(c) Un problème que j'ai vu plusieurs fois : on a $(y-1)^2 < (y+1)^2$ UNIQUEMENT parce que $y > 0$!

(d) Question un peu plus difficile mais il fallait évidemment appliquer le résultat de la question précédente.

Commentaires : ACHTUNG !!! Même remarque qu'au partiel : pour calculer une intégrale, on n'écrit pas les nombres complexes sous la forme $z = (x, y)$!! Par ailleurs, il ne faut pas oublier la dérivée du chemin $\gamma'(t)$ quand on fait le changement de variables.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$. Soit γ le chemin reliant le point d'affixe 1 au point d'affixe $2+i$ et dont l'image est donnée par la figure suivante :



Calculer $\int_{\gamma} f(z) dz$.

Solution :

Un paramétrage de γ est donné par

$$\gamma(t) = 2 + e^{i(\pi-t)} = 2 - e^{-it}, t \in [0, \pi/2].$$

Donc

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{\pi/2} i e^{-it} \overline{2 - e^{-it}} dt = \int_0^{\pi/2} i e^{-it} (2 - e^{it}) dt = -i \frac{\pi}{2} + [-2e^{-it}]_0^{\pi/2} = -i \frac{\pi}{2} + 2 + 2i.$$

Exercice 3. (a) Question de cours : rappeler le théorème des résidus.

(b) Calculer le résidu de $f : z \mapsto \frac{1}{(z^2 + 2)^2}$ en $z = i\sqrt{2}$.

On applique la formule du cours.

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i\sqrt{2}) &= \frac{d}{dz} ((z - i\sqrt{2})^2 f(z)) \Big|_{z=i\sqrt{2}} \\ &= \frac{-2}{(z + i\sqrt{2})^3} \Big|_{z=i\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{8i\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(c) Si $R > 0$, on note $K_R := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq 0 \text{ et } |z| \leq R\}$. On note Γ_R le bord de ce compact, orienté positivement. Calculer $I(R) := \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{(2 + z^2)^2}$ pour **toutes** les valeurs de $R \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{\sqrt{2}\}$.

Déjà, si $R < \sqrt{2}$, f est holomorphe au voisinage de K_R , donc cette intégrale est nulle.

Prenons maintenant $R > \sqrt{2}$. Le contour Γ_R ne contient pas de pôle de f et le seul pôle de f dans l'intérieur de K_R est $i\sqrt{2}$; on peut donc appliquer le théorème des résidus sur Γ_R .

On obtient

$$I(R) = 2i\pi \text{Res}(f, i\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

(d) En déduire que $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

On décompose

$$I(R) = \int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2+2)^2} + \int_0^\pi Rie^{i\theta} \frac{d\theta}{(2+R^2e^{2i\theta})^2}$$

et on montre avec la méthode habituelle que la deuxième intégrale converge vers 0 quand $R \rightarrow \infty$.

Commentaires :

(a) cf cours

(b) Il faut connaître la formule pour calculer un résidu !! Si f a un pôle d'ordre n en a ,

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-a)^n f(z))|_{z=a}.$$

Ici on a un pôle d'ordre 2 en $i\sqrt{2}$.

(c) Une grande majorité d'entre vous a oublié de traiter le cas $R < \sqrt{2}$. Dans ce cas, f est holomorphe au voisinage de K_R car les deux pôles de f sont à l'extérieur, donc l'intégrale vaut 0 par Cauchy.

(d) Parmi ceux qui ont traité cette question, beaucoup ont montré que l'intégrale $\int_0^\pi Rie^{i\theta} \frac{d\theta}{(2+R^2e^{2i\theta})^2}$ tendait vers 0, puis ont écrit :

$$I(R) = \int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2+2)^2}.$$

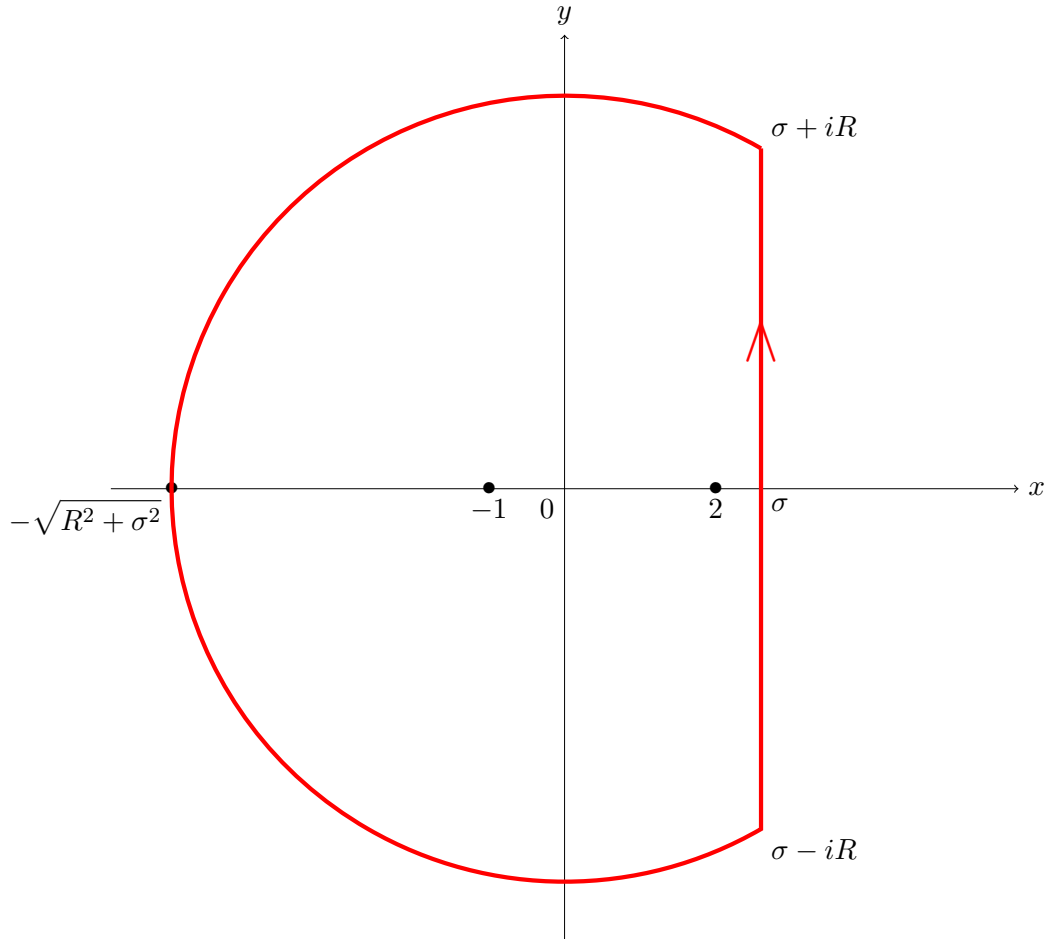
Mais c'est complètement faux !!! C'est vrai uniquement en passant à la limite :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2+2)^2}.$$

Exercice 4. Soit f une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ dont la transformée de Laplace $F(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}dt$ possède une abscisse de convergence $p_f < +\infty$. On rappelle la formule de Bromwich-Mellin pour le calcul de la transformée de Laplace inverse valable pour tout $\sigma > p_f$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zt} F(z) dz.$$

Soit $\sigma > 2$. En utilisant la formule des résidus, calculer la transformée de Laplace inverse de $F(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)^2}$. On utilisera le contour Γ_R suivant.



Solution : La fonction g définie par $g(z) = \frac{e^{tz}}{(z+1)(z-2)^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $z = -1$ et un pôle double en $z = 2$. Calculons ses résidus :

- $\text{Res}(g, -1) = \frac{e^{-t}}{9}$;
- $\text{Res}(g, 2) = \frac{d}{dz}((z-2)^2 g(z)) \Big|_{z=2} = \frac{(t(z+1) - 1)e^{tz}}{(z+1)^2} \Big|_{z=2} = \frac{(3t-1)e^{2t}}{9}$.

Si on prend $\sigma > 2$, les deux pôles sont bien à l'intérieur du contour Γ_R , donc d'après le théorème des résidus,

$$\int_{\Gamma_R} g(z) dz = 2i\pi (\text{Res}(g, -1) + \text{Res}(g, 2)) = 2i\pi \left(\frac{e^{-t}}{9} + \frac{(3t-1)e^{2t}}{9} \right). \quad (1)$$

De plus, cette intégrale peut s'écrire

$$\int_{\Gamma_R} g(z) dz = \int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} g(z) dz + \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} R' i e^{i\theta} g(R' e^{i\theta}) d\theta,$$

où $\alpha = \arctan\left(\frac{R}{\sigma}\right)$ est l'argument de $\sigma + iR$ et $R' = \sqrt{R^2 + \sigma^2} = |\sigma + iR|$. Intéressons-nous à la deuxième intégrale.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} R' i e^{i\theta} g(R' e^{i\theta}) d\theta \right| &\leq \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} |R' g(R' e^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{R'}{|(R' e^{i\theta} + 1)(R' e^{i\theta} - 2)|} e^{R' t \cos(\theta)} d\theta \\ &\leq \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{1}{(R' - 2)^2} e^{R' t \cos(\alpha)} d\theta \end{aligned}$$

car $\cos$ est décroissante de α à π puis croissante de π à $2\pi - \alpha$ et $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha) = \sigma/R'$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{1}{(R' - 2)^2} e^{R' t \frac{\sigma}{R'}} d\theta \\ &\leq \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{1}{(R' - 2)^2} e^{t\sigma} d\theta \\ &\leq \frac{2(\pi - \alpha)}{(R' - 2)^2} e^{t\sigma} \end{aligned}$$

On voit bien que l'intégrale tend vers 0 quand R tend vers l'infini (car $R' = \sqrt{\sigma^2 + R^2}$ tend aussi vers $+\infty$). Donc en passant à la limite $R \rightarrow \infty$ dans 1), on voit que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zt} g(z) dz = \frac{e^{-t}}{9} + \frac{(3t-1)e^{2t}}{9}.$$

Commentaires :

Cet exercice était un peu plus difficile que les autres mais la méthode était classique. Il y a eu plusieurs problèmes.

- Déjà, pour les bornes des intégrales : sur l'arc de cercle, l'angle ne variait pas entre $\pi/3$ et $5\pi/3$, j'ai vu cette valeur sortir de nulle part plusieurs fois. La première borne est simplement l'argument du complexe $\sigma + iR$, c'est-à-dire $\arctan(R/\sigma)$. De même, la deuxième borne est $-\arctan(R/\sigma)$.
- Il ne fallait pas travailler avec la fonction $F(z)$ mais avec $g(z) = e^{zt}F(z)$, c'est celle là dont on veut calculer l'intégrale !
- Le seul point plus difficile était de montrer que l'intégrale sur l'arc de cercle tendait vers 0, le reste se faisait comme d'habitude. Il ne fallait pas majorer $|e^{t\sqrt{R^2+\sigma^2}e^{i\theta}}|$ par $e^{t\sqrt{R^2+\sigma^2}}$ car cette quantité tend vers $+\infty$ quand $R \rightarrow 0$, même quand on la multiplie par des fractions rationnelles !!!