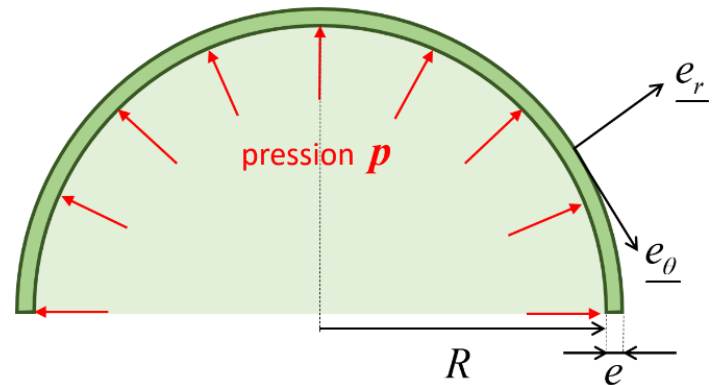


Mécanique des Milieux Continus

18 janvier 2022

2h Aucun document autorisé

La méthanisation permet de générer un biogaz à partir de la dégradation de déchets organiques, notamment les déchets agricoles. On se propose dans ce problème de mécanique d'étudier la pression maximale admissible à l'intérieur d'un méthaniseur avant rupture de la paroi déformable du toit, constitué d'une bâche d'épaisseur très fine.



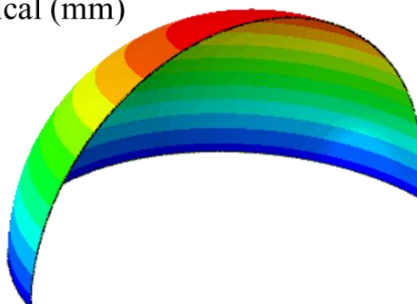
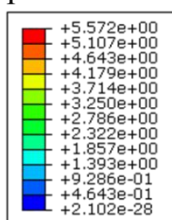
La paroi qui constitue le toit est considérée hémisphérique, d'épaisseur e négligeable devant le rayon R du méthaniseur. Elle est constituée d'une bâche considérée élastique, linéaire et isotrope. Elle est soumise à une pression p à l'intérieur du méthaniseur, et à la pression atmosphérique à l'extérieur qui est **négligée** dans toute l'étude devant p .

Remarques :

- On ne s'intéresse pas au gonflement de la bâche, qui ferait appel à des notions qui dépassent la MMC de première année. On s'intéresse donc à un état **déjà gonflé, juste avant la rupture de la bâche**
- Dans la 1^{ère} partie du problème, le problème sera formulé en **coordonnées sphériques**, mais **PAS DE PANIQUE** : aucune équation compliquée ne devra être résolue dans ce système de coordonnées !
- La bâche est constituée d'un caoutchouc considéré **incompressible**.

R et e	Rayon du méthaniseur et épaisseur de la paroi
E, ν	Paramètres élastiques de la paroi
$\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi$	Vecteurs de base dans le système de coordonnées sphériques
p	Pression à l'intérieur du méthaniseur
λ	Dilatation dans la paroi

Déplacement vertical (mm)



Ci-contre : exemple de simulation du champ de déplacement dans la bâche sous pression

(résultats dans un repère cartésien ici)

Partie 1 : forme générale du tenseur des contraintes (/10)

En raison des symétries du problème selon les deux angles θ et φ , on considère que le problème dépend uniquement du rayon, et notamment la contrainte : $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(r)$.

En coordonnées sphériques, la forme générale du tenseur des contraintes est :

$$\underline{\underline{\sigma}}(r) = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r) & \sigma_{r\theta}(r) & \sigma_{r\varphi}(r) \\ & \sigma_{\theta\theta}(r) & \sigma_{\theta\varphi}(r) \\ \text{sym} & & \sigma_{\varphi\varphi}(r) \end{pmatrix}$$

1. Ecrire la condition à la limite sur la face interne de la paroi, en $r=R$ (/1)

2. Ecrire la condition à la limite sur la face externe de la paroi, en $r=R+e$ (/1)

3. D'après ce qui précède, justifier qu'on puisse écrire : $\sigma_{r\theta} = 0$, $\sigma_{r\varphi} = 0$, $-p \leq \sigma_{rr} \leq 0$ (/1)

4. Justifier que l'équation d'équilibre puisse se réduire à $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$ pour ce problème (/1)

L'écriture de l'équation d'équilibre en coordonnées sphériques vous est (gracieusement) épargnée. En l'écrivant, on arriverait notamment aux résultats suivants :

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{\varphi\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow [\underline{\sigma}] = \begin{pmatrix} -p \leq \sigma_{rr} \leq 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

De plus, en écrivant l'équilibre entre efforts intérieurs et efforts extérieurs pour la paroi (comme dans le TD3), on montrerait rapidement que l'on a : $\sigma_{\theta\theta} = \frac{pR}{2e}$.

5. A partir de ces considérations et en vertu du fait que $R \gg e$, montrer qu'il est possible de considérer que la paroi se trouve dans un état de traction biaxiale. (/1)

6. Montrer que l'état de contraintes dans la bête s'écrit dans la base principale :

$$\underline{\sigma} = \frac{pR}{2e} (\underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II}) \quad (/1)$$

7. Dans cette base principale, à quoi correspond alors la direction principale $\underline{e}_{III}$? (/1)

8. En se servant de la loi de comportement élastique linéaire isotrope, exprimer l'état de déformations dans la bête en fonction des paramètres du matériau (/2)

9. Montrer que le tenseur des déformations linéarisé s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \sigma_I \left[\left(\frac{1-\nu}{E} \right) (\underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II}) - 2 \frac{\nu}{E} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III} \right]$$

Rappeler la signification physique des paramètres matériau bien connus E et ν (/1)

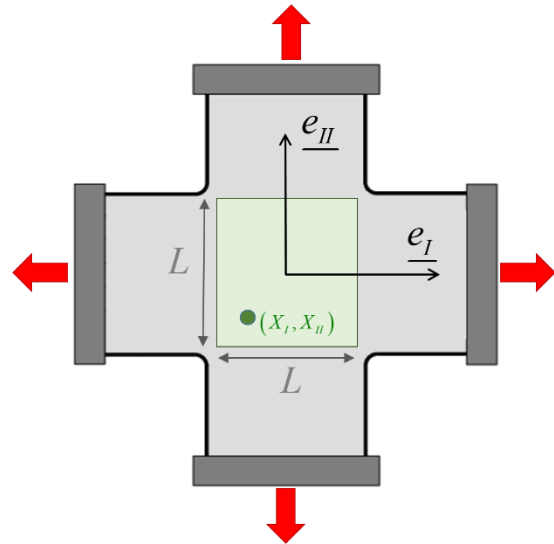
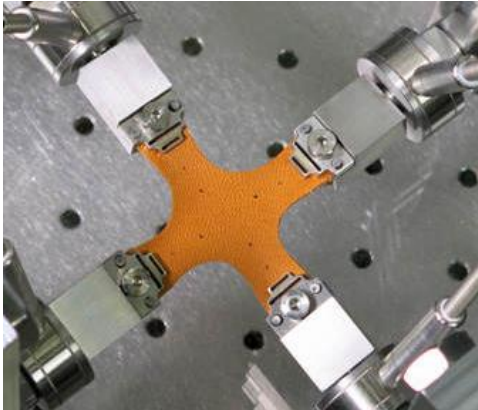
Partie 2 : étude de la paroi en traction biaxiale (/10)

Dans la suite, on se place dans la base principale $(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})$ liée à la paroi du méthaneiseur.

Afin de tester les propriétés de la bâche, on s'intéresse donc à tester un échantillon en traction biaxiale. L'essai réalisé (figure ci-dessous) est tel qu'on ait la transformation :

$$x_I = \lambda X_I \quad x_{II} = \lambda X_{II} \quad x_{III} = \alpha X_{III} \quad \text{dans la partie utile de largeur } L \text{ (en vert)}$$

$\lambda \geq 1$ est la dilatation dans les directions $\underline{e}_I$ et $\underline{e}_{II}$ (égales dans le cas de la traction **équi**biaxiale), tandis que la dilatation dans la direction normale $\underline{e}_{III}$ reste à déterminer.



Remarque : on se place désormais en coordonnées cartésiennes dans $(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})$!

10. Calculer le tenseur gradient de la transformation pour une telle transformation (/1)

11. Le matériau constitutif de la bâche est incompressible. Que vaut α ? (/1)

12. Déterminer le champ de déplacements au sein de la partie utile de l'échantillon (/1)

13. En déduire le champ de déformations au sein de la partie utile de l'échantillon en faisant l'hypothèse des petites perturbations (/2)

14. Discuter de la cohérence physique des composantes du tenseur des déformations (/1)

15. A partir de la partie précédente, établir une relation entre la pression p , les paramètres géométriques e et R , la dilatation λ et les propriétés du matériau. (/1)

16. Vérifier la cohérence entre les unités dans la relation obtenue précédemment (/1)

17. En effectuant l'essai de traction biaxiale, on constate une rupture de la bâche pour $\lambda = 1.1$. Application numérique (sans calculatrice !) : pour une bâche d'épaisseur 1cm constituée d'un matériau dont le module d'Young est 5GPa, et pour un méthaniseur d'un rayon de 1m, quelle sera la pression autorisée (en bars) au sein du méthaniseur ? (/1)

18. Peut-on utiliser l'équation de Navier-Stokes pour modéliser le flux du biogaz à l'intérieur du méthaniseur ? Pourquoi ? (/1)

Formulaire

Tenseur des déformations linéarisé : $\frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$

Tenseur taux de déformation : $\frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}} \underline{v} + (\underline{\underline{grad}} \underline{v})^T)$

Tenseur gradient de la transformation : $\underline{\underline{Grad}} \underline{x} = \underline{\underline{Grad}} \underline{u} + \underline{I}$

Gradient d'un champ de vecteurs : $\underline{\underline{Grad}} \underline{T} = \frac{\partial T_i}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

Loi de Hooke :
$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = (\lambda \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{I} \end{cases}$$

Comportement du fluide newtonien : $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{I} + 2\eta \underline{\underline{d}}$

Equation de Navier-Stokes : $\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{grad}}(p) + \eta \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$