

ENRS8AB : Éléments de base du génie électrique

S. Dufour

2A - Département Energie - Année 2024/2025



Sommaire

1	Circuits électriques triphasés équilibrés	3
1.1	Système triphasé côté source	3
1.2	Les connexions en triphasé	7
1.3	Calcul des puissances sur trois charges monophasées identiques	12
1.4	Calcul des puissances sur trois charges monophasées différentes	16
1.5	Exercices	19

Introduction et plan de l'enseignement

Le propos de l'enseignement est de décrire l'essentiel de ce qu'il faut savoir des différents objets du génie électrique ainsi que de leurs connexions en vue d'utilisations usuelles. Ce polycopié a été élaboré par G. Vinsard et S. Dufour spécifiquement pour dans ce but.

Il y a sept séances école et une séance de travaux pratiques, correspondant à

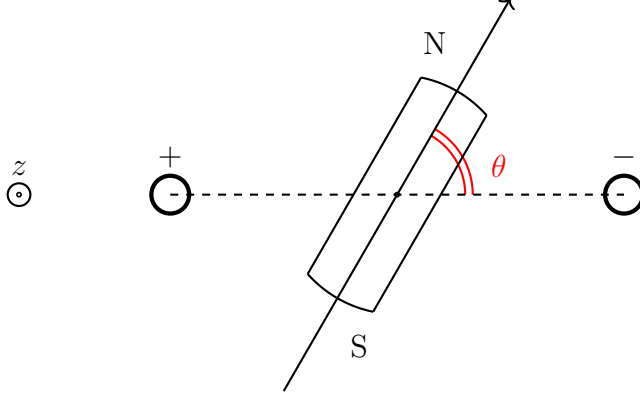
1. les circuits électriques monophasés ; le couplage inductif ;
2. les circuits électriques triphasés équilibrés ;
3. la production, le transport et la consommation d'énergie électrique (modèles de réseaux électriques) ;
4. la transformation de l'énergie électrique (convertisseurs statiques : transformateurs et dispositifs électroniques) ;
5. la machine asynchrone (son fonctionnement du point de vue de l'utilisateur) ;
6. l'alternateur synchrone ;
7. une séance de démonstration (à l'ENSEM) où les objets et leur fonctionnement seront montrés ;

1 Circuits électriques triphasés équilibrés

1.1 Système triphasé côté source

Le but de cette sous-section est de mettre en évidence un système triphasé élémentaire.

Soit un alternateur monophasé constitué par un aimant qui tourne autour d'un axe z et une spire rectangulaire de même axe, dont la coupe dans le plan de la feuille est représentée par la figure ci-dessous.



La spire est bobinée dans le sens $-z$ à droite et z à gauche. Le flux du à l'aimant que voit la spire est nul pour $\theta = 0 \bmod \pi$ quand l'aimant est perpendiculaire à l'axe de la spire, et est extremum quand l'aimant est parallèle à l'axe de la spire (maximum pour $\theta = \pi/2$, minimum pour $\theta = -\pi/2$). Le flux est donc une fonction 2π périodique, qui se décompose en série de Fourier sous la forme :

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{2k+1} \sqrt{2} \sin((2k+1)\theta(t)) \quad (1)$$

Pour des raisons de simplicité, on ne considère que le fondamental de la série :

$$\phi(t) = \sqrt{2}\phi \sin \theta(t) \quad (2)$$

La force électromotrice (fem) aux bornes de la spire est

$$e(t) = \sqrt{2}\phi \frac{d}{dt}(\sin \theta(t)) = \sqrt{2}\phi \cos \theta(t) \frac{d\theta}{dt} \quad (3)$$

Supposons que la vitesse de l'aimant soit constante :

$$\theta(t) = \Omega t + \theta_0 \quad (4)$$

La force électromotrice est sinusoïdale :

$$e(t) = \sqrt{2}\phi\Omega \cos(\Omega t + \theta_0) \quad (5)$$

On voit que la vitesse de l'aimant est assimilable à une pulsation électrique notée par la suite ω . Notons alors le flux et la force électromotrice sous la forme :

$$\phi(t) = \sqrt{2}\Re[-j\phi e^{j\theta_0} e^{j\omega t}] = \sqrt{2}\Re[\bar{\phi} e^{j\omega t}] \quad (6)$$

$$e(t) = \sqrt{2}\Re[j\omega \bar{\phi} e^{j\omega t}] = \sqrt{2}\Re[\bar{E} e^{j\omega t}] \quad (7)$$

En bougeant la spire d'un angle fixe, la pulsation reste la même mais il y a un déphasage de la fem par rapport à celle d'origine. Ainsi en rajoutant d'autres spires décalées par rapport à la première, on crée d'autres forces électromotrices de même pulsation déphasées par rapport à la première.

Pour créer un système triphasé, deux bobines sont ajoutées à la première. La valeur efficace des fem est identique :

$$|\overline{E}_1| = |\overline{E}_2| = |\overline{E}_3| = \phi\omega = E \quad (8)$$

Si le décalage entre les bobines est $2\pi/3$ alors la somme des fem est :

$$e1(t) + e2(t) + e3(t) = \sqrt{2}E \left\{ \cos(\omega t + \theta_0) + \cos(\omega t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3}) + \cos(\omega t + \theta_0 + \frac{4\pi}{3}) \right\} \quad (9)$$

soit :

$$\begin{aligned} e1(t) + e2(t) + e3(t) &= \sqrt{2}E \left\{ \cos(\omega t + \theta_0) \left(1 + \cos(\frac{2\pi}{3}) + \cos(\frac{4\pi}{3}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \sin(\omega t + \theta_0) \left(\sin(\frac{2\pi}{3}) + \sin(\frac{4\pi}{3}) \right) \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

La somme des fem est donc nulle dans le temps.

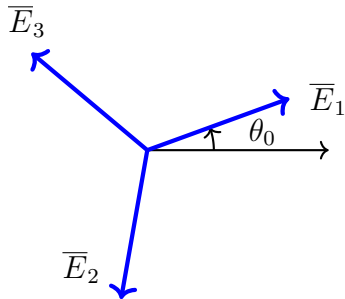
Pour manipuler les grandeurs complexes, il est intéressant de poser $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$

Système direct

$$e_1(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$e_2(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \theta_0 - 2\pi/3)$$

$$e_3(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \theta_0 + 2\pi/3)$$



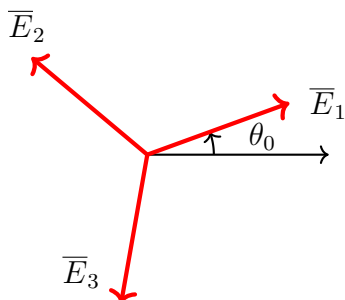
$$\begin{bmatrix} \overline{E}_1 \\ \overline{E}_2 \\ \overline{E}_3 \end{bmatrix} = \overline{E}_d \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} = \overline{E}_d \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} \quad \overline{E}_d = E e^{j\theta_0}$$

Système inverse

$$e_1(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$e_2(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \theta_0 + 2\pi/3)$$

$$e_3(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \theta_0 - 2\pi/3)$$



$$\begin{bmatrix} \overline{E}_1 \\ \overline{E}_2 \\ \overline{E}_3 \end{bmatrix} = \overline{E}_i \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} = \overline{E}_i \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} \quad \overline{E}_i = E e^{j\theta_0}$$

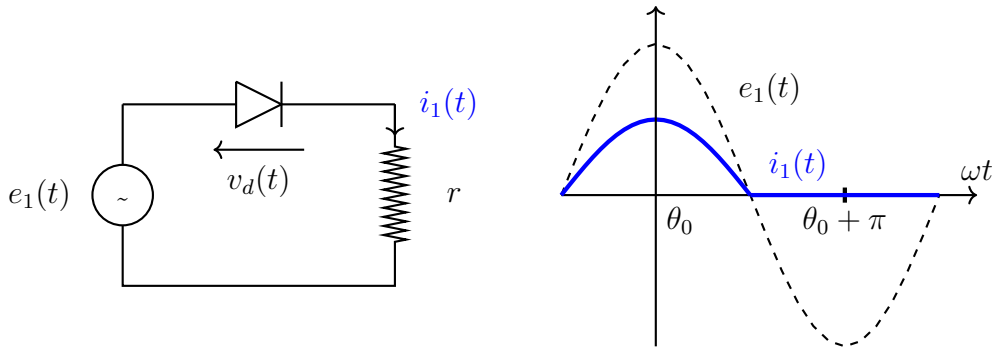
Détermination du sens de rotation des phases

Le sens de rotation des phases doit être explicité : il est par convention dit direct pour un déphasage entre 1 et 2 de $4\pi/3$ (2 et 3, 3 et 1) et inverse pour un déphasage entre 1 et 2 de $2\pi/3$ (2 et 3, 3 et 1).

Alimentons avec la phase 1 une lampe (modélisée par une résistance r) couplée avec une diode. Les équations sont :

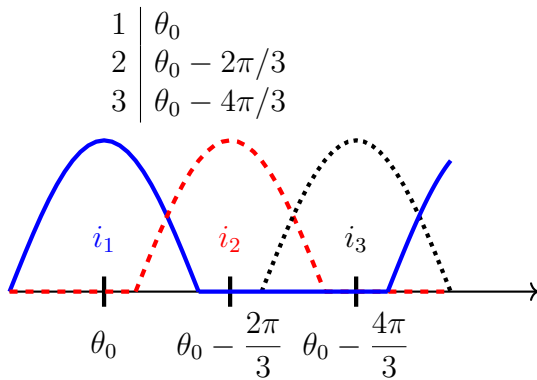
$$\begin{aligned} e_1(t) &= ri_1(t) + v_d(t) \\ i_1(t) &\geq 0 \end{aligned}$$

où v_d désigne la tension aux bornes de la diode et i_1 le courant dans la résistance.

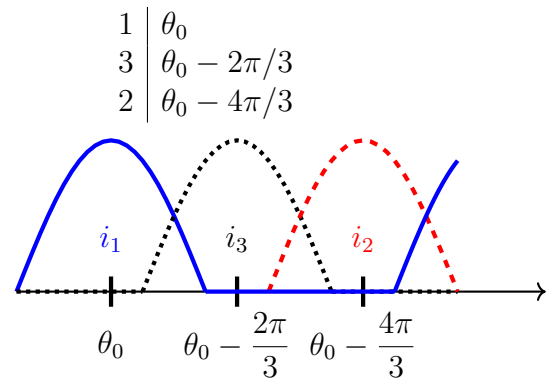


La diode ne laisse passer le courant que dans le sens positif, ainsi la lampe ne s'allume que pour l'alternance positive de e_1 . On suppose que la pulsation ω est faible de manière à voir les allumages et extinctions. L'éclat de la lampe est le plus net autour de θ_0 (valeur maximum de courant) ce qui permet de visualiser la phase de e_1 .

Système direct
ordre d'alimentation (modulo 2π)



Système inverse
ordre d'alimentation (modulo 2π)



Ainsi dans le sens direct, l'allumage des lampes est dans l'ordre 1, 2, 3, alors que dans le sens inverse 1, 3, 2.

En inversant la rotation de l'aimant on passe d'un système direct à un système inverse. Ainsi pour déterminer de manière pratique le sens d'un système de tensions, on met aux bornes un petit moteur. Suivant le sens de rotation, le système sera reconnu comme direct ou inverse.

Puissance instantanée

Prenons un système de fem (e_1, e_2, e_3) triphasé équilibré direct, dont chaque phase sert à alimenter une charge identique z .

$$\begin{cases} e_1(t) = \sqrt{2}\Re e \left[\bar{E}_1 e^{j\omega t} \right] \\ e_2(t) = \sqrt{2}\Re e \left[\bar{E}_2 e^{j\omega t} \right] \\ e_3(t) = \sqrt{2}\Re e \left[\bar{E}_3 e^{j\omega t} \right] \end{cases} \quad (11)$$

avec

$$\bar{E}_2 = a^2 \bar{E}_1 \quad \bar{E}_3 = a \bar{E}_1 \quad (12)$$

où $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$. Les trois courants sont alors

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \sqrt{2}\Re e \left[\bar{I}_1 e^{j\omega t} \right] = \sqrt{2}\Re e \left[\frac{\bar{E}_1}{z} e^{j\omega t} \right] \\ i_2(t) &= \sqrt{2}\Re e \left[\bar{I}_2 e^{j\omega t} \right] = \sqrt{2}\Re e \left[\frac{\bar{E}_2}{z} e^{j\omega t} \right] \\ &= \sqrt{2}\Re e \left[a^2 \bar{I}_1 e^{j\omega t} \right] \\ i_3(t) &= \sqrt{2}\Re e \left[\bar{I}_3 e^{j\omega t} \right] = \sqrt{2}\Re e \left[\frac{\bar{E}_3}{z} e^{j\omega t} \right] \\ &= \sqrt{2}\Re e \left[a \bar{I}_1 e^{j\omega t} \right] \end{aligned}$$

Le système des trois courants est également direct.

La puissance instantanée est :

$$\begin{aligned} e_1(t)i_1(t) &= \frac{1}{2} \left[\bar{E}_1 \bar{I}_1^* + \bar{E}_1^* \bar{I}_1 \right] + \frac{1}{2} \left[\bar{E}_1 \bar{I}_1 e^{2j\omega t} + (\bar{E}_1^* \bar{I}_1^*) e^{-2j\omega t} \right] \\ +e_2(t)i_2(t) &+ \frac{1}{2} \left[\bar{E}_2 \bar{I}_2^* + \bar{E}_2^* \bar{I}_2 \right] + \frac{1}{2} \left[\bar{E}_2 \bar{I}_2 e^{2j\omega t} + (\bar{E}_2^* \bar{I}_2^*) e^{-2j\omega t} \right] \\ +e_3(t)i_3(t) &+ \frac{1}{2} \left[\bar{E}_3 \bar{I}_3^* + \bar{E}_3^* \bar{I}_3 \right] + \frac{1}{2} \left[\bar{E}_3 \bar{I}_3 e^{2j\omega t} + (\bar{E}_3^* \bar{I}_3^*) e^{-2j\omega t} \right] \end{aligned}$$

Dans la puissance instantanée de chaque phase, il y a une partie moyenne (la puissance active) et une partie fluctuante de pulsation 2ω :

$$\begin{aligned} e_1(t)i_1(t) &= \Re e \left[\bar{E}_1 \bar{I}_1^* \right] + \Re e \left[\bar{E}_1 \bar{I}_1 e^{2j\omega t} \right] \\ +e_2(t)i_2(t) &+ \Re e \left[a^2 \bar{E}_1 (a^2 \bar{I}_1)^* \right] + \Re e \left[\bar{E}_1 \bar{I}_1 a e^{2j\omega t} \right] \\ +e_3(t)i_3(t) &+ \Re e \left[a \bar{E}_1 (a \bar{I}_1)^* \right] + \Re e \left[\bar{E}_1 \bar{I}_1 a^2 e^{2j\omega t} \right] \end{aligned}$$

La puissance active sur chaque phase est identique :

$$\begin{aligned} e_1(t)i_1(t) &= \Re e \left[\bar{E}_1 \bar{I}_1^* \right] + \Re e \left[\bar{E}_1 \bar{I}_1 e^{2j\omega t} \right] \\ +e_2(t)i_2(t) &+ \Re e \left[\bar{E}_1 \bar{I}_1^* \right] + \Re e \left[\bar{E}_1 \bar{I}_1 a e^{2j\omega t} \right] \\ +e_3(t)i_3(t) &+ \Re e \left[\bar{E}_1 \bar{I}_1^* \right] + \Re e \left[\bar{E}_1 \bar{I}_1 a^2 e^{2j\omega t} \right] \end{aligned}$$

et la somme des puissances fluctuantes est nulle :

$$e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t) = 3 \Re e \left[\bar{E}_1 \bar{I}_1^* \right] \quad (13)$$

Ainsi un alternateur triphasé fournit une puissance électrique instantanée constante dans le temps.

La même démonstration peut être faite avec un système inverse.

1.2 Les connexions en triphasé

Pour le transport de l'électricité en triphasé il faut *a priori* 6 fils qui permettent de connecter les 6 bornes des trois phases de la source aux 6 bornes des trois phases de la charge. Pour diminuer les fils de transport, les couplages au niveau des sources et des charges sont envisagés.

Couplage étoile des sources

On connecte ensemble 3 des 6 bornes du côté source, ayant la **même nature** (+ ou -).

La représentation complexe des 3 f.e.m. $[e_1, e_2, e_3]$ justifie l'appellation de "couplage étoile des sources" (Fig. 1).

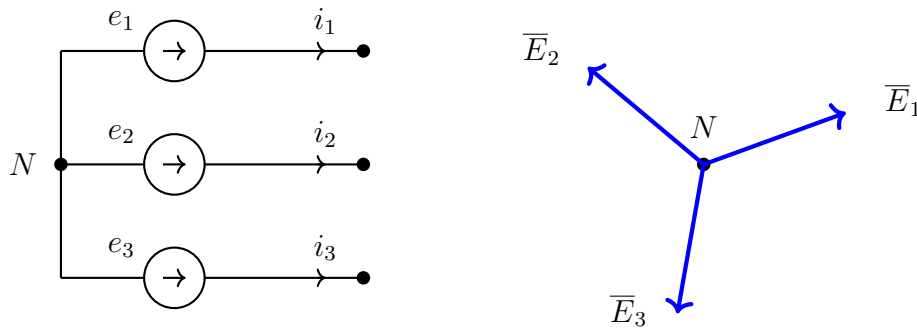


FIGURE 1 – Couplage étoile des sources

La représentation complexe des 3 f.e.m. $[e_1, e_2, e_3]$ justifie l'appellation de "couplage étoile des sources" (Fig. 1).

Couplage étoile de la charge

On dispose aussi de six bornes pour la charge. On relie trois des six bornes en un point pour former le neutre.

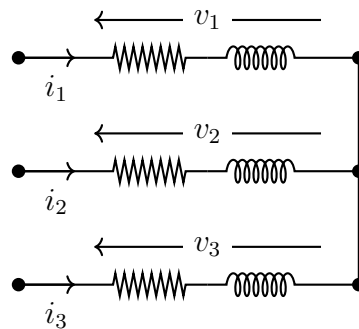


FIGURE 2 – Couplage étoile de la charge

$\Rightarrow$ Quelle que soit la nature de la charge couplée en étoile (équilibrée ou non), la somme des 3 valeurs instantanées des courants (i_1, i_2, i_3) est nulle : $i_1 + i_2 + i_3 = 0$

Dans le cas d'une charge équilibrée (de même impédance Z par phase), alimentée par un système direct de tensions, on a :

$$\bar{V}_d = Z\bar{I}_d$$

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \end{pmatrix} = \bar{V}_d \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = Z\bar{I}_d \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{pmatrix}$$

Tout se passe comme si l'on avait **effectivement 3 impédances Z couplées en étoile**.

$\Rightarrow$ Le couplage étoile est celui qui correspond le plus directement au schéma monophasé équivalent.

Les tensions de ligne Sur la ligne, les trois points 1 2 3 sont accessibles. On définit comme tensions composées ou tensions de lignes les trois tensions :

$$\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 - v_3 \\ v_3 - v_1 \end{pmatrix}$$

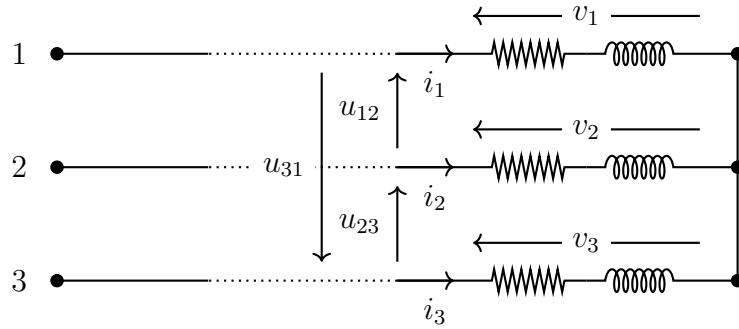


FIGURE 3 – Tensions composées

$\Rightarrow$ La somme des 3 valeurs instantanées des tensions composées (u_{12}, u_{23}, u_{31}) est nulle : $u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0$

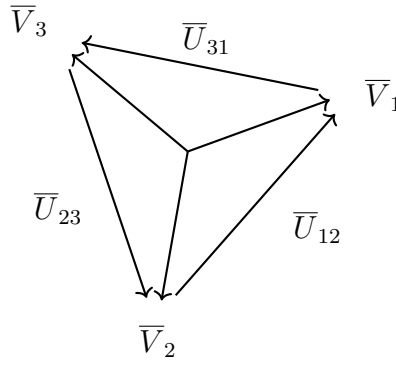
$$\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = [C] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Dans le cas général on ne peut obtenir les tensions de phases en fonction des tensions de lignes : $[C]$ n'est pas inversible. Ses valeurs propres sont 0, $(3 + j\sqrt{3})/2$ et $(3 - j\sqrt{3})/2$: $[C]$ devient donc inversible si on connaît une relation sur les tensions de phases. Par exemple dans le cas où $v_1 + v_2 + v_3 = 0$, alors

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{{}^t[C]}{3} \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{31} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Si les tensions de phases constituent un système direct :

$$[\bar{V}] = \bar{V}_d \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \bar{U}_{12} \\ \bar{U}_{23} \\ \bar{U}_{31} \end{bmatrix} = [\bar{U}] = [C][\bar{V}] = (1 - a^2)\bar{V}_d \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix}$$

mais $1 - a^2 = -j\sqrt{3}a = \sqrt{3}e^{j\pi/6}$

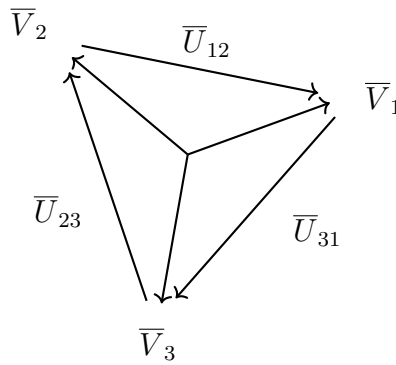
donc : $[\bar{U}] = \bar{U}_d \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix}$

avec $\bar{U}_d = \sqrt{3}e^{j\pi/6}\bar{V}_d$

Les tensions entre phases constituent donc elles aussi un système direct.

$\Rightarrow$ Si les tensions de phases constituent un système inverse :

$$[\bar{V}] = \bar{V}_i \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$$



$$[\bar{U}] = [C][\bar{V}] = (1 - a)\bar{V}_i \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$$

mais $1 - a = j\sqrt{3}a^2 = \sqrt{3}e^{-j\pi/6}$

donc : $[\bar{U}] = \bar{U}_i \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$

$$\text{avec } \bar{U}_i = \sqrt{3} e^{-j\pi/6} \bar{V}_i$$

Les tensions entre phases constituent donc elles aussi un système inverse.

Couplage triangle de la charge

Les 3 conducteurs sont branchés sur les **entrées** des 3 phases, on connecte par ailleurs la **sortie** d'une phase à l'**entrée** de la phase suivante (Fig. 4).

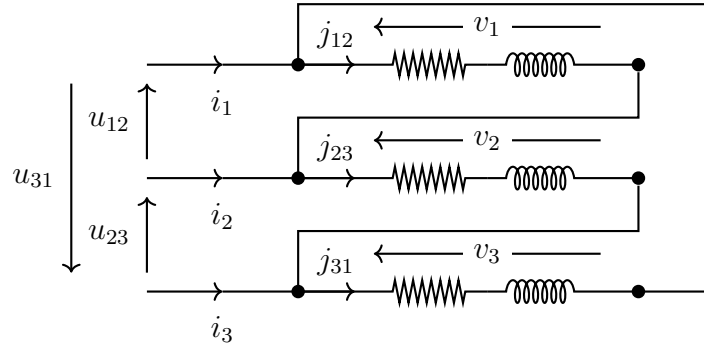


FIGURE 4 – Couplage triangle de la charge

j_{12} est le courant de 1 vers 2 qui a traversé la phase (1)

j_{23} est le courant de 2 vers 3 qui a traversé la phase (2)

j_{31} est le courant de 3 vers 1 qui a traversé la phase (3)

Les j sont appelés courants de phase.

Dans le cas du couplage en triangle :

$$\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ La somme des 3 tensions de phase (v_1, v_2, v_3) est nulle : $v_1 + v_2 + v_3 = 0$

Courants de lignes Les courants (i_1, i_2, i_3) sont appelés courants de lignes. Pour un couplage en triangle on a :

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{12} - j_{31} \\ j_{23} - j_{12} \\ j_{31} - j_{23} \end{pmatrix} = {}^t[C] \begin{pmatrix} j_{12} \\ j_{23} \\ j_{31} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Dans le cas général on ne peut obtenir les courants de phase en fonction des courants de ligne : ${}^t[C]$ n'est pas inversible. Ses valeurs propres sont 0, $(3 + j\sqrt{3})/2$ et $(3 - j\sqrt{3})/2$: ${}^t[C]$ devient donc inversible si on connaît une relation sur les courants de phase. Par exemple dans le cas où $j_{12} + j_{23} + j_{31} = 0$, alors

$$\begin{pmatrix} j_{12} \\ j_{23} \\ j_{31} \end{pmatrix} = \frac{[C]}{3} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Si les courants de phases constituent un système direct :

$$[\bar{J}] = \bar{J}_d \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix}$$

$$[\bar{I}] = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} = {}^t[C] \begin{bmatrix} \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{31} \end{bmatrix} = \sqrt{3} e^{-j\pi/6} \bar{J}_d \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix}$$

alors les courants de ligne forment aussi un système direct.

$\Rightarrow$ Si les courants de phases constituent un système indirect :

$$[\bar{J}] = \bar{J}_i \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{I}] = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} = {}^t[C] \begin{bmatrix} \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{31} \end{bmatrix} = \sqrt{3} e^{j\pi/6} \bar{J}_i \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix}$$

alors les courants de ligne forment aussi un système indirect.

Couplage triangle des sources

Les tensions de lignes sont égales aux fem des sources :

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{31} \end{pmatrix} \quad (14)$$

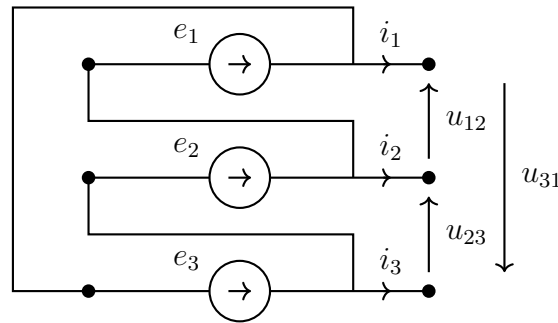


FIGURE 5 – Couplage triangle des sources

Synthèse des couplages étoile et triangle Pour résumer les propriétés des différents couplages : $[v]$ et $[j]$ désignent les tensions et courants de phase, $[u]$ et $[i]$ les tensions et

courants de ligne.

Couplage étoile

$$[u] = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = [C][v]$$

$$[i] = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{12} \\ j_{23} \\ j_{31} \end{pmatrix} = [j]$$

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Couplage triangle

$$[u] = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = [v]$$

$$[i] = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} \\ j_{23} \\ j_{31} \end{pmatrix} = {}^t[C][j]$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

Dans le cas de systèmes triphasés équilibrés, si φ désigne le déphasage entre tension et courant de phase : $U = |\bar{U}_d|$, $I = |\bar{I}_d|$, $V = |\bar{V}_d|$, $J = |\bar{J}_d|$:

Couplage étoile

$$P = 3VJ \cos \varphi$$

$$U = V$$

$$I = \sqrt{3}J$$

$$P = \sqrt{3}UI \cos \varphi$$

Couplage triangle

$$P = 3VJ \cos \varphi$$

$$U = \sqrt{3}V$$

$$I = J$$

$$P = \sqrt{3}UI \cos \varphi$$

Ainsi, on peut effectuer les mêmes mesures sur la ligne ou directement sur les phases dans le cas des systèmes triphasés équilibrés.

1.3 Calcul des puissances sur trois charges monophasées identiques

La charge triphasé est composée de trois charges monophasées identiques d'impédance Z . Les relations entre tensions et courants de phase sont :

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{31} \end{pmatrix} \quad (15)$$

L'alimentation en tension côté source est un système direct :

$$\begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} = \Re e \left[\bar{E}_d \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} \exp j\omega t \right] \quad (16)$$

Les puissances seront les mêmes sur chaque phase, aussi un tel montage est qualifié d'équilibré.

$\Rightarrow$ Source étoile - charge étoile (Fig. 6)

La tension entre les points neutres N et N' s'exprime comme :

$$\begin{aligned} \bar{V}_{NN'} &= \bar{E}_1 - \bar{V}_1 \\ &= \bar{E}_2 - \bar{V}_2 \\ &= \bar{E}_3 - \bar{V}_3 \end{aligned} \quad (17)$$

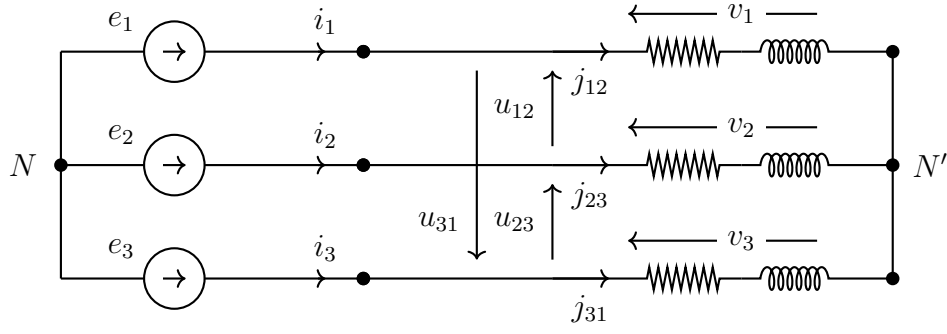


FIGURE 6 – Source étoile - charge étoile

d'où en sommant :

$$3\bar{V}_{NN'} = (\bar{E}_1 - \bar{V}_1) + (\bar{E}_2 - \bar{V}_2) + (\bar{E}_3 - \bar{V}_3) \quad (18)$$

Etant donné que le système de fem est équilibré direct :

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0 \quad (19)$$

De plus, du fait de l'étoile,

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \quad (20)$$

Les deux points neutres étant au même potentiel on a donc :

$$\begin{pmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{pmatrix} \quad (21)$$

La puissance apparente est :

$$\bar{S} = \bar{V}_1 \bar{J}_{12}^* + \bar{V}_2 \bar{J}_{23}^* + \bar{V}_3 \bar{J}_{31}^* = \bar{E}_1 \left(\frac{\bar{E}_1}{Z} \right)^* + \bar{E}_2 \left(\frac{\bar{E}_2}{Z} \right)^* + \bar{E}_3 \left(\frac{\bar{E}_3}{Z} \right)^* = 3 \frac{|\bar{E}_d|^2}{Z^*} \quad (22)$$

$\Rightarrow$ Source étoile - charge triangle (Fig. 7)

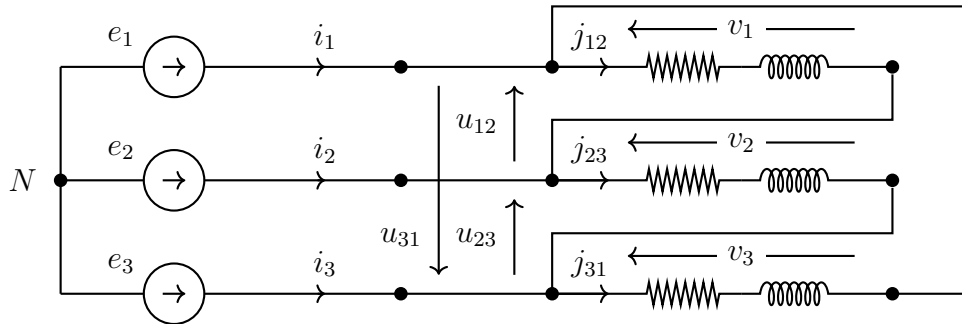


FIGURE 7 – Source étoile - charge triangle

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_{12} \\ \bar{U}_{23} \\ \bar{U}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{E}_1 - \bar{E}_2 \\ \bar{E}_2 - \bar{E}_3 \\ \bar{E}_3 - \bar{E}_1 \end{pmatrix} = \bar{E}_d(1 - a^2) \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{31} \end{pmatrix} \quad (23)$$

La puissance apparente est :

$$\begin{aligned}
 \bar{S} &= \bar{V}_1 \bar{J}_{12}^* + \bar{V}_2 \bar{J}_{23}^* + \bar{V}_3 \bar{J}_{31}^* \\
 &= (1 - a^2) \bar{E}_1 \left((1 - a^2) \frac{\bar{E}_1}{Z} \right)^* \\
 &\quad + (1 - a^2) \bar{E}_2 \left((1 - a^2) \frac{\bar{E}_2}{Z} \right)^* \\
 &\quad + (1 - a^2) \bar{E}_3 \left((1 - a^2) \frac{\bar{E}_3}{Z} \right)^* \\
 &= 9 \frac{|\bar{E}_d|^2}{Z^*}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Ainsi on remarque que pour une même charge d'impédance Z , la puissance apparente est multipliée par 3 par rapport au couplage en étoile. Ainsi on peut passer d'une charge équilibrée en triangle à une charge en étoile :

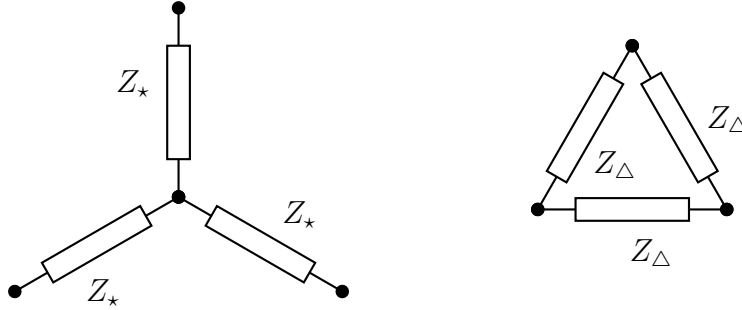


FIGURE 8 – Reconnection étoile - triangle

On trouve ainsi :

$$Z_{\Delta} = 3 Z_{\star}$$

$\Rightarrow$ Source triangle - charge triangle (Fig. 9)

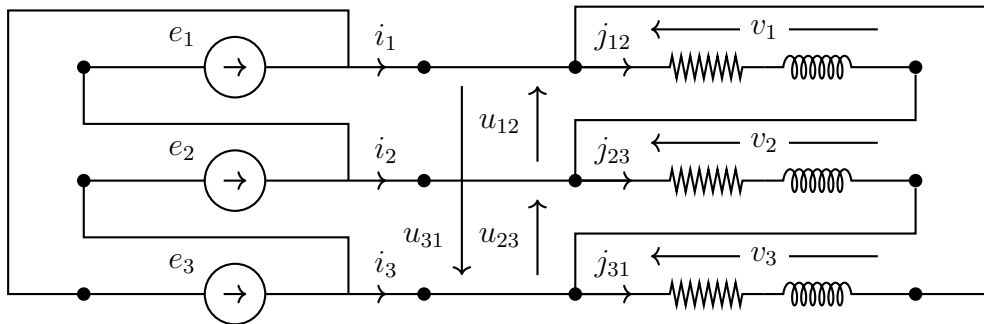


FIGURE 9 – Source triangle - charge triangle

$$\begin{pmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{pmatrix} = \bar{E}_d \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \end{pmatrix} \tag{25}$$

La puissance apparente est :

$$\bar{S} = \bar{V}_1 \bar{J}_{12}^* + \bar{V}_2 \bar{J}_{23}^* + \bar{V}_3 \bar{J}_{31}^* \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{E}_1 \left(\frac{\bar{E}_1}{Z} \right)^* + \bar{E}_2 \left(\frac{\bar{E}_2}{Z} \right)^* + \bar{E}_3 \left(\frac{\bar{E}_3}{Z} \right)^* \\
&= 3 \frac{|\bar{E}_d|^2}{Z^*}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Source triangle - charge étoile (Fig. 10)

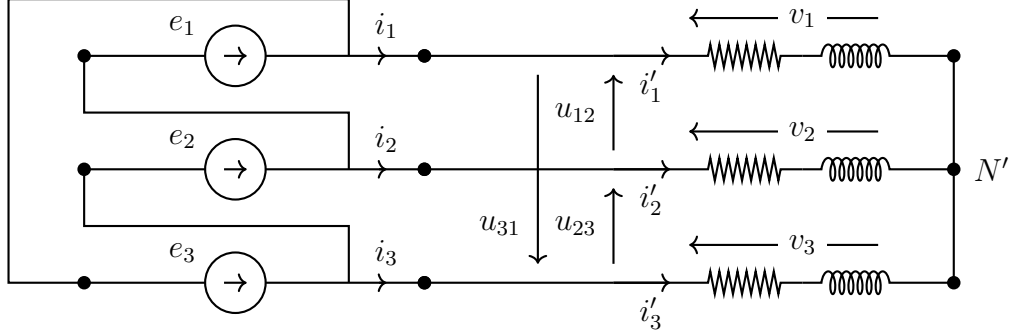


FIGURE 10 – Source triangle - charge étoile

$$\begin{pmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{pmatrix} = \bar{E}_d \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{U}_{12} \\ \bar{U}_{23} \\ \bar{U}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_1 - \bar{V}_2 \\ \bar{V}_2 - \bar{V}_3 \\ \bar{V}_3 - \bar{V}_1 \end{pmatrix} = (1 - a^2) \begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \end{pmatrix} \quad (27)$$

La puissance apparente est :

$$\begin{aligned}
\bar{S} &= \bar{V}_1 \bar{J}_{12}^* + \bar{V}_2 \bar{J}_{23}^* + \bar{V}_3 \bar{J}_{31}^* \\
&= \frac{\bar{E}_1}{(1 - a^2)} \left(\frac{\bar{E}_1}{(1 - a^2)Z} \right)^* \\
&\quad + \frac{\bar{E}_2}{(1 - a^2)} \left(\frac{\bar{E}_2}{(1 - a^2)Z} \right)^* \\
&\quad + \frac{\bar{E}_3}{(1 - a^2)} \left(\frac{\bar{E}_3}{(1 - a^2)Z} \right)^* \\
&= \frac{|\bar{E}_d|^2}{Z^*}
\end{aligned} \quad (28)$$

Ce résultat se déduit du précédent par la transformation de la charge en étoile en son équivalent triangle : $Z^* = Z_\Delta/3$. Les puissances sont divisées par 9 par rapport au cas précédent.

$\Rightarrow$ Source étoile - charge étoile avec neutres connectés (Fig. 11)

En raccordant les neutres de la source et de la charge, on annule la tension entre neutres $v_{NN'}$:

$$3\bar{V}_{NN'} = (\bar{E}_1 - \bar{V}_1) + (\bar{E}_2 - \bar{V}_2) + (\bar{E}_3 - \bar{V}_3) \quad (29)$$

$$= (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3) - Z(\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3) \quad (30)$$

$$= 0 \quad (31)$$

Comme la source est un système équilibré direct : $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$.

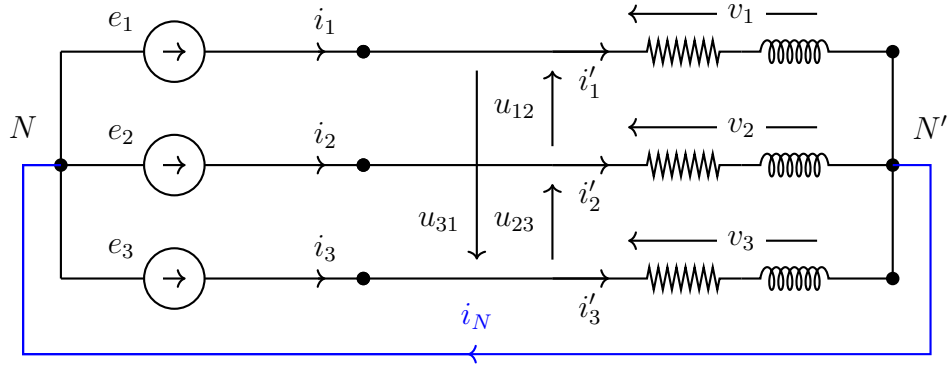


FIGURE 11 – Source étoile - charge étoile avec neutres connectés

On obtient donc que le courant circulant dans le fil de neutre est :

$$I_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \quad (32)$$

Pour une charge avec trois impédances identiques, le courant de neutre est nul. Les calculs de puissances sont les mêmes que si les neutres n'étaient pas connectés : La puissance apparente est :

$$\bar{S} = \bar{V}_1 \bar{J}_{12}^* + \bar{V}_2 \bar{J}_{23}^* + \bar{V}_3 \bar{J}_{31}^* = 3 \frac{|\bar{E}_d|^2}{Z^*} \quad (33)$$

1.4 Calcul des puissances sur trois charges monophasées différentes

L'alimentation en tension côté source est un système direct :

$$\begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} = \Re e \left[\bar{E}_d \exp j\omega t \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} \right] \quad (34)$$

La matrice impédance $[Z]$ est diagonale, et la relation entre tensions et courants de phase est du type :

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{31} \end{pmatrix} \quad (35)$$

Les puissances ne sont plus les mêmes sur les trois phases, le régime est dit déséquilibré.

$\Rightarrow$ Source étoile - charge étoile (Fig. 6)

On écrit les lois des mailles :

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 - \bar{E}_2 &= \bar{V}_1 - \bar{V}_2 = \bar{U}_{12} \\ \bar{E}_2 - \bar{E}_3 &= \bar{V}_2 - \bar{V}_3 = \bar{U}_{23} \\ \bar{E}_3 - \bar{E}_1 &= \bar{V}_3 - \bar{V}_1 = \bar{U}_{31} \end{aligned} \quad (36)$$

On déduit donc :

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_{12} \\ \bar{U}_{23} \\ \bar{U}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 & -Z_2 & 0 \\ 0 & Z_2 & -Z_3 \\ -Z_1 & 0 & Z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{31} \end{pmatrix} \quad (37)$$

En considérant que $\bar{J}_{12} + \bar{J}_{23} + \bar{J}_{31} = 0$:

$$\begin{pmatrix} \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{31} \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} \begin{pmatrix} Z_3 & 0 & -Z_2 \\ -Z_3 & Z_1 & 0 \\ 0 & -Z_1 & Z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_{12} \\ \bar{U}_{23} \\ \bar{U}_{31} \end{pmatrix} \quad (38)$$

donc en fonction des fem :

$$\begin{pmatrix} \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{31} \end{pmatrix} = \frac{\bar{E}_d(1-a^2)}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3} \begin{pmatrix} Z_3 & 0 & -Z_2 \\ -Z_3 & Z_1 & 0 \\ 0 & -Z_1 & Z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} \quad (39)$$

La puissance apparente vue des sources sur chaque phase est :

$$\begin{cases} \bar{S}_1 = \bar{E}_1 \bar{J}_{12}^* = |\bar{E}_d|^2 (1-a) \frac{(Z_3 - aZ_2)^*}{(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)^*} \\ \bar{S}_2 = \bar{E}_2 \bar{J}_{23}^* = |\bar{E}_d|^2 (1-a) \frac{(-aZ_3 + Z_1)^*}{(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)^*} \\ \bar{S}_3 = \bar{E}_3 \bar{J}_{31}^* = |\bar{E}_d|^2 (1-a) \frac{(-aZ_1 + Z_2)^*}{(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)^*} \end{cases} \quad (40)$$

La puissance apparente totale vue des sources est :

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \bar{E}_1 \bar{J}_{12}^* + \bar{E}_2 \bar{J}_{23}^* + \bar{E}_3 \bar{J}_{31}^* \\ &= 3 |\bar{E}_d|^2 \left(\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3} \right)^* \end{aligned} \quad (41)$$

$\Rightarrow$ Source étoile - charge triangle (Fig. 7)

On écrit les lois des mailles :

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 - \bar{E}_2 &= \bar{V}_1 \\ \bar{E}_2 - \bar{E}_3 &= \bar{V}_2 \\ \bar{E}_3 - \bar{E}_1 &= \bar{V}_3 \end{aligned} \quad (42)$$

On déduit donc :

$$\bar{E}_d(1-a^2) \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \bar{J}_{12} \\ Z_2 \bar{J}_{23} \\ Z_3 \bar{J}_{31} \end{pmatrix} \quad (43)$$

La puissance apparente vue de la charge est :

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \bar{V}_1 \bar{J}_{12}^* + \bar{V}_2 \bar{J}_{23}^* + \bar{V}_3 \bar{J}_{31}^* \\ &= \bar{E}_d(1-a^2) \left(\frac{\bar{E}_d(1-a^2)}{Z_1} \right)^* + \bar{E}_d a^2(1-a^2) \left(\frac{\bar{E}_d a^2(1-a^2)}{Z_2} \right)^* + \bar{E}_d a(1-a^2) \left(\frac{\bar{E}_d a(1-a^2)}{Z_3} \right)^* \\ &= 3 |\bar{E}_d|^2 \left(\frac{1}{Z_1^*} + \frac{1}{Z_2^*} + \frac{1}{Z_3^*} \right) \end{aligned} \quad (44)$$

On en déduit le passage d'un couplage triangle à un couplage étoile dans le cas de charges déséquilibrées par :

$$\begin{cases} Z_{\Delta}^{12} = Z_{\star}^1 + Z_{\star}^2 + \frac{Z_{\star}^1 Z_{\star}^2}{Z_{\star}^3} \\ Z_{\Delta}^{23} = Z_{\star}^2 + Z_{\star}^3 + \frac{Z_{\star}^2 Z_{\star}^3}{Z_{\star}^1} \\ Z_{\Delta}^{31} = Z_{\star}^3 + Z_{\star}^1 + \frac{Z_{\star}^3 Z_{\star}^1}{Z_{\star}^2} \end{cases}$$

De même la transformation d'un couplage étoile en un triangle donne : On trouve alors :

$$\begin{cases} Z_{\star}^1 = \frac{Z_{\Delta}^{12} Z_{\Delta}^{31}}{Z_{\Delta}^{12} + Z_{\Delta}^{23} + Z_{\Delta}^{31}} \\ Z_{\star}^2 = \frac{Z_{\Delta}^{12} Z_{\Delta}^{23}}{Z_{\Delta}^{12} + Z_{\Delta}^{23} + Z_{\Delta}^{31}} \\ Z_{\star}^3 = \frac{Z_{\Delta}^{23} Z_{\Delta}^{31}}{Z_{\Delta}^{12} + Z_{\Delta}^{23} + Z_{\Delta}^{31}} \end{cases}$$

$\implies$ Source étoile - charge étoile avec neutres raccordés (Fig. 11)

En raccordant les neutres de la source et de la charge, on annule la tension entre neutres

$v_{NN'}$:

$$3\bar{V}_{NN'} = (\bar{E}_1 - \bar{V}_1) + (\bar{E}_2 - \bar{V}_2) + (\bar{E}_3 - \bar{V}_3) \quad (45)$$

$$= (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3) - (Z_1\bar{I}_1 + Z_2\bar{I}_2 + Z_3\bar{I}_3) \quad (46)$$

$$= 0 \quad (47)$$

Comme la source est un système équilibré direct : $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$.

On obtient donc :

$$Z_1\bar{I}_1 + Z_2\bar{I}_2 + Z_3\bar{I}_3 = 0 \quad (48)$$

Avec les lois des mailles on a :

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_{12} \\ \bar{U}_{23} \\ \bar{U}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 & -Z_2 & 0 \\ 0 & Z_2 & -Z_3 \\ -Z_1 & 0 & Z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{pmatrix} \quad (49)$$

On déduit donc les courants de lignes en fonction des tensions :

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & -Z_1 \\ -Z_2 & Z_2 & 0 \\ 0 & -Z_3 & Z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_{12} \\ \bar{U}_{23} \\ \bar{U}_{31} \end{pmatrix} \quad (50)$$

La puissance apparente vue des sources est :

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \bar{E}_1\bar{I}_1^* + \bar{E}_2\bar{I}_2^* + \bar{E}_3\bar{I}_3^* \\ &= |\bar{E}_d|^2 \left(\frac{1}{Z_1^*} + \frac{1}{Z_2^*} + \frac{1}{Z_3^*} \right) \end{aligned} \quad (51)$$

1.5 Exercices

1. Identification en triphasé

Sous une fréquence $f = 50 \text{ Hz}$, on impose une tension de ligne $U = 400 \text{ V}$ aux bornes d'une charge triphasée équilibrée ; le courant dans chacune des phases est $J = 10 \text{ A}$ (*courant de phase*) ; la puissance active totale mesurée est $P = 1500 \text{ W}$.

- a) La charge est composée d'une résistance r_1 en série avec une inductance l_1 placées en étoile ; trouver la valeur de r_1 et l_1 .
- b) La charge est composée d'une résistance r_2 en série avec une inductance l_2 placées en triangle ; trouver la valeur de r_2 et l_2 .
- c) La charge est composée d'une résistance r'_1 en parallèle avec une inductance l'_1 placées en étoile ; trouver la valeur de r'_1 et l'_1 .
- d) La charge est composée d'une résistance r'_2 en parallèle avec une inductance l'_2 placées en triangle ; trouver la valeur de r'_2 et l'_2 .

2. Compensation de réactif

Sous une fréquence $f = 50 \text{ Hz}$, on impose une tension de ligne $U = 400 \text{ V}$ aux bornes d'une charge triphasée équilibrée en étoile ; le courant dans chacune des phases est $J = 10 \text{ A}$ (*courant de phase*) ; la puissance active totale mesurée est $P = 1500 \text{ W}$. Pour compenser le réactif une batterie de capacités triphasée est mise en parallèle à cette charge. Le but est d'atteindre $\tan \varphi = 0.4$.

- a) Dimensionner les capacités si celles-ci sont câblées en étoile.
- b) Dimensionner les capacités si celles-ci sont câblées en triangle.
- c) Conclure.

3. Puissance en triphasé

Sous une fréquence $f = 50 \text{ Hz}$, on connecte une source triphasée de force-électromotrice triphasée $E = 230 \text{ V}$ (tension de phase) connectée en triangle. La charge triphasée est une résistance de 5Ω en série avec une réactance de 10Ω .

- a) Déterminer la puissance apparente de la charge si celle-ci est connectée en étoile.
- b) Déterminer la puissance apparente de la charge si celle-ci est connectée en triangle.

4. Mesures de puissance en triphasé

- a) Comment créer un neutre artificiel en triphasé ?
- b) Comment les puissances actives et réactives en triphasé (en régime équilibré) avec un courant de ligne et une tension de ligne ?