

Problème : groupes topologiques et uniforme continuité

1. GROUPE TOPOLOGIQUE

On donne ici des propriétés du produit de convolution dans un cadre abstrait qui a le mérite de procurer un cadre unifié pour les différentes notions de produit de convolution vues en cours.

On dit qu'un triplet $(G, +, \mathcal{T})$ est un *groupe topologique* si :

- $(G, +)$ est un groupe,
- $(G, \mathcal{T})$ est un espace topologique,
- les fonctions

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G \times G & \rightarrow & G \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & -x \end{array} \right\}$$

sont continues.

Pour résumer, on demande que les deux structures soient compatibles, à savoir que la somme et l'inverse soient continues. On suppose aussi dans le cadre de ce problème que :

- $(G, +)$ est abélien,
- $(G, \mathcal{T})$ est séparé et localement compact.

Attention : un tel espace topologique n'est pas nécessairement métrique...

L'exemple de base est $\mathbb{R}$ muni de la somme usuelle et de sa topologie usuelle.

1. Soit $x_0 \in G$. Montrez que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G \times G & \rightarrow & G \\ (x, y) & \mapsto & x - y \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & x + x_0 \end{array} \right\}$$

sont continues.

2. THÉORÈME DE HEINE

Soit $(G, +, \mathcal{T})$ un groupe topologique, supposé abélien, séparé et localement compact. Soit $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'elle est uniformément continue sur G si

$$\forall \epsilon > 0, \exists U \subset G \text{ voisinage de } 0 \text{ tel que } \forall x, y \in G, \{x - y \in U \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon\}.$$

On montre dans cette section le théorème de Heine :

Théorème 1. *Toute fonction continue sur G et à support compact est uniformément continue.*

On se donne une fonction $f \in C(G)$ à support compact.

1. Soit U un ouvert de G tel que $0 \in U$. Montrez qu'il existe $U' \subset U$ ouvert tel que $0 \in U'$ et pour tous $x, y \in U'$, alors $x + y \in U$. Montrez alors que $\overline{U'} \subset U$.

Indication : utilisez la continuité de la fonction somme $(x, y) \mapsto x + y$.

2. Soit U un ouvert de G tel que $0 \in U$. Montrez que $-U := \{-x / x \in U\}$ est aussi un ouvert de G . On pose $U' := U \cap (-U)$: montrez que $0 \in U'$ ouvert et que U' est symétrique (c'est-à-dire que $x \in U' \Leftrightarrow -x \in U'$). *Indication* : utilisez la fonction inverse $x \mapsto -x$.

3. Soit U un ouvert de G tel que $x_0 \in U$. Soit $U' := \{x - x_0 / x \in U\}$. Montrez que U' est un ouvert de G qui contient 0.

Dorénavant, on fixe $\epsilon > 0$. Pour $x \in G$, il suit de la continuité de f qu'il existe un ouvert U_x de G qui contient x tel que

$$\forall y \in G, y \in U_x \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon/4.$$

4. Soit $x \in G$. Montrez qu'il existe $V_x \subset G$ tel que :

- $0 \in V_x$ ouvert de G
- V_x est symétrique,
- Pour tout $z, z' \in V_x$, alors $z + z' + x \in U_x$.

5. Soit K un compact de G tel que $\text{Supp } f \subset K$. En utilisant un recouvrement de K par les $x + V_x$, montrez qu'il existe U' ouvert de G contenant 0 tel que pour tous $x, y \in K$, on a $x - y \in U' \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon/2$.

6. Montrez que f est uniformément continue.