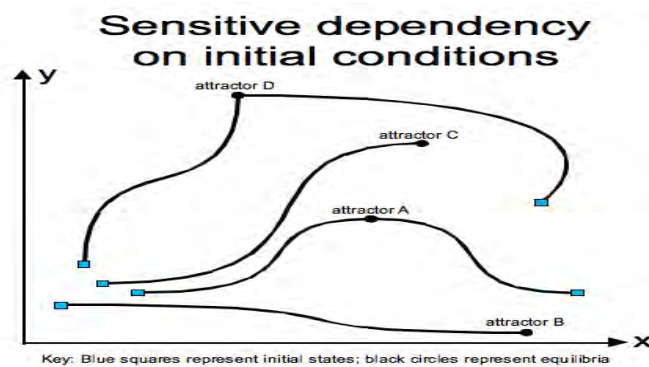
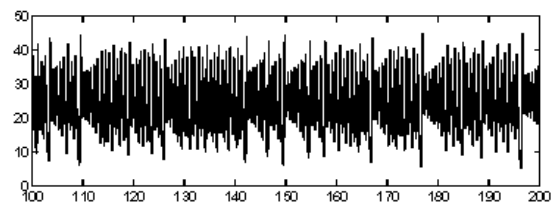
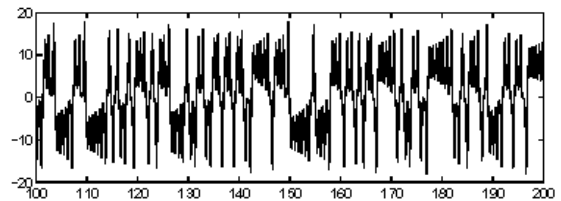
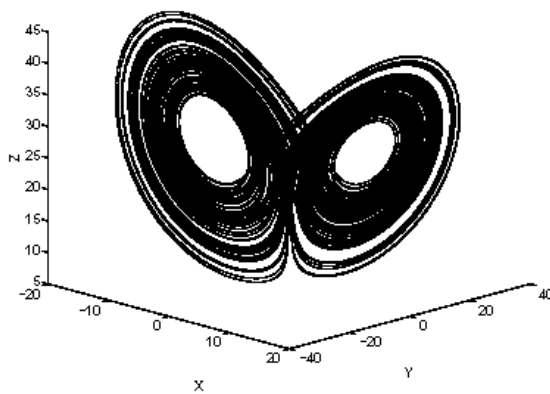




UNIVERSITÉ
DE LORRAINE



UE 701 – M1 Energie EDO et Systèmes Dynamiques



Olivier BOTELLA

LEMTA - Université de Lorraine - CNRS
2 avenue de la Forêt de Haye, TSA 60604
54518 Vandoeuvre (France)

Email : Olivier.Botella@univ-lorraine.fr

Lectures web page : <https://arche.univ-lorraine.fr/course/view.php?id=6745>

Séance 1, Introduction aux Systèmes Dynamiques : systèmes discrets, et systèmes continus du premier ordre

Cours «Equations Différentielles et Systèmes Dynamiques »M1 MEPP



Séance 1, Introduction aux Systèmes Dynamiques : systèmes discrets, et systèmes continus du premier ordre – p.1/8

Introduction aux systèmes dynamiques (1/2)

Définition : Loi d'évolution d'un système physique qui, à partir d'un état initial, décrit ses états futurs de façon **déterministe**.

2 types issus de la modélisation scientifique :

● Temps continu $\Rightarrow$ **Equations Différentielles Ordinaires (EDO)**

● Physique ($\sum \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{y}}$), chimie, biologie, ...

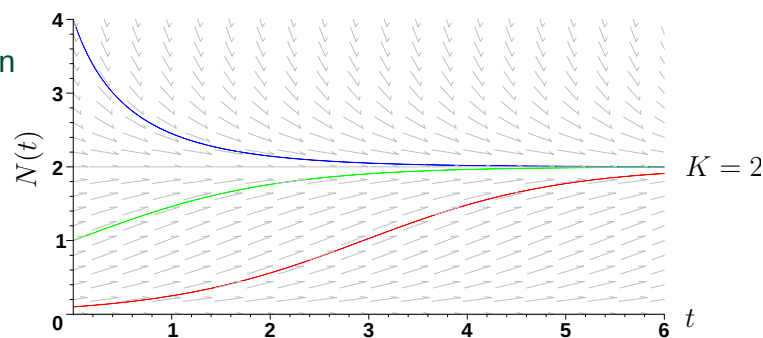
● Dynamique des populations : **équation logistique** (Verhulst, 1845)

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - N(t)/K\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

$N(t)$: population au temps $t \geq 0$

r : taux d'accroissement

K : maximum de la population



Trajectoires pour $r = 1$, $K = 2$

● Réduction d'**EDP** en système à **nombre fini de ddl**(modèle de Lorentz, stabilité hydrodynamique)



Séance 1, Introduction aux Systèmes Dynamiques : systèmes discrets, et systèmes continus du premier ordre – p.2/8

Introduction aux systèmes dynamiques (2/2)

● Temps discret $\Rightarrow$ Equations d'itération discrètes

● Schéma EP1 pour l'EDO logistique, avec changement de variables $x_n = \alpha N(n\Delta t)$,
 $\alpha = r\Delta t / (1 + r\Delta t)K \Rightarrow$ itération logistique (May, 1976) :

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1] \text{ donné} \\ x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \end{cases} \quad \mu = 1 + r\Delta t \text{ paramètre de contrôle} \quad (1)$$

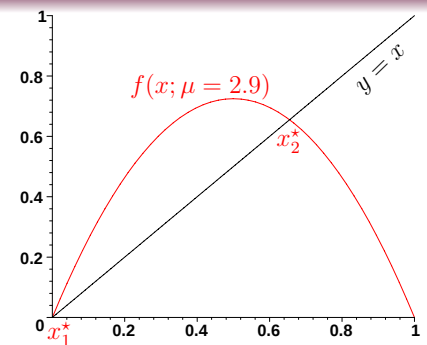
● Itérations discrètes : modèles (simples) de solutions chaotiques (dynamique complexe)

Objectifs du cours : Analyse qualitative de la solution des systèmes dynamiques

Etude paramétrique de l'application logistique

$$x_{n+1} = f(x_n; \mu) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f(x; \mu) = \mu x(1 - x) \\ \mu \in [0, 4] \Rightarrow x \in [0, 1] \end{cases}$$

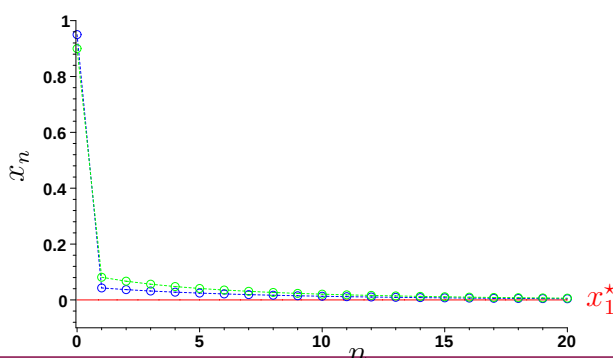
Problématique : comment varie qualitativement la solution lorsque μ varie de 0 à 4 ?



● Etape 1 : Déterminer les points fixes $x^* \in [0, 1]$

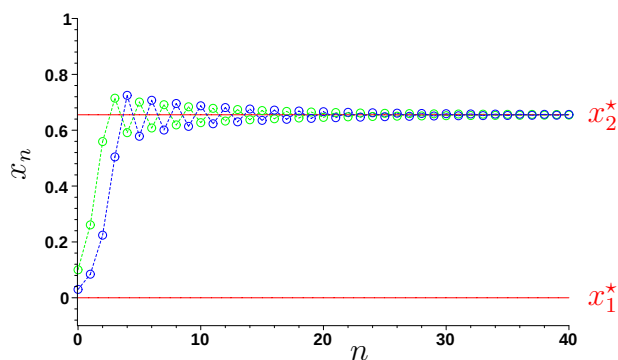
$$f(x^*; \mu) = x^* \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 0 \text{ pour tout } \mu, \quad \text{et} \quad x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu} \text{ pour } \mu > 1$$

● Pour $\mu = 0.9$, conditions initiales «proches» $x_0 = 0.95$ et $x_0 = 0.90$

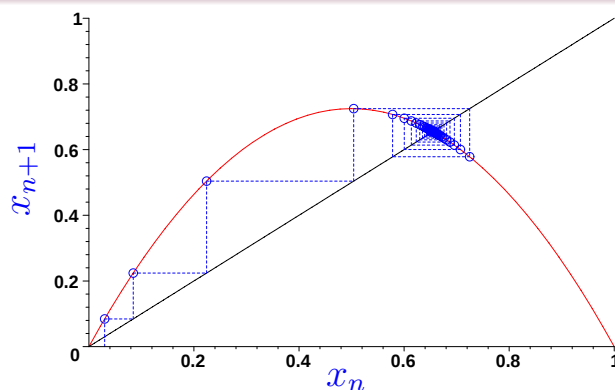


$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_1^* \Rightarrow x_1^*$ est un point fixe stable. C'est un attracteur ou source du système dynamique

Application logistique pour $\mu = 2.9$



Histogramme pour $x_0 = 0.03$ et $x_0 = 0.10$



Portrait de phase pour $x_0 = 0.03$

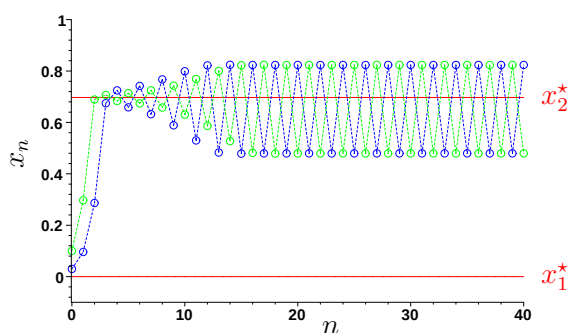
⇒ le point fixe x_1^* devient instable, tandis que x_2^* est stable maintenant. Pourquoi ?

● Etape 2 : Etude de la stabilité linéaire : $x_{n+1} - x^* \simeq f'(x^*; \mu)(x_n - x^*)$

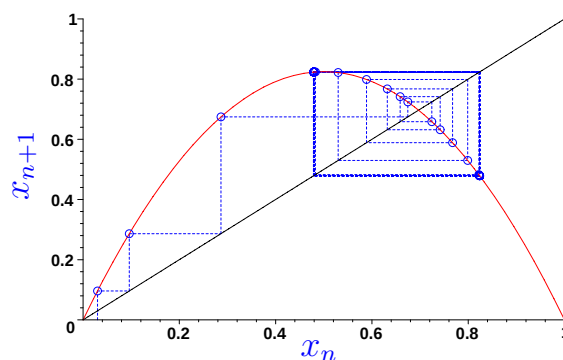
Stabilité si $|f'(x^*; \mu)| < 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 & \text{stable pour } \mu < 1, \text{ instable sinon} \\ x_2^* = 1 - 1/\mu & \text{stable pour } 1 < \mu < 3 \end{cases}$

● Pour $\mu > \mu_0 \equiv 1$, x_1^* perd sa stabilité en faveur de x_2^* ⇒ μ_0 est le seuil d'une bifurcation (transcritique). Que se passe-t-il pour $\mu > \mu_1 \equiv 3$?

Application logistique pour $\mu = 3.3 \Rightarrow$ Cycle de période 2

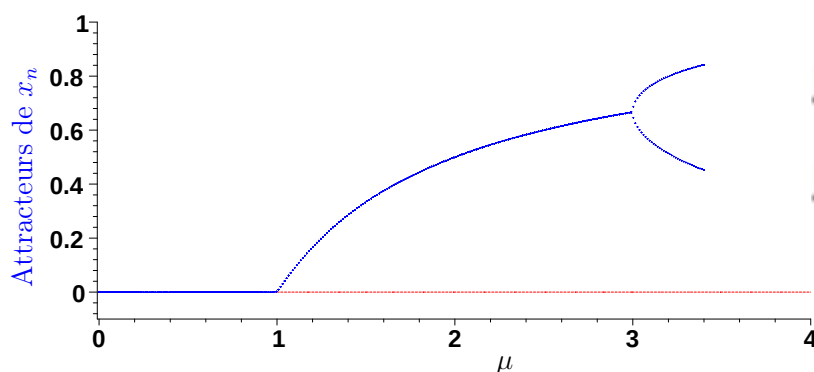


Histogramme pour $x_0 = 0.03$ et $x_0 = 0.10$



Portrait de phase pour $x_0 = 0.03$

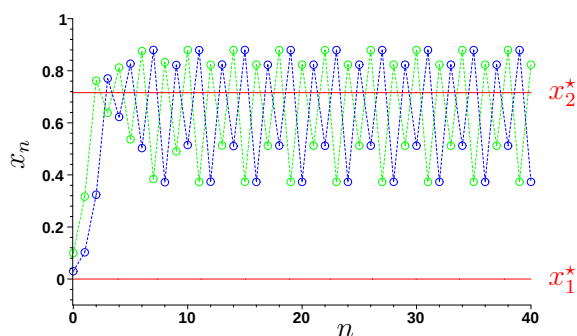
● Etape 3 : Diagramme de bifurcation pour $0 \leq \mu < \mu_2 \simeq 3.449$



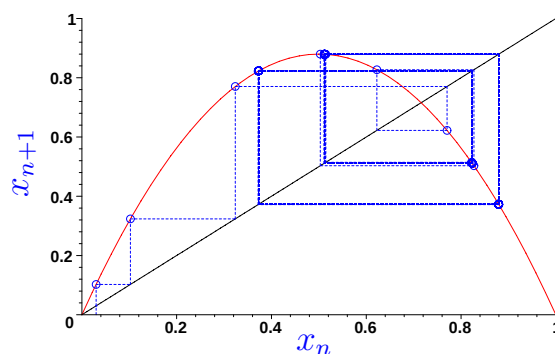
● $\mu_0 \equiv 1$, bifurcation «transcritique» : x_1^* échange sa stabilité avec x_2^*

● $\mu_1 \equiv 3$, bifurcation «flip» ou «fourche» : périodicité apparaît

Application logistique pour $\mu = 3.52 \Rightarrow$ Doublement de période

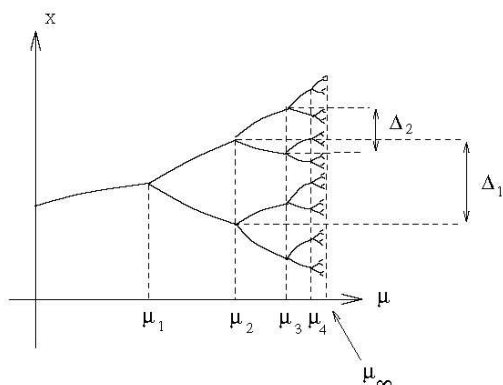


Histogramme pour $x_0 = 0.03$ et $x_0 = 0.10$



Portrait de phase pour $x_0 = 0.03$

⇒ Doublement de période lorsque $\mu > \mu_2 \simeq 3.449$



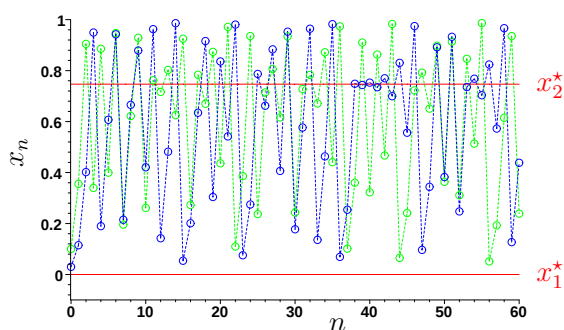
Cascade de doublements de période lorsque $\mu \nearrow$, avec les constantes universelles :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\mu_p - \mu_{p-1}}{\mu_{p+1} - \mu_p} \simeq 4.669, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_p}{\Delta_{p+1}} \simeq 2.503$$

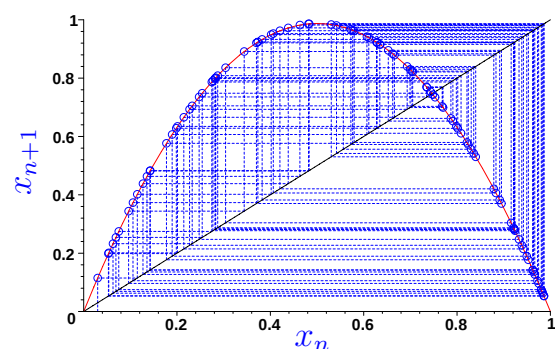
Le système n'est plus périodique lorsque $\mu > \mu_\infty$ ($\simeq 3.57$ pour l'application logistique)



Application logistique pour $\mu = 3.95 \Rightarrow$ Chaos déterministe

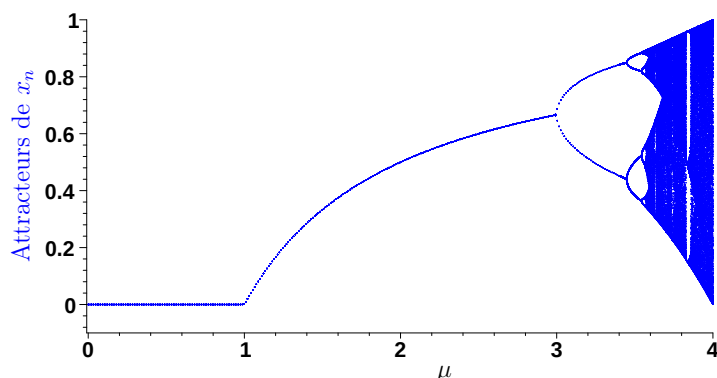


Histogramme pour $x_0 = 0.03$ et $x_0 = 0.10$



Portrait de phase pour $x_0 = 0.03$

Transition vers le chaos par bifurcation sous-harmonique



Pour $\mu > \mu_\infty \simeq 3.57$ le système devient **chaotique** : l'attracteur devient un ensemble infini de points.

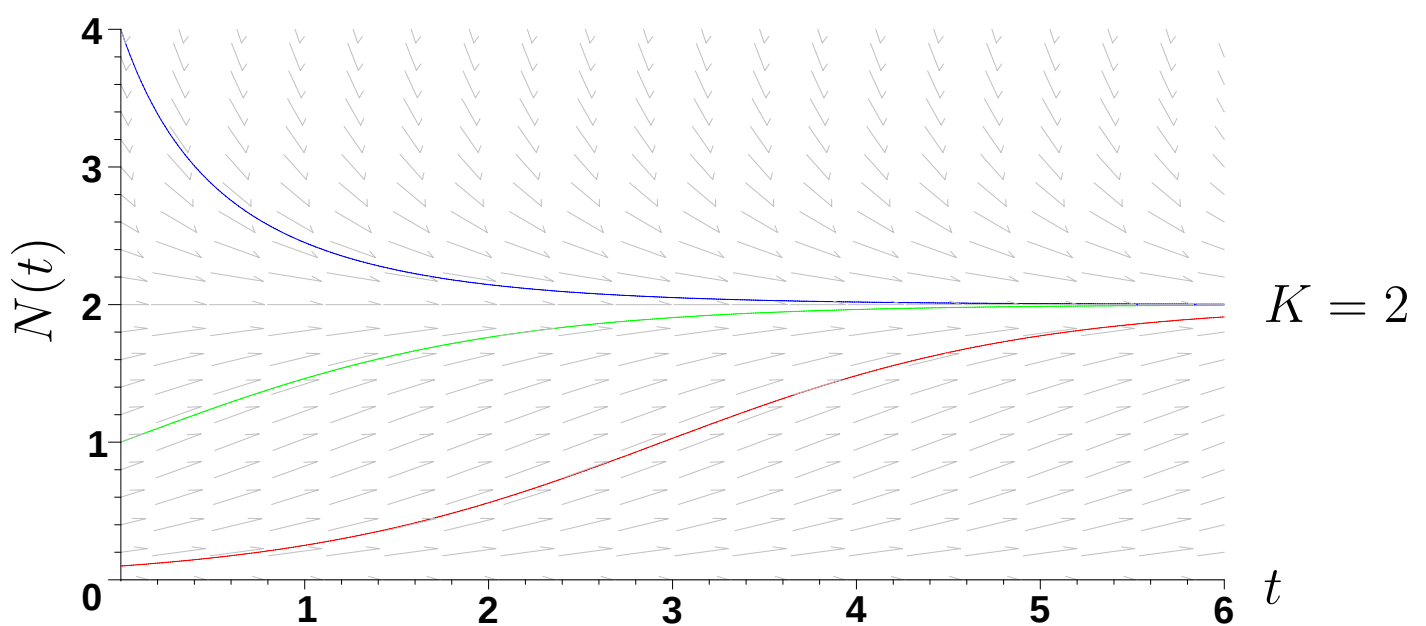
Une des **routes vers le chaos** qui sont observées dans les systèmes physiques (ex : convection de Rayleigh-Bénard)



Compléments de cours et TD

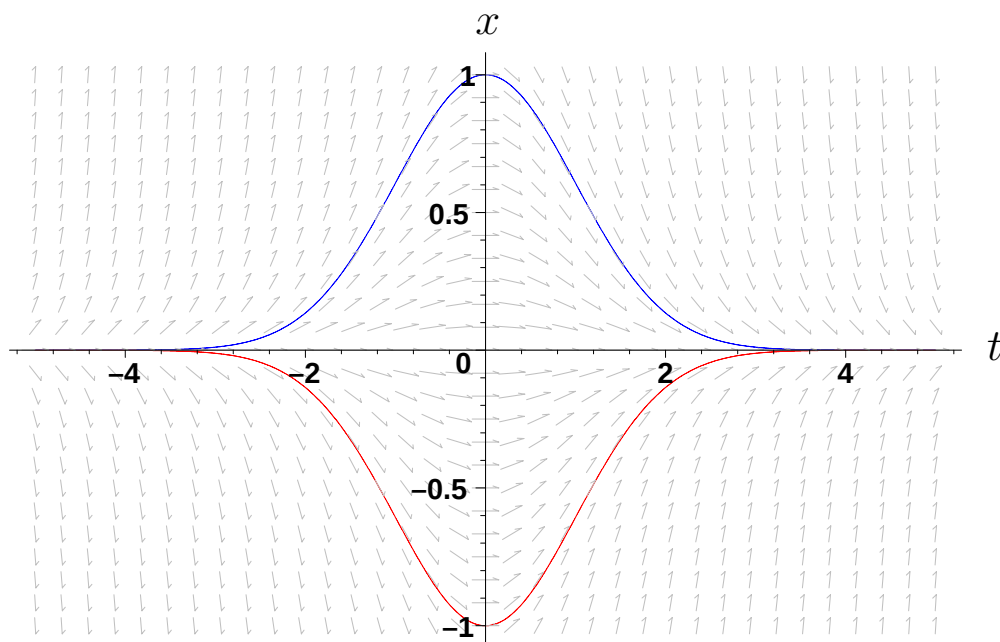
Cours «Equations Différentielles et Systèmes Dynamiques »M1 MEPP

Cours I : Systèmes du premier ordre



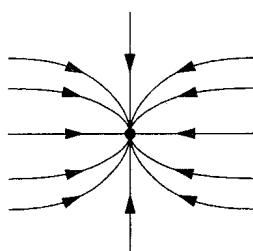
Trajectoires et champ des directions pour l'équation logistique ($r = 1$, $K = 2$)

TD I : Systèmes du premier ordre

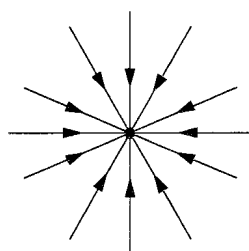


Trajectoires et champ des directions du système $\dot{x} = -tx$

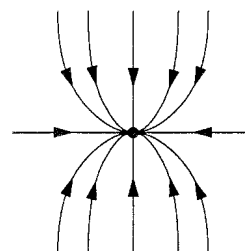
Cours II : Portrait de phase des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$ (1/2)



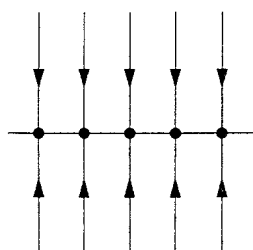
(a) $a < -1$



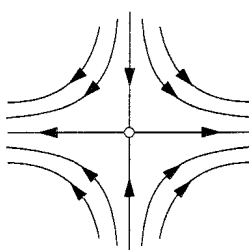
(b) $a = -1$



(c) $-1 < a < 0$



(d) $a = 0$



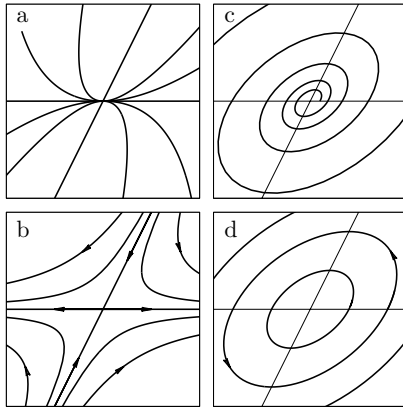
(e) $a > 0$

Portraits de phase du système $\dot{X} = \mathcal{A}X$,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

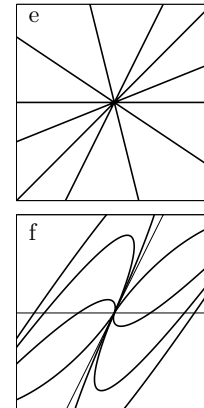
Cours II : Portrait de phase des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$ (2/2)

Valeurs propres distinctes : $\lambda_1 \neq \lambda_2$



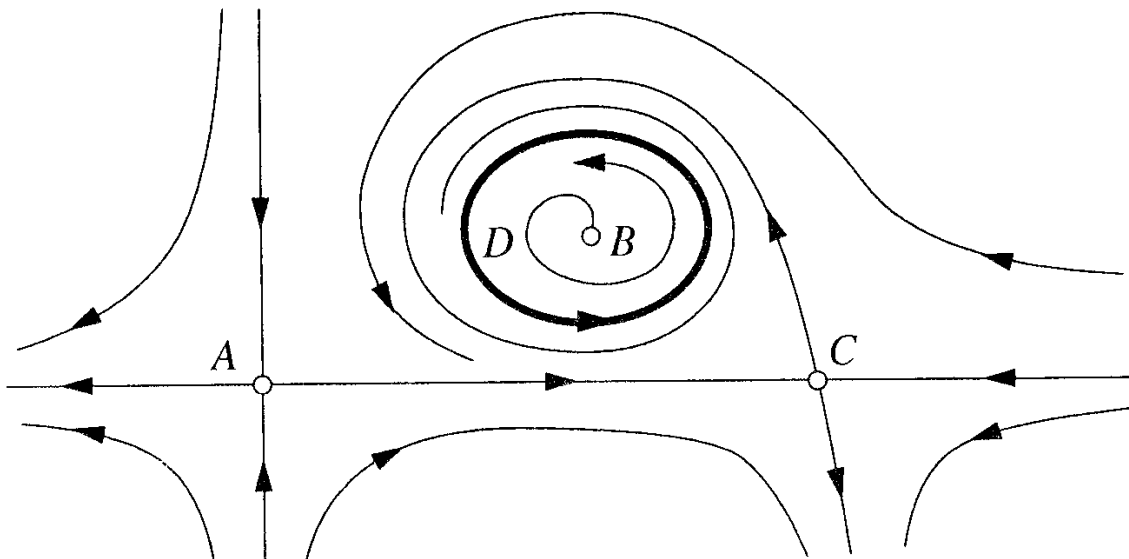
Cas réel : $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Valeurs propres égales : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$



Cas complexe : $\lambda_R \pm i\lambda_I$, $\lambda_I \neq 0$

Cours II : Portrait de phase typique dans $\mathbb{R}^2$



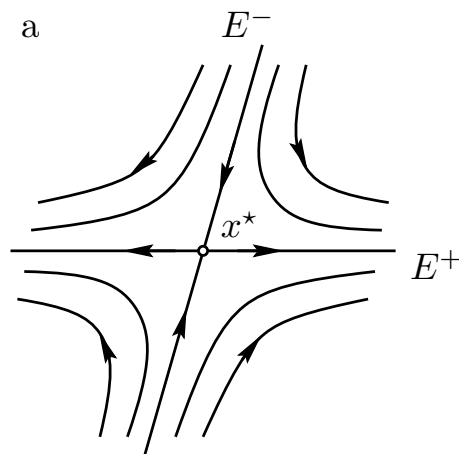
Points fixes : A (col), B (foyer instable), C (col).

Principe de causalité : dans l'espace des phases, les trajectoires ne se coupent **jamais** !

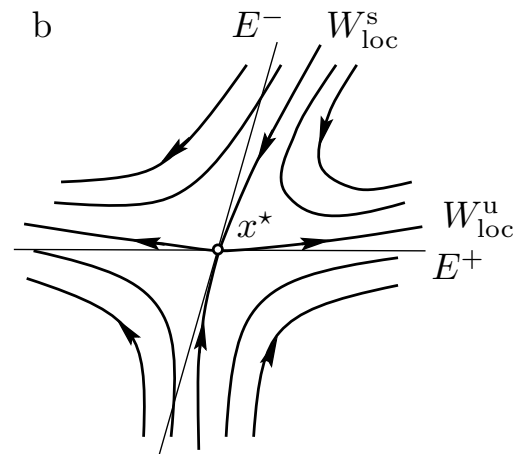
Une trajectoire qui relie 2 points fixes est dite **hétérocline** (ici $A \rightarrow C$). Si elle relie le même point fixe, c'est une trajectoire **homocline**.

Cycle limite D (stable) : solutions périodiques, telles que $x(t+T) = x(t)$.

Cours II : Théorème de Hartman-Grobman (1/2)



$$\dot{X} = [\nabla f(X_*)] X$$

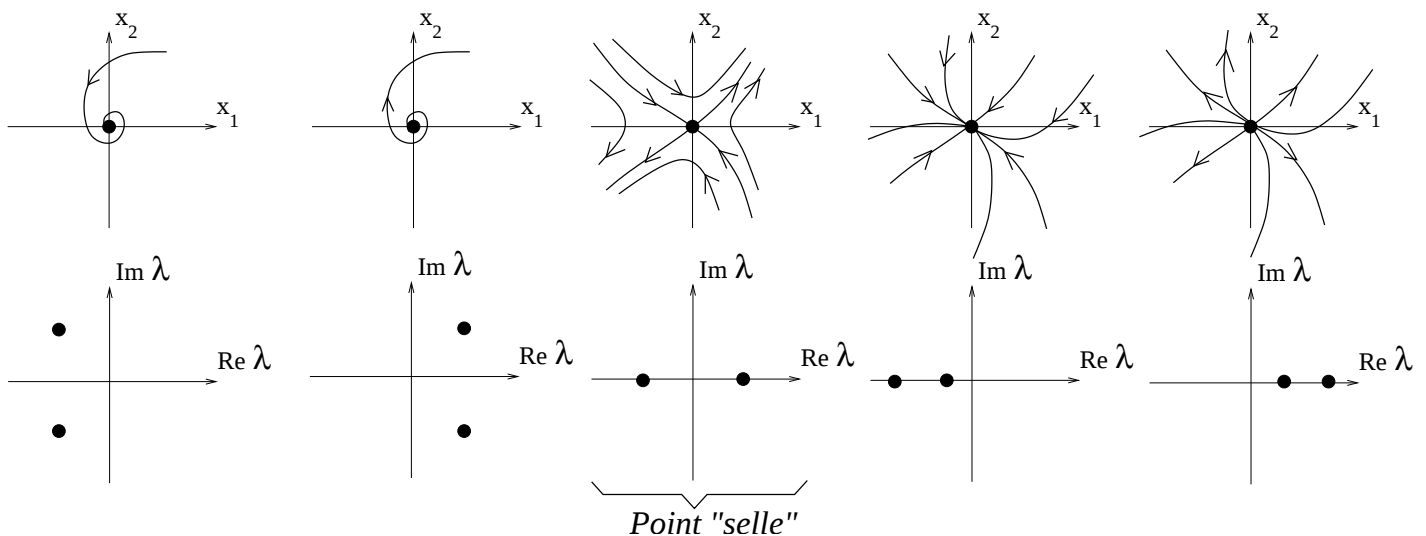


$$\dot{X} = f(X)$$

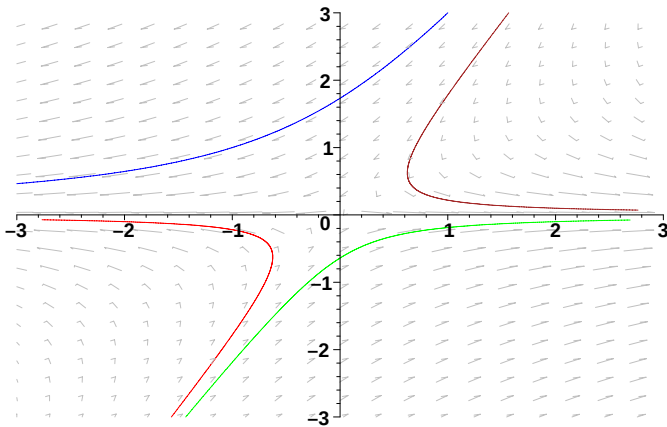
- Le point fixe X_* est **hyperbolique** si les valeurs propres de $\nabla f(X_*)$ sont telles que $\forall i : \text{Re}(\lambda_i) \neq 0$, sinon il est **dégénéré**
- Dans le cas **hyperbolique**, le système de la Fig. b (point col ou «selle») est topologiquement **équivalent** au système linéarisé (Fig. a) dans un voisinage de X_*

Cours II : Théorème de Hartman-Grobman (2/2)

- Les points fixes hyperboliques de $\mathbb{R}^2$:

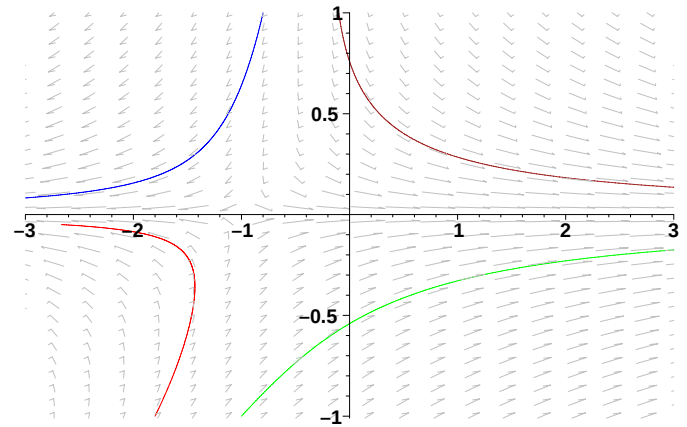


- Stables** si $\forall i : \text{Re}(\lambda_i) < 0$, **instables** si $\exists i : \text{Re}(\lambda_i) > 0$
- Pour les points fixes **dégénérés** ($\exists i : \text{Re}(\lambda_i) = 0$), l'analyse de stabilité linéaire ne permet pas de conclure



Système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$



Système non-linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = x + e^{-y} \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Objectifs

- Code volumes finis 2D préexistant
- Il faut valider ce code pour des écoulements newtoniens : $[\tau] = 2\mu [D]$
- Cas test choisi : Écoulement autour d'un cylindre carré

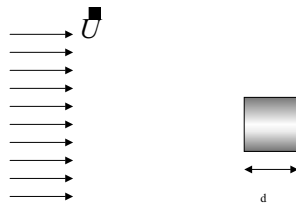
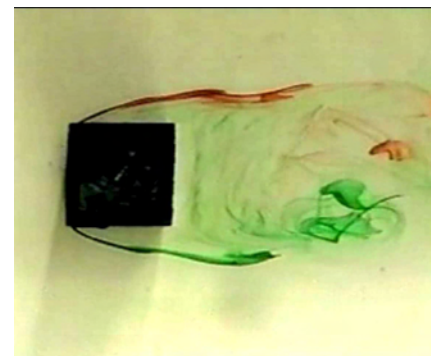


schéma de l'écoulement

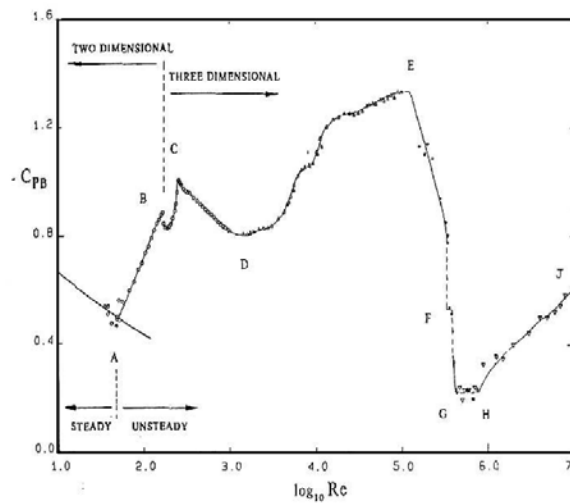


Expérience à $Re_d=1000$ (CD-Rom).

- Une variété de régimes en fonction de $Re_d = \frac{U_\infty d}{\nu}$
- Les écoulements autour de corps profilés sont des **cas tests** très utilisés pour valider les codes ...

Dynamique de l'écoulement (1/8)

- De nombreuses études ont été menées pour le cylindre à **section circulaire** (○) :



$$C_{Pb} = f(Re_d) . \text{Williamson}(1996)$$

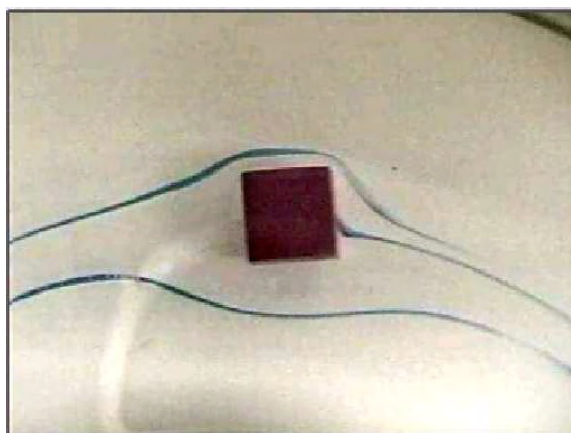
- Une littérature moins fournie pour le cylindre à **section carrée** (□)
→ Saha et al.(2000) ont mis en évidence une dynamique analogue entre ○ et □



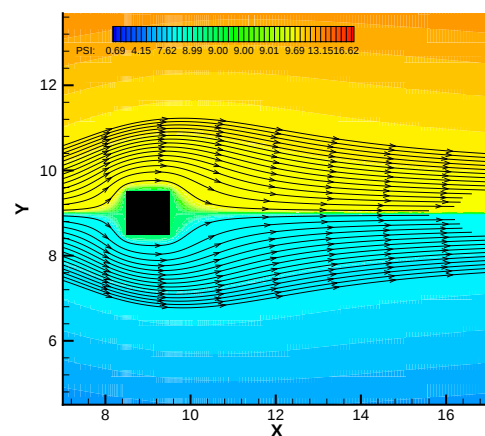
Etude numérique du sillage en aval d'un cylindre à section carrée – p.4/35

Dynamique de l'écoulement (2/8) : Écoulement rampant

- : $0 < Re_d \lesssim 3,5$ $\Rightarrow$ □ : $0 < Re_d < 1$



Exp. à $Re_d=1$.



Ma simulation à $Re_d=1$.

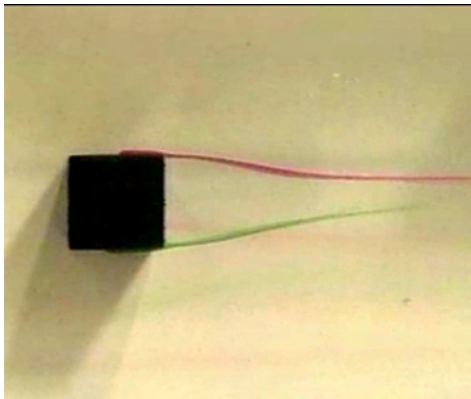
- Les forces visqueuses dominent
- Pas de décollement de couche limite



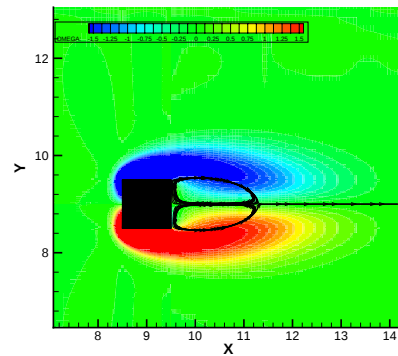
Etude numérique du sillage en aval d'un cylindre à section carrée – p.5/35

Dyn. de l'écoulement (3/8) : Régime stationnaire laminaire

● ○ : $3,5 \lesssim Re_d < 49$ $\Rightarrow$ □ : $1 < Re_d \lesssim 55$



Expérience à $Re_d=50$.



Ma simulation à $Re_d=35$.

- Apparition de deux zones de recirculation contrarotatives
- lorsque Re_d augmente :
 - C_{Pb} diminue
 - La taille du bulbe de recirculation augmente

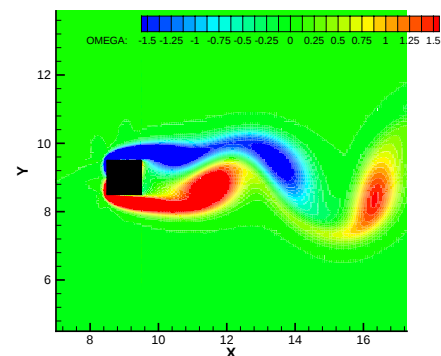


Dyn. de l'écoulement (4/8) : Laché tourbillonnaire laminaire

● ○ : $49 < Re_d < 194$ $\Rightarrow$ □ : $55 < Re_d \lesssim 164$



Dessin (Drazin) à $Re_d=100$



Simulation à $Re_d=100$

- Instabilité du bulbe de recirculation $\rightarrow$ bifurcation de Hopf
- Un phénomène purement périodique
- Lorsque Re_d augmente :
 - C_{Pb} augmente
 - Les forces instationnaires augmentent

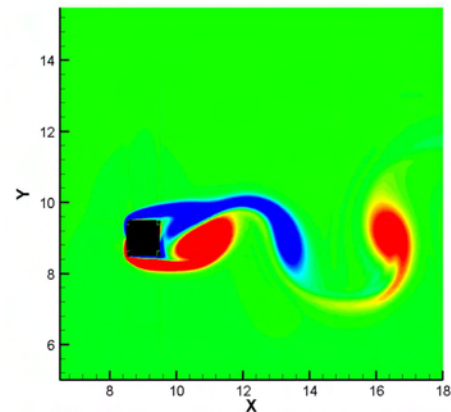


Dyn. de l'écoulement (5/8) : Régime de transition quasi-périodique

● ○ : $194 < Re_d < 260$ $\Rightarrow$ □ : $164 < Re_d \lesssim 300$



Exp. num. à $Re_d=200$

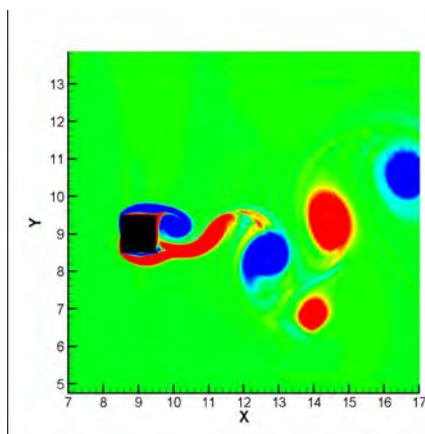


Ma simulation à $Re_d=250$.

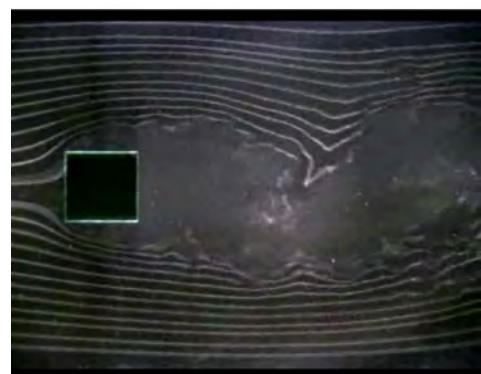
- Écoulement 3D
- 2 modes d'instabilités mode A puis mode B

Dynamique de l'écoulement (6/8) : Régime chaotique

● $300 < Re_d$



Ma simulation à $Re_d=600$.



$Re_d=10^4$ écoulement turbulent.

- Écoulement fortement 3D
- C_{Pb} n'est pas monotone en fonction de Re_d
- ...vers la turbulence $Re_d \gg 300$

EDO et Systèmes dynamiques

①

Chap I : Systèmes dynamiques du 1^{er} ordre

I] Introduction + définitions de base

Un syst. du 1^{er} ordre est une E.D.O. de la forme

$$(1) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x; \mu) & \forall t \geq 0 \\ x(0) = x_0 & : \text{cond. initiales données} \end{cases}$$

avec :

- $\mu \in \mathbb{R}$: paramètre de contrôle du système.

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x; \mu)$

une fonction qui doit posséder une régularité suffisante (ex: C^1) pour que la solution de (1) existe et est unique (principe de consistance).

Rq 1: Un système dynamique doit toujours être représenté par une EDO autonome. Par exemple, l'EDO ^{scalaire} non autonome :

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \quad (2)$$

doit être traité comme un système du 2nd ordre, par le changement de var. $x_1 = x$, $x_2 = t$. L'EDO devient alors le système du 2nd ordre :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_2, x_1) \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Rq 2: Principe de consistance: la solution d'un système dynamique doit exister et être unique. Pour vérifier cela, le rhs $f(\cdot, x)$ de (1) doit vérifier des conditions de type Cauchy-Lipschitz. En voici une version édulcorée :

Thm (Cauchy-Lipschitz): Supposons que la c.i. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ou un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$. Si $f \in C^1(\mathcal{U})$, alors le syst. (1) admet une solution $x(t)$ pour un intervalle ^{certain} de temps $[-T, T]$ centré autour de $t=0$, et elle est unique.

(non-unicité des solutions)

Exemple 1: Considérons le système (1) avec $f(x) = x^{1/3}$, $x_0 = 1$. On a $f'(0) = \pm \infty$, donc la cond. de Cauchy-Lipschitz n'est pas vérifiée. En conséquence, la solution n'est pas unique, il y en a une infinité. P.ex, en voici 2 : $-x(t) = 0$
 $-x(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$

Exemple 2 ("Blow up" en temps fini)

On considère (1) avec $f(x) = 1 + x^2$ et $x_0 = 0$. La cond. de Cauchy-Lipschitz est vérifiée: l'unique solution est $x(t) = \tan(t)$, mais elle est seulement définie au voisinage de $t = 0$: $] -\pi/2, \pi/2[$. En fait,

$$\lim_{t \rightarrow \pi/2} |x(t)| = +\infty,$$

on observe que la solution "explose" en temps fini: cela se rencontre dans les modélisations de problèmes de Combustion.

II) Analyse qualitative

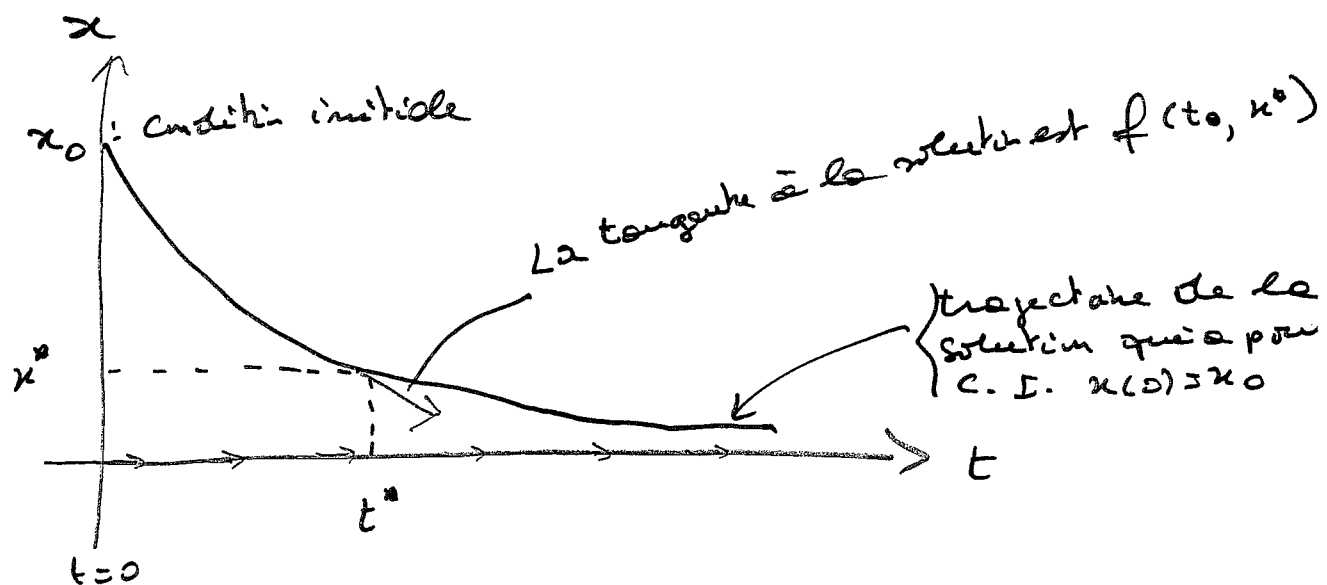
Cette introduction à l'analyse qualitative des systèmes dynamiques se fera sur le problème test de l'équation logistique:

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, r) & \text{avec } f(x, r) = rx(1 - x/K) \\ x = x_0 \end{cases}$$

Le paramètre $K \in \mathbb{R}$ est supposé connu.

II-1) Champs des directions

Une des façons les plus simples de tracer^{à la main} des esquisses des solutions (ou "trajectoires") est de tracer le champ des directions du système : c'est l'ensemble des vecteurs tangents à une trajectoire dans l'espace "physique" (t, x) .



Pour tracer ces vecteurs, on interprète l'EDO de la façon suivante: $\frac{dx}{dt}(t_*) = f(x_*, t_*)$ est la pente de la solution

au point (t^*, x^*) . En pratique, il faut faire une étude des variations de la fonction f , et en particulier:

* Déterminer les points fixes $x^*/f(x^*) = 0$
 $\Rightarrow$ les vecteurs tangents sont horizontaux: $\rightarrow$

* Le signe et la $| \cdot |$ de f donnent l'inclinaison des vecteurs:

Rq: Les vecteurs ont même module.

Pour l'eqt logistique (4) on fait l'étude:

⑤

* $f(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = k$

* $f'(x) = r \left(1 - 2 \frac{x}{k}\right) \Rightarrow f'(x) \geq 0$ pour $x \leq k/2$

On en tire le tableau de variations:

x	$-\infty$	0	$k/2$	k	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(k/2)$	$\searrow$	$-\infty$

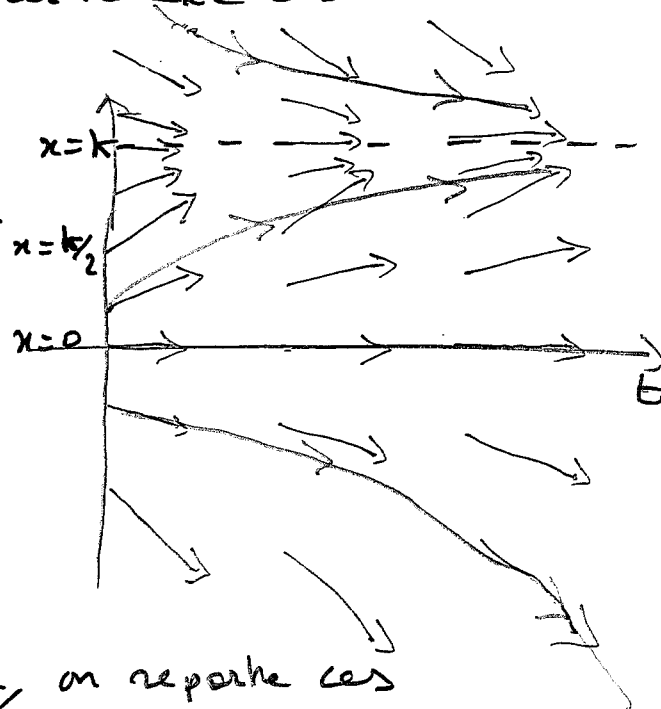
On effectue ensuite les étapes suivantes:

1^{ère} étape: On déduit du tableau de variations l'allure des champs des tangentes sur l'axe $t = 0$:

* $x = 0$ et $x = k$: pente nulle $\rightarrow$

* $x \in]0, k[$: pente $\nearrow$, maximale en $k/2$

* Sinon: pente $\searrow$, maximale en $\pm \infty$



2^{ème} étape: Puisque l'EDO est autonome, on reporte ces flèches sur toutes les verticales $t = \underline{\underline{cte}}$

3^{ème} étape: On dessine quelques trajectoires tangentes
au champ des directions.

II-2) Points fixes et stabilité

L'étude du paragraphe précédent montre l'importance de repérer les points d'équilibre du système pour esquisser l'allure des solutions.

Définition (Point fixe). Les points fixes du système (1) sont les points x_* qui vérifient $f(x_*) = 0$.

Un point fixe correspond à un point d'équilibre de la solution: Si on choisit la condition initiale $x(t=0) = x_*$ alors la solution $\forall t$ sera $x(t) = x_*$.

On qualifie un point fixe de stable ou instable.

Considérons une solution perturbée de l'EDO:

$$x(t) = x_* + \delta x(t)$$

où $\delta x(t)$ est une perturbation autour de la sol. fixe $x(t) = x_*$,
telle que la perturbation est initialement petite:

$$\delta x(0) \ll 1$$

Si la perturbation décroît:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \delta x(t) = 0$$

Alors le point fixe x^* est stable.

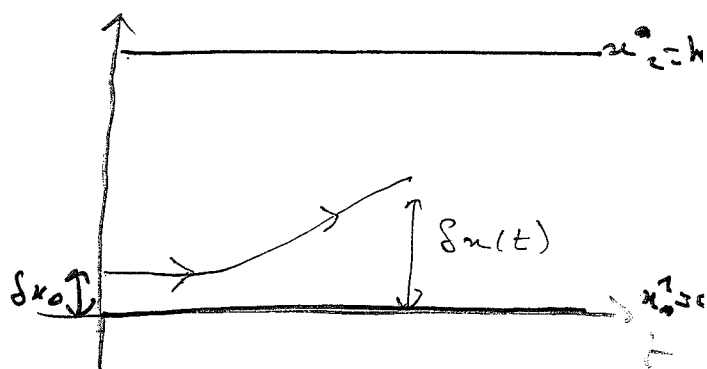
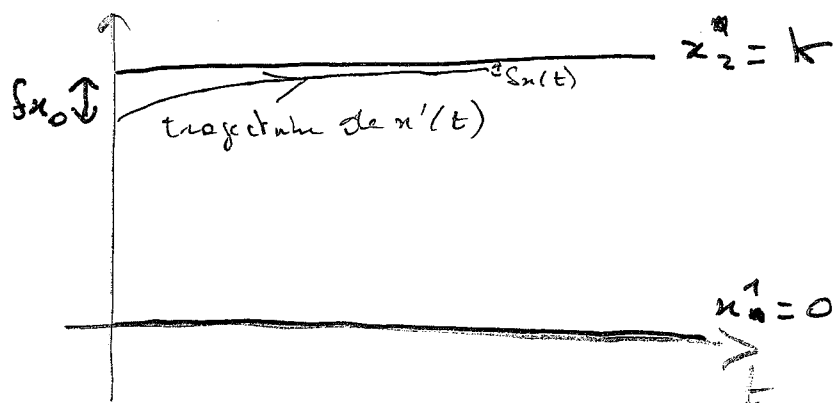
③

Si la perturbation s'amplifie:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\delta x(t)| = +\infty$$

le point fixe x^* est instable.

Pour l'équation logistique, $x_1^* = 0$ est instable tandis que $x_2^* = K$ est stable.



On vérifie cette propriété en effectuant une analyse de stabilité linéaire:

$$\dot{x} = f(x)$$

$$(x_0 + \delta x) = f(x_0 + \delta x)$$

$$\dot{\delta x} = \underbrace{f(x_0)}_{=0} + f'(x_0) \delta x + O(\delta x^2)$$

Si $\lambda \equiv f'(x_0) \neq 0$, on peut négliger le terme en $O(\delta x^2)$ et considérer l'EDO linéarisée autour de x^* :

$$\delta \dot{x} = \lambda \delta x \quad \text{de solution} \quad \delta x(t) = \delta x_0 e^{\lambda t}$$

En conclusion, l'analyse de stabilité linéaire permet
d'affirmer ~~conclure~~ que:

- Si $f'(x_*) < 0$: le point fixe est stable
- Si $f'(x_*) > 0$: " " " instable
- Si $f'(x_*) = 0$: le D.L. linéaire n'est plus valable, et l'analyse linéaire ne permet pas de conclure. Cas pathologique: il faut faire une analyse faiblement non linéaire ou une étude au cas par cas (Cf TD).

Rq: (Temps caractéristique).

Exemple: Pour l'application logistique, il y a 2 points fixes: $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 1$.

- Pour $x_1^* = 0$: $f'(x_1^*) = 2 \Rightarrow$ instable pour $2 > 0$, stable pour $2 < 0$

pour $2 = 0$, l'EDO s'écrit $\dot{x} = 0 \Rightarrow$ tout les points sont stables.

- Pour $x_2^* = 1$: $f'(x_2^*) = -1 \Rightarrow$ stable pour $-1 > 0$, instable pour $-1 < 0$

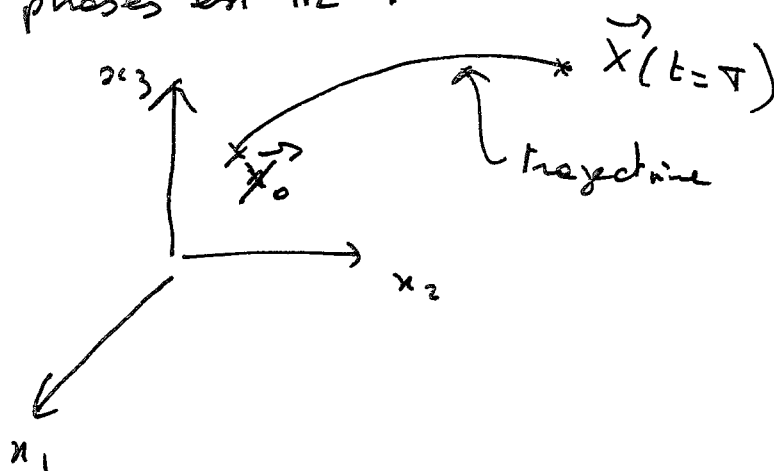
Représenter des solutions dans l'espace physique $\mathbb{R}^n$ n'est pas suffisant pour analyser qualitativement un système dynamique.

Il est + instructif de considérer l'espace $\mathbb{R}^n$ (n: ordre du système) où vit la solution $\vec{x}(t)$ du système $\Rightarrow$ c'est l'espace de phase.

L'ensemble des points $\{\vec{x}(t), t=0, \dots, T\}$ qui part d'une condition initiale $\vec{x}_0$ est appelée trajectoire.

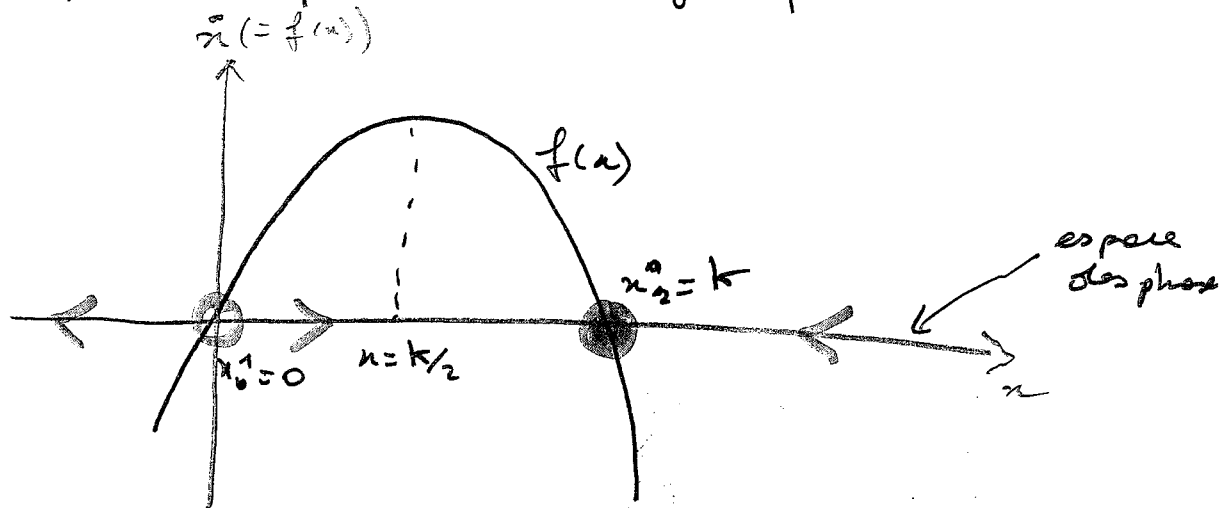
Une figure qui décrit qualitativement les différentes trajectoires d'un système dynamique est appelée portrait de phase.

Exemple 1: Pour $n=3$, $\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x})$ avec $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
l'espace des phases est $\mathbb{R}^3$:



Portrait de phases de $\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x})$

Pour un système du 1^{er} ordre, l'espace des phases $\mathbb{C}$ est la droite $\mathbb{R}$. Pour ces systèmes, on a coutume de représenter sur un dessin 2D l'espace des phases en abscisse et le graphe de $x \mapsto f(x)$ en ordonnées, p. ex. pour l'éq. logistique (4) :



Pour dessiner le portrait de phase d'un système; il faut représenter :

1) L'ensemble des points fixes:

ici: $x_0^1 = 0$ et $x_0^2 = k$

2) A partir de l'analyse de stabilité des points fixes, on déduit l'allure qualitative des solutions. On utilise la convention :

: point fixe instable

: ——— stable

: point fixe stable/instable
cas pathologique, cf TD.

III) Les bifurcations

La dynamique des systèmes du 1^{er} ordre est très simple, une trajectoire est :

- Soit attirée vers un point fixe x^*
- Soit elle est repoussée par x^* vers l'infini.

Un point fixe est soit un attracteur, soit un point source (repeller).

(Dans les 2 cas, la trajectoire est monotone (pas de zig-zag)).

Ce qui est intéressant dans les systèmes du 1^{er} ordre, c'est la dépendance de la dynamique en fonction du paramètre de contrôle (noté r).

Suivant la valeur de r , des points fixes peuvent être créés ou détruits, et leur stabilité peut changer.

Ces changements qualitatifs sont appelés bifurcations, et les valeurs de r où ils surviennent sont les valeurs seuil ou critique de la bifurcation.

III-1) Formes normales

Il existe un nombre assez restreint de ^{types de} bifurcations dans les systèmes du premier ordre (codimension 1).

Nous venons dans ce cours :

- bifurcation transcritique
-  Node-Col (odd node)
-  fourche (Pitch fork)
 - Supercritique
 - Sous-critique

Chaque bifurcation est décrite par une EDO "prototypique" appelée "forme normale". Par exemple, pour l'équation logistique :

$$\dot{y} = f(y; r), \quad f(y; r) = ry(1 - y/k),$$

si on utilise le changement de variable linéaire $x = \frac{y}{k}$, on obtient la forme normale d'un bifurcation transcritique

$$\dot{x} = rx - x^2.$$

Pour analyser les bifurcations d'un système dynamique, on effectue un changement de variable (et un D.T. au seuil de la bifurcation) pour exhiber la forme normale qui lui est associée. Des exemples seront vus en TD.

III-2 | Bifurcation Transcritique

(13)

La forme normale est :

$$(E) \quad \dot{x} = rx - x^2, \quad r \in \mathbb{R}$$

La première étape dans l'étude d'une bifurcation est de calculer les points fixes et étudier leur stabilité.

• points fixes tels que $rx - x^2 = 0$, soit :

- $x_1^* = 0 \quad \forall$ valeurs de r .

- $x_2^* = r$ existe pour $r \neq 0$.

- Stabilité: $f'(x) = r - 2x$

- Pour $x_1^* = 0$

$$f'(x_1^*) = r \Rightarrow \begin{cases} \text{stable si } r < 0 \\ \text{instable si } r > 0 \end{cases}$$

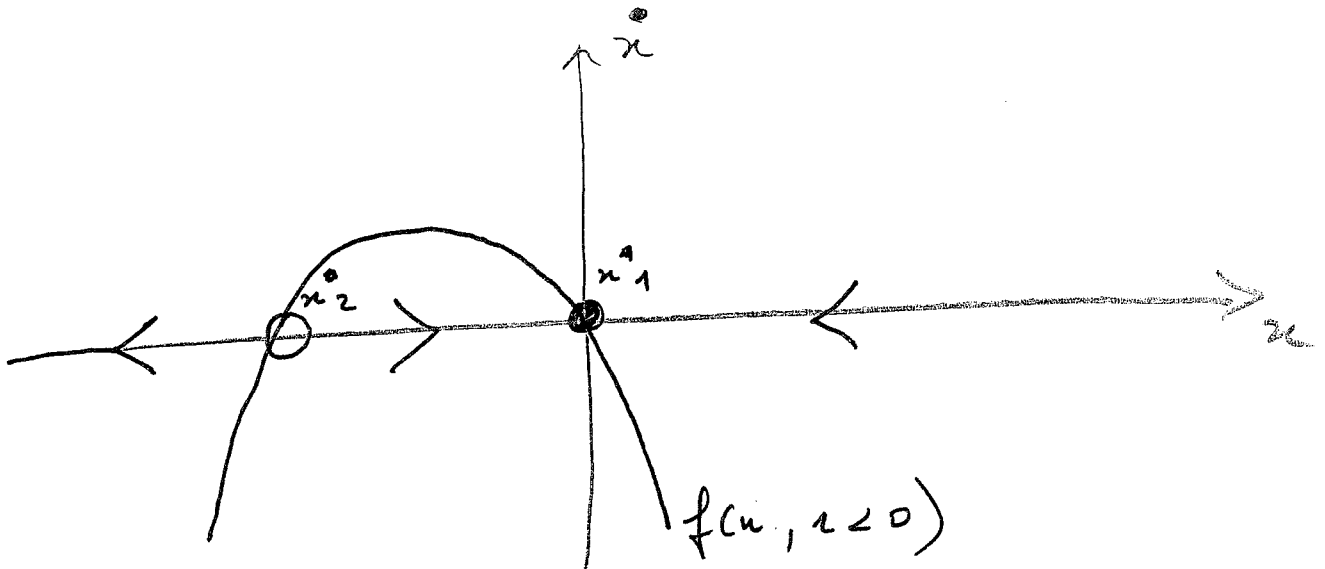
- Pour $x_2^* = r$

$$f'(x_2^*) = -r \Rightarrow \begin{cases} \text{instable si } r < 0 \\ \text{stable si } r > 0 \end{cases}$$

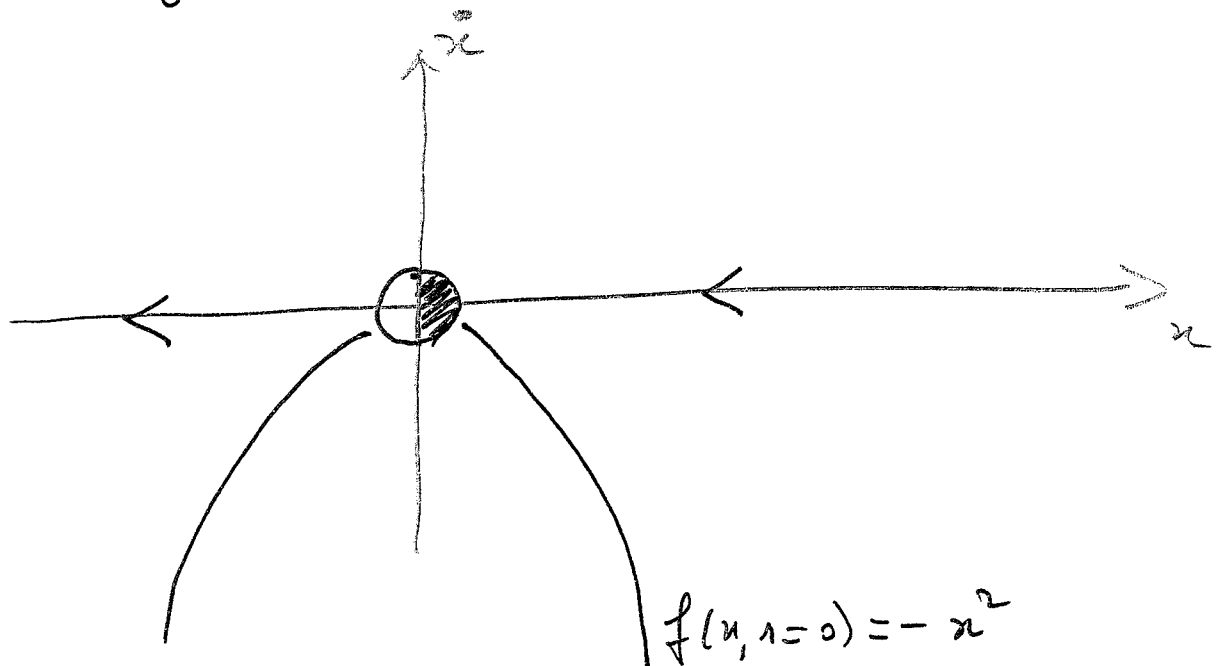
Rq: le cas $r = 0$ échappe à l'analyse linéaire. cf TD.

La 2nde étape consiste à tracer les portraits de (1) phase lorsque α varie :

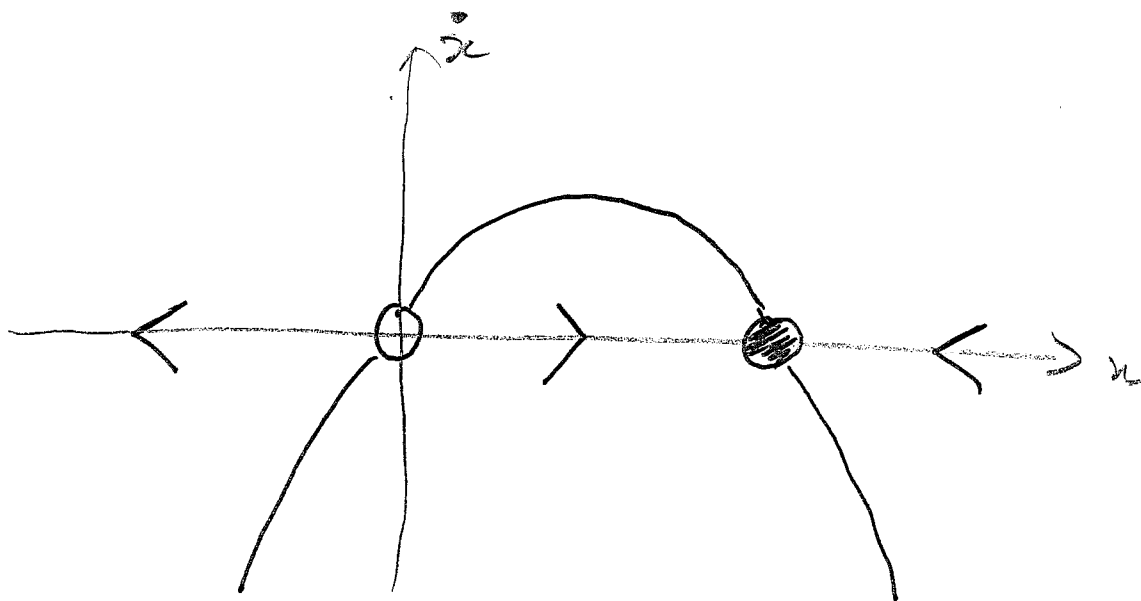
* Pour $\alpha < 0$: $x_1^* = 0$ stable, $x_2^* = 1$ instable



* Pour $\alpha = 0$: Les 2 points fixes sont confondus à l'origine.
L'analyse du TD nous conduit au portrait de phase :

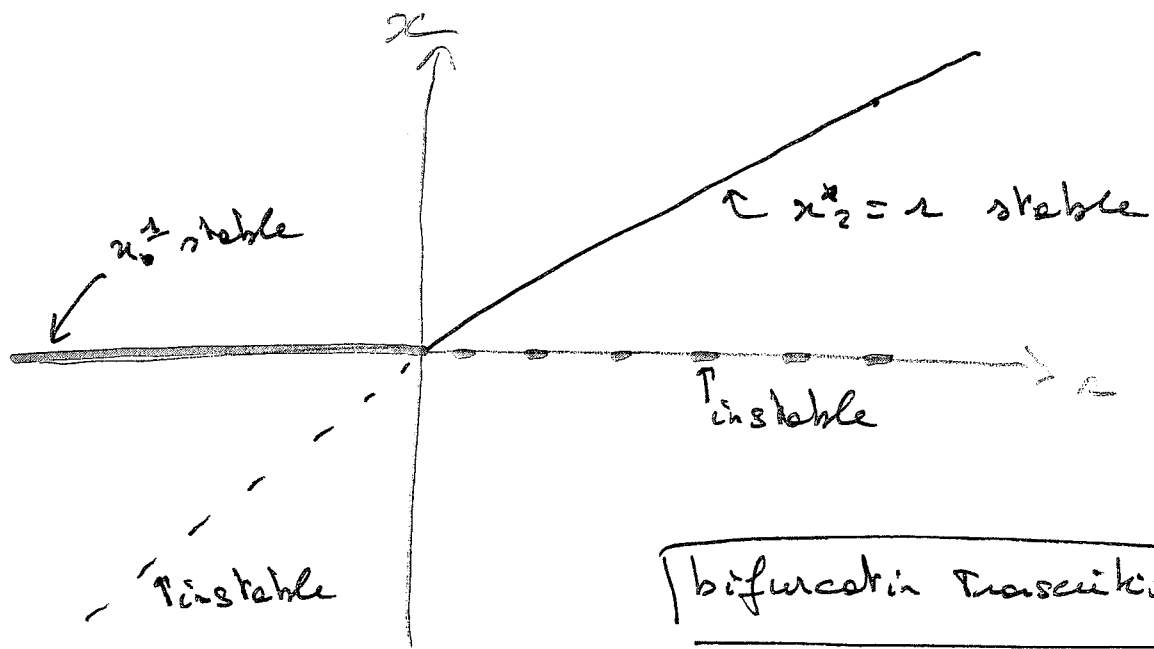


* Pour $r > 0$: Lorsque $r \nearrow$, x_1^* est devenue instable, $x_2^* = 1$ est maintenant stable. (15)



On dira qu'une bifurcation est survenue à la valeur critique $r_c = 0$ car les portraits de phase pour $r < 0$ et $r > 0$ sont qualitativement différents.

Conclusion: Dans une ^{autre} bifurcation, des points fixes existent pour toutes les valeurs du paramètre r . Lorsque ce paramètre varie, le(s) point(s) fixe(s) voient leur propriété de stabilité changer. (ici: x_1^* et x_2^* échangent leur stabilité). Ce mécanisme est appelé bifurcation transcritique, et il est résumé par le diagramme de bifurcation:



On utilise la convention : $\begin{cases} \text{—} & \text{stable} \\ \text{---} & \text{instable} \end{cases}$

III-3 | Bifurcation nœud-col (saddle-node)

La forme normale de cette bifurcation est :

$$\dot{x} = r + x^2 (= f(x, r)) \quad (6)$$

* points fixes :

- pour $r < 0$: $x_1^* = -\sqrt{r}$, $x_2^* = +\sqrt{r}$
- $r = 0$: $x_1^* = x_2^* = 0$
- $r > 0$: pas de points fixes.

* Analyse de la stabilité :

$$f'(x; r) = -2x$$

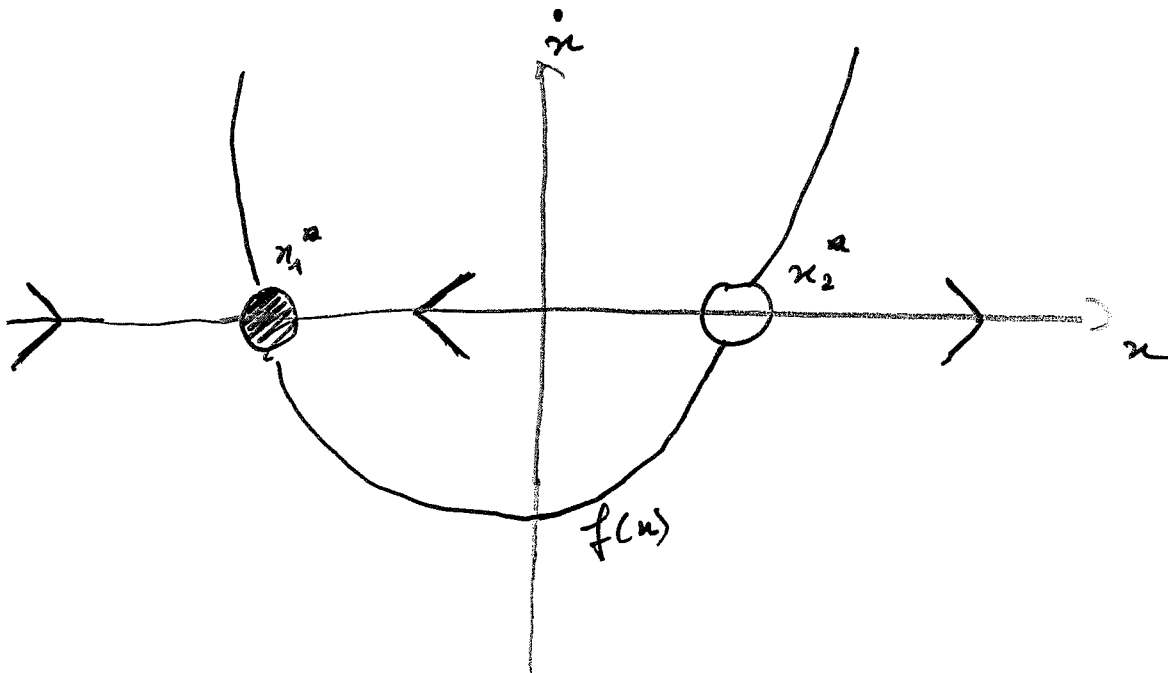
• Pour $x_1^* = -\sqrt{r}$, $f'(x_1^*) = -2\sqrt{r}$
 $\Rightarrow$ stable pour $r < 0$

• Pour $x_2^* = +\sqrt{r}$, $f'(x_2^*) = +2\sqrt{r}$
 $\Rightarrow$ instable pour $r > 0$

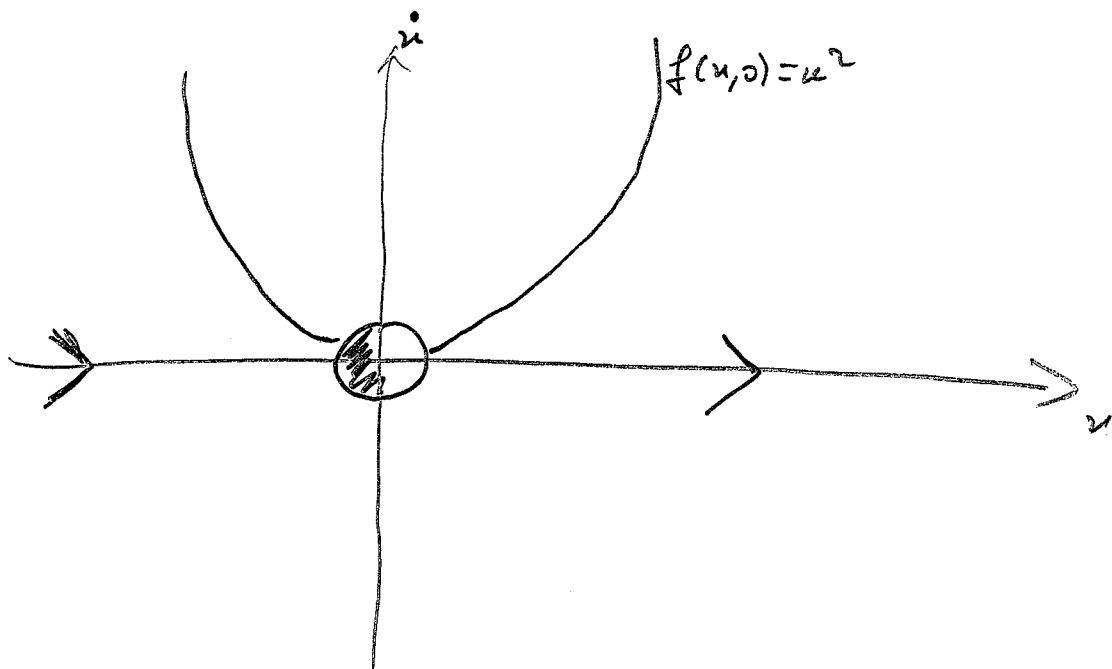
Rq: $r = 0$: cas particulier, ou en TD.

* Portraits de phase lorsque r varie

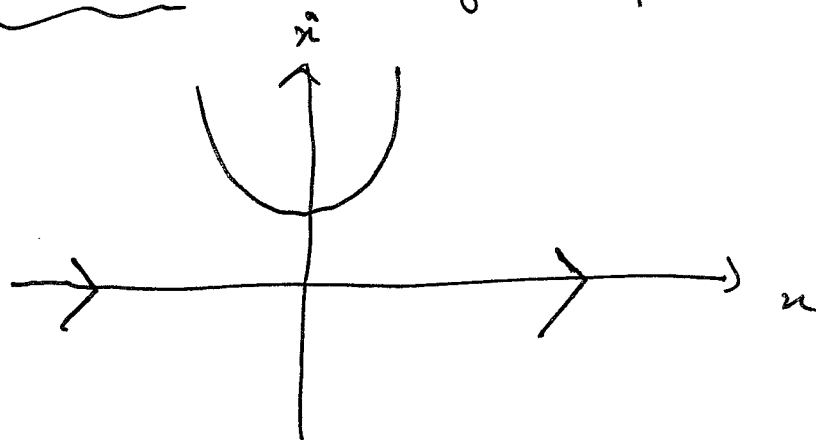
• Pour $r < 0$: 2 points fixes, x_1^* : stable
 x_2^* : instable



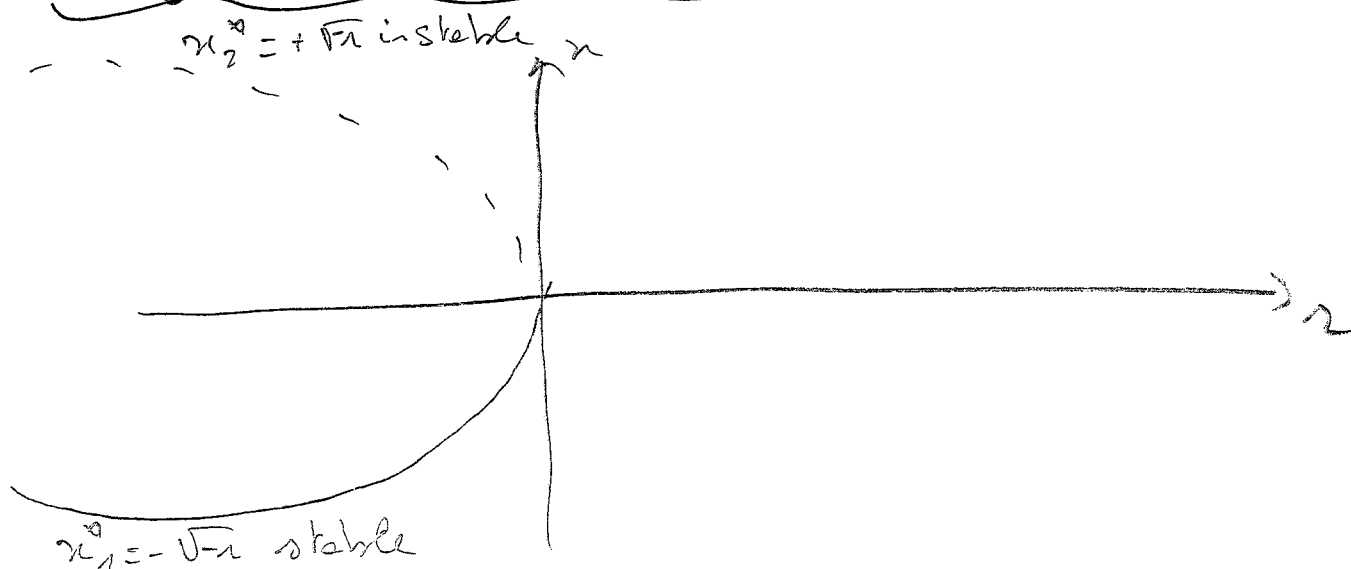
- Pour $r = 0$, les 2 points fixes fusionnent en un point stable / instable en $x_1^* = 0$:



- Pour $r > 0$ Il n'y a plus de points fixes :



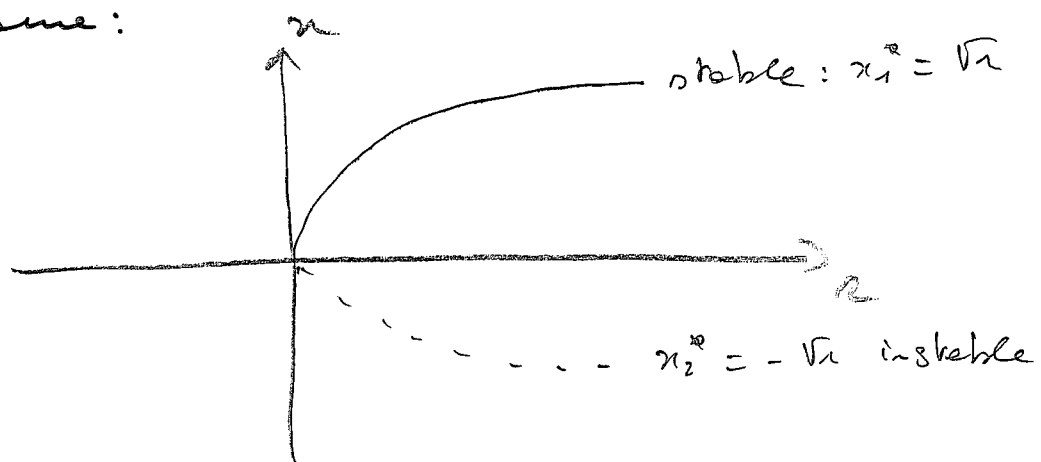
* Diagramme de bifurcation



Conclusion: Une bifurcation nœud-col est le mécanisme par lequel 2 points fixes sont créés ou détruits. Lorsque r varie, les 2 points fixes s'attirent, fusionnent, puis disparaissent. (10)

Rq: Une variante: bifurcation "blue sky"
 $\dot{x} = r - x^2$

de diagramme:



III-4) Les bifurcations louches (Pitchfork)

On les trouve dans les systèmes physiques qui présentent des symétries, exemples:

- En hydrodynamique: écoulement de Poiseuille
- EDO du 1^{er} ordre: elle est symétrique si elle est invariante par le changement de variable $x \mapsto -x$

Il y a deux types distincts :

(2)

- bifurcation fourche surcritique, de forme normale

$$\dot{x} = r x - x^3$$

- bifurcation fourche souscritique :

$$\dot{x} = r x + x^3$$

qui ont toutes 2 symétries.

III-4-a) Bifurcation fourche surcritique

$$\dot{x} = r x - x^3 \quad (7)$$

- Points fixes et stabilité ($f'(x, r) = r - 3x^2$)

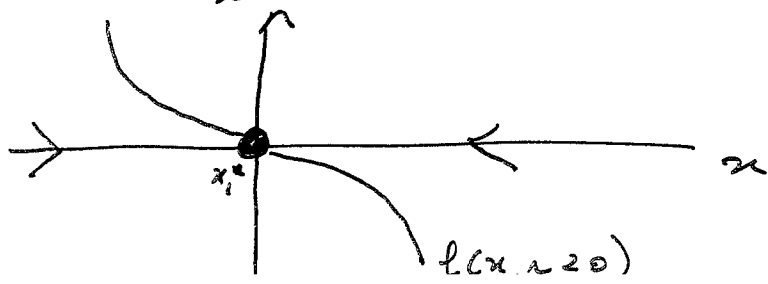
- $x_1^* = 0$ existe $\forall r \in \mathbb{R}$. Il est stable pour $r < 0$, et instable pour $r > 0$.

- $x_2^* = -\sqrt{r}$ existe si $r > 0$. Il est instable.

- $x_3^* = +\sqrt{r}$ existe si $r > 0$. Il est stable.

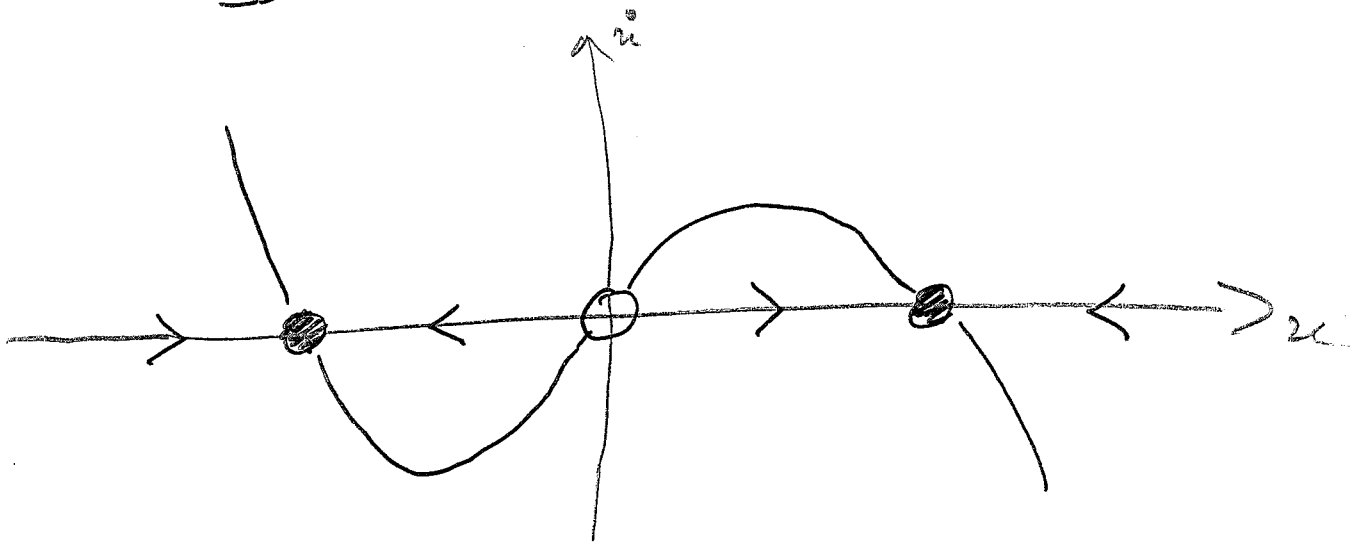
- Portrait de phase et lorsque r varie

- Pour $r \leq 0$: x_1^* est l'unique point fixe, et il est stable.

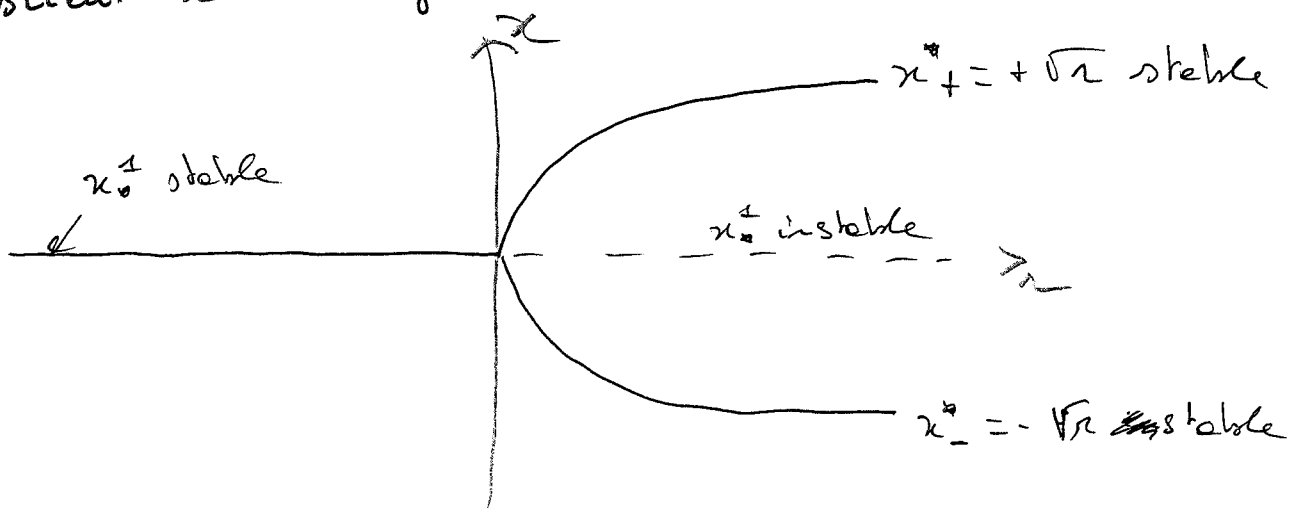


- (21)
- Pour $r = 0$: x_1^* est toujours l'unique point fixe stable, mais dans ce cas dégénéré, la décroissance vers x_1^* n'est plus exponentiellement rapide, mais beaucoup plus lente (la solution de $\dot{x} = -x^3$ est $x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1+2tx_0^2}}$ pour $\frac{1}{\sqrt{2t}}$): ralentissement critique.
Néanmoins, le portrait de phase est similaire au cas $r < 0$.

- Pour $r > 0$: x_1^* perd sa stabilité, les 2 points fixes asymétriques $x_{\pm}^*$ apparaissent et sont stables
 $\Rightarrow$ brisure de symétrie



On obtient le diagramme de bifurcation :



Rg:

- Le terme bifurcation fourche est dû à ce diagramme
- Les points fixes $x_{\pm}^*$ apparaissent après la bifurcation $r = 0$, ce qui justifie le qualificatif de sous-critique ("subcritical").

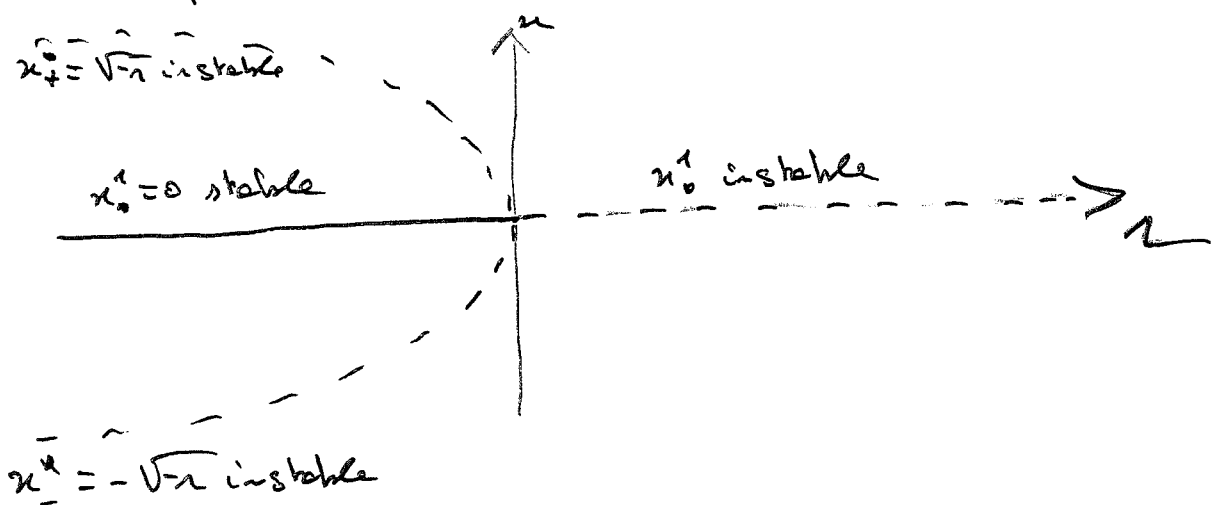
III - 4 - b) Bifurcation fourche sous-critique

Dans le cas sous-critique, le terme cubique de la forme normale (7) a un effet stabilisant $\forall r$: la trajectoire tend vers une solution instable.

Par contre, dans le cas sous-critique ("subcritical"):

$$\dot{x} = rx + \mu^3, \quad (8)$$

l'étude faite en TD a conduit au diagramme de bifurcation



On peut montrer que, pour $r > 0$, la solution tend vers l'infini en un temps fini ("blow-up") pour toutes les conditions initiales.

III - 5) Bifurcations et instabilités hydrodynamiques ⁽²³⁾

De nombreuses instabilités observées dans l'écoulement des fluides peuvent s'expliquer par la théorie des bifurcations et des formes normales.

Prenez l'exemple type de l'apparition de rouleaux de convection dans l'expérience de Rayleigh-Bénard (fig. 1).

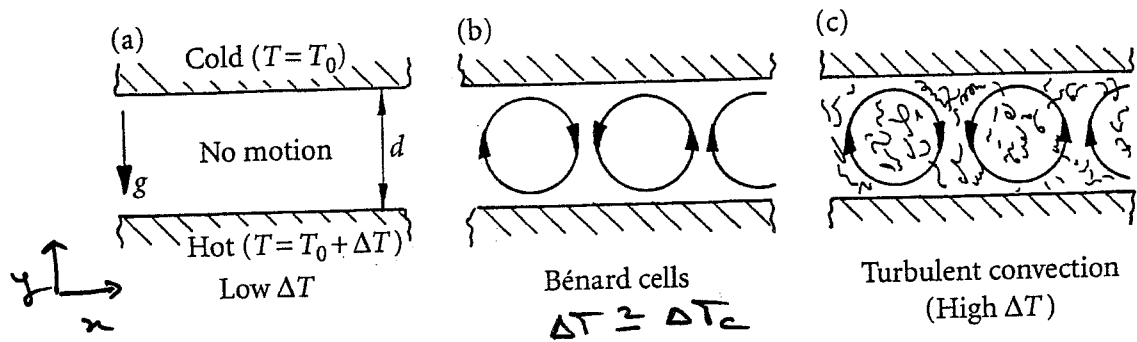


Fig 1: Convection de Rayleigh-Bénard.

Pour obtenir un modèle simple des rouleaux de la fig 1. (b), on considère que la vitesse (et la température) s'écrit sous la forme :

$$v(x, t) = A(t) \sin(kx) \quad (8)$$

où $k = 2\pi/d$ correspond au nombre d'onde d'une structure de taille égale à l'écart d des parois (Fig 1(b)), et la seule inconnue $A(t)$ correspond à l'amplitude de la solution.

Lorsqu'on reporte (8) dans les eq^s de Boussinesq, on réduit un problème de MMC (infinies de degrés de liberté) à un problème à 1 dde ($A(t)$), qui s'écrit :

$$\tau_0 \dot{A} = r A - l A^3 \quad (9) \quad (2)$$

avec :

- τ_0 : temps caractéristique de l'écoulement
- $r = \frac{\Delta T - \Delta T_c}{\Delta T_c}$ le paramètre de contrôle
où ΔT_c est l'écart de température seuil,
au delà duquel apparaissent les rouleaux
de Bénard.
- $l > 0$ est la constante de London.

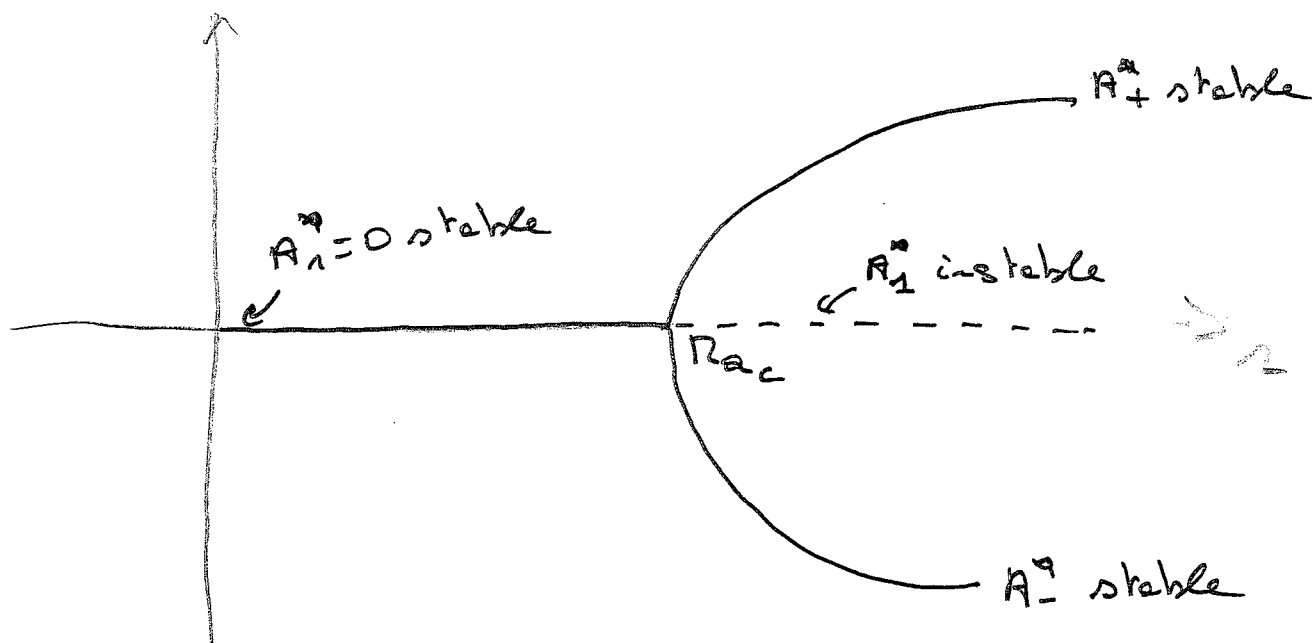
A quelques coefficients près (qui peuvent s'éliminer par changement de variables, cf TD), Eq. (9) correspond à la forme normale (7) d'une bifurcation ~~non~~ ^{sup}-critique de seuil $r = 0$ (i.e., $\Delta T = \Delta T_c$).

Rq1: Si on considère le 1^{er} terme de (9) uniquement, on retrouve le modèle de London $A(t) = A_0 e^{\sigma t}$, $\sigma = r/\tau_0$.

On exprime généralement les résultats en fonction du nombre de Rayleigh critique :

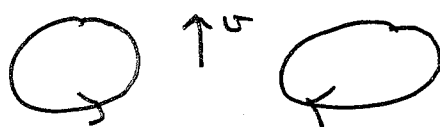
$$Ra_c = \frac{\alpha g \Delta T_c d^3}{\nu \kappa} \approx 1708,$$

et on obtient le diagramme de bifurcation suivant :

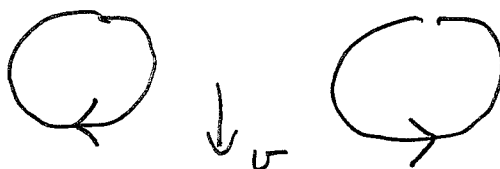


Les 2 solutions asymétriques $A_{+/-}^*$ qui apparaissent au delà du seuil correspondent aux 2 sens de rotations possibles des rouleaux de Bénard :

- A_+^* correspond à $\bar{v}(x, t) > 0$, soit



- A_-^* correspond à $\bar{v}(x, t) < 0$, soit :

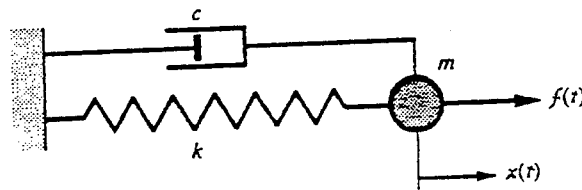


L'apparition de la turbulence à haut nombre de Rayleigh (Fig 6) est la conséquence d'une cascade de bifurcations successives lorsque $Ra \rightarrow \infty$ et surtout, d'après le schéma de Ruelle/Takens, l'apparition d'un attracteur étrange (celui du modèle de Lorenz).

Ch II: Systèmes dynamiques du 2nd ordre.
Portait de phase.

I) Introduction

On considère l'oscillateur mécanique à 3 éléments



La loi de Newton conduit à l'EDO linéaire du second ordre pour le déplacement $x(t)$:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

avec :

- $\omega_0^2 = k/m$ pulsation propre

- $\gamma = c/2m > 0$ coefficient d'amortissement.

② La variation de l'énergie mécanique $E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$ s'écrit (cf cours A.N. L3 Méca) :

$$\frac{dE}{dt} = - C \dot{x}^2 \quad (2)$$

ce qui montre que :

- si $C = 0$: système non amorti, $E(t)$ est constante au cours du temps $\Rightarrow$ système conservatif.
- si $C > 0$: $\frac{dE}{dt} < 0$, l'energy décroît au cours du temps $\Rightarrow$ système dissipatif.

Avec la variable auxiliaire $y = \dot{x}$, on met l'EDO (1) sous la forme du système dynamique linéaire :

$$\underline{\dot{X}} = \underline{A} \underline{X}, \quad \underline{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (3a)$$

avec la matrice :

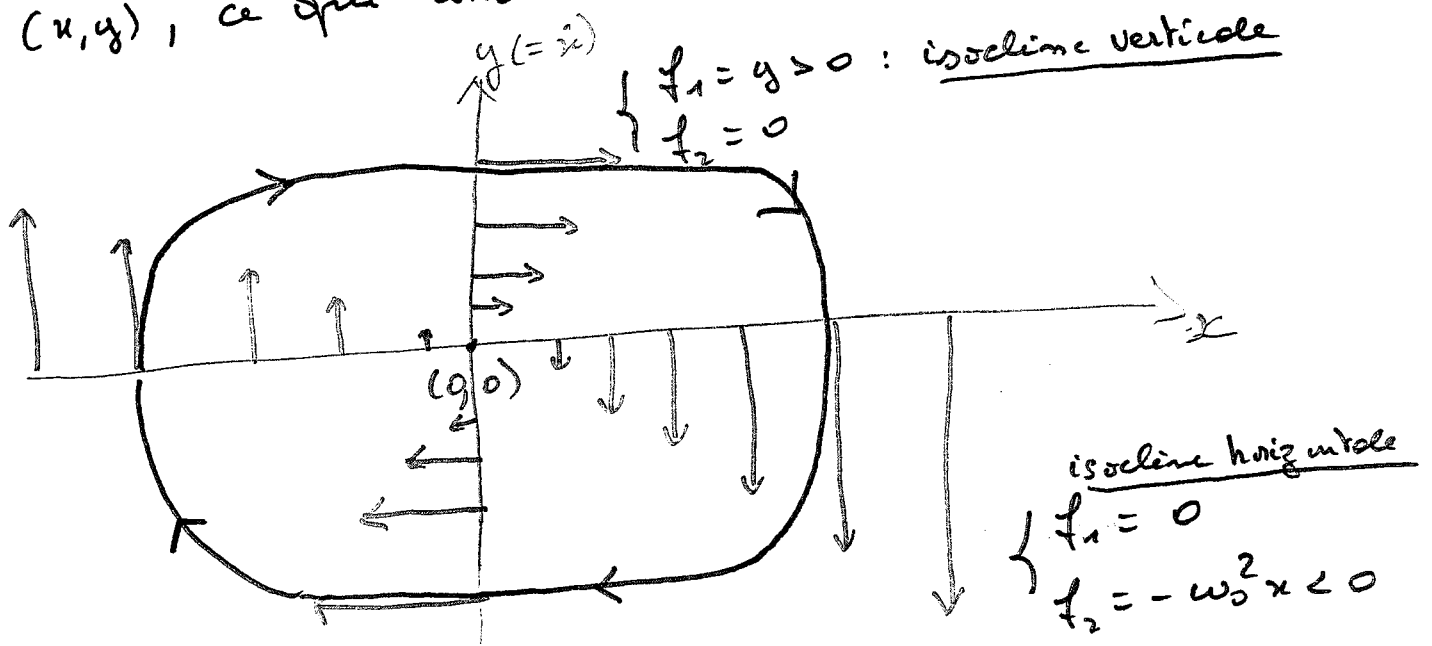
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{bmatrix} \quad (3b)$$

La recherche des points fixes ($\dot{x}_0$ et $\dot{y} = 0$ dans (3)) montre que $(0, 0)$ est l'unique point fixe. Comme dans le cas 1D, on peut considérer que $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ représente le vecteur tangent aux trajectoires dans l'espace des phases (x, y) , ce qui conduit au champ de trajectoires :

Considérons le cas non-amorti $\delta = 0$. Le système dynamique (3) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \quad (= f_1(x, y)) \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \quad (= f_2(x, y)) \end{cases} \quad (4)$$

La recherche des points fixes (ie, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = 0$ dans (4)) montre que $(0, 0)$ est l'unique point fixe. Comme dans le cas 1D, on peut considérer que $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ représente le vecteur tangent aux trajectoires dans l'espace des phases (x, y) , ce qui conduit au champ de ~~trajectoires~~ :



Une fois le champ de directions tracé, on peut achever le ~~portrait~~ portrait de phase en traçant quelques trajectoires.

Il semble que, à la main, les trajectoires forment des courbes fermées qui correspondent à des trajectoires périodiques de l'oscillateur. On peut s'en convaincre

en utilisant la propriété de conservation des systèmes non amorti (cf Eq. (2)) :

$$E \equiv \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \underline{c_{ke}}$$

$$\Rightarrow \dot{y}^2 + \omega_0^2 x^2 = \underline{c_{ke}}$$

Ce qui montre que les trajectoires sont des ellipses de centre $(0,0)$: elles correspondent aux lignes de niveau de l'énergie mécanique (c'est une propriété très générale des systèmes conservatifs, cf. problème 1 du TD 2).

II) Portrait de phase des systèmes linéaires

Dans l'espace des phases 1D, la dynamique est très restreinte : les trajectoires $\nearrow$ ou $\searrow$ de façon monotone, ou restent constante. Dans un espace des phases à dimension ≥ 2 , il y a + de place pour manœuvrer, et on observe des trajectoires qui ont des comportements beaucoup + complexes. Afin de présenter cette dynamique, nous allons considérer le cas de systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$, qui joue un rôle important dans l'étude de la stabilité des systèmes non-linéaires :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} & (5a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{x}(0) = \underline{x}_0 & (5b) \end{cases}$$

II-1) Cas où $\underline{A}$ est diagonale

(5)

On considère d'abord le cas où le système (5) s'écrit avec :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

les val. propres sont $\lambda_1 = a$ et $\lambda_2 = -1 < 0$. Le système (5) s'écrit pour les composantes :

$$\dot{x} = ax, \quad \dot{y} = -y$$

et la solution de ce système découplé est :

$$x(t) = x_0 e^{at}, \quad y(t) = y_0 e^{-t}.$$

Dans tous les cas, on a $y(t) \rightarrow 0$, et les portraits de phases pour $\neq$ valeurs de a sont représentés sur la figure 1. Il y a 2 grand cas à considérer :

1) Cas $a < 0$: Dans ce cas $x(t) \rightarrow 0$, et toutes les trajectoires tendent vers le point fixe $X^* = 0$:

- Fig (a) et (b) : On remarque qu'il y a 2 directions privilégiées : les axes horizontal et vertical : une trajectoire qui commence par $x_0 \in$ l'un de ces axes reste sur cet axe.
- Fig (b) : cas particulier où $a = -1$ (i.e, 2 valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$) toutes les directions sont privilégiées.

On verra + tard que dans le cas $a < 0$ le point fixe $\underline{x}^* = (0, 0)$ est asymptotiquement stable.

2) cas $a > 0$: (Fig. (d)) : On a
$$\begin{cases} x(t) \rightarrow \pm \infty \\ y(t) \rightarrow 0 \end{cases}$$

La plupart des trajectoires tendent vers $\pm \infty$, sauf les trajectoires partant de l'axe $x=0$, qui tendent vers $\underline{x}^* = 0$.

Le point fixe $\underline{x}^* = 0$ est alors appelé point col ou selle.

On dit que l'axe $x=0$ est un sous espace (ou variété) stable, noté E^s pour les systèmes linéaires, qui est défini généralement par :

$$E^s = \{ \underline{x}_0 \mid \underline{x}(t) \rightarrow \underline{x}^* \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty \}$$

De même, $y=0$ est la variété instable, définie par en prenant les temps à rebours :

$$E^u = \{ \underline{x}_0 \mid \underline{x}(t) \rightarrow \underline{x}^* \text{ lorsque } t \rightarrow -\infty \}$$

3) cas $a = 0$: cas dégénéré (4 o.p. nulle)

l'axe $y=0$ contient une infinité de points fixes stables.

2 Le cas général

7

Dans le cas diagonal de la section précédente, on a vu que les axes $\vec{d} = \vec{e}_n$ et $\vec{e}_y$ étaient des directions privilégiées, telles que les trajectoires suivent des lignes droites, et étaient géométriquement importantes pour dessiner les portraits de phases.

Recherchons, dans le cas général, l'analogue de ces directions privilégiées, en écrivant la solution ~~générale~~ du système (5) sous la forme :

$$\underline{X}(t) = e^{\lambda t} \underline{d}, \text{ avec } \underline{d} \neq \vec{0} \text{ vecteur constant.}$$

En le reportant dans (5a), on obtient :

$$\underline{A} \underline{d} = \lambda \underline{d}$$

ce qui montre que les directions privilégiées de la dynamique sont les vecteurs propres de A.

Plus généralement, la solution générale de (5) peut s'écrire comme la combinaison linéaire de vecteurs propres :

$$\underline{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \underline{d}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \underline{d}_2$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ dépendant des cond. initiales (4b) :

$$\underline{X}_0 = C_1 \underline{d}_1 + C_2 \underline{d}_2$$

Pu tracer les portraits de phases
à partir des v.p. et vecp. prop. de A.

II-2-1 La dynamique linéaire

(8)

On va étudier les trajectoires dans l'espace des phases de l'oscillateur linéaire amorti (3a)-(3b), avec $\delta > 0$.

Les val. propres de A s'écrivent :

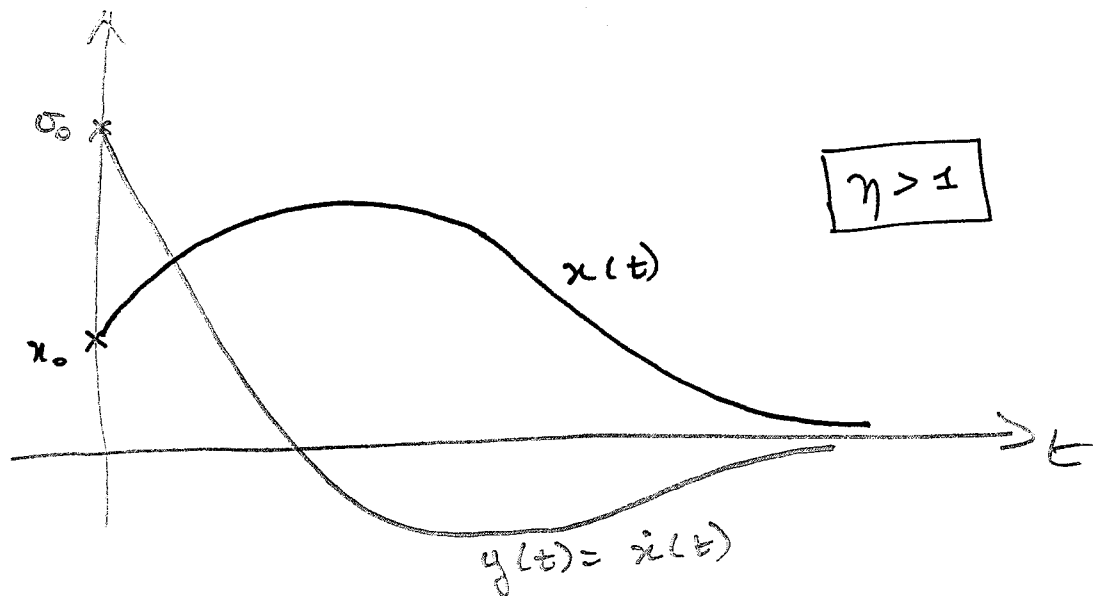
$$\lambda_1 = -\delta + \omega_0 \sqrt{\eta^2 - 1}$$

$$\lambda_2 = -\delta - \omega_0 \sqrt{\eta^2 - 1}$$

avec $\eta = \frac{\delta}{\omega_0} > 0$ l'amortissement relatif. Suivant la valeur de δ , trois dynamiques différentes se produisent :

1^{er} Cas : $\eta > 1$: les v.p. $\in \mathbb{R}^+$, et : $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

On observe la trajectoire suivante à partir de $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$:

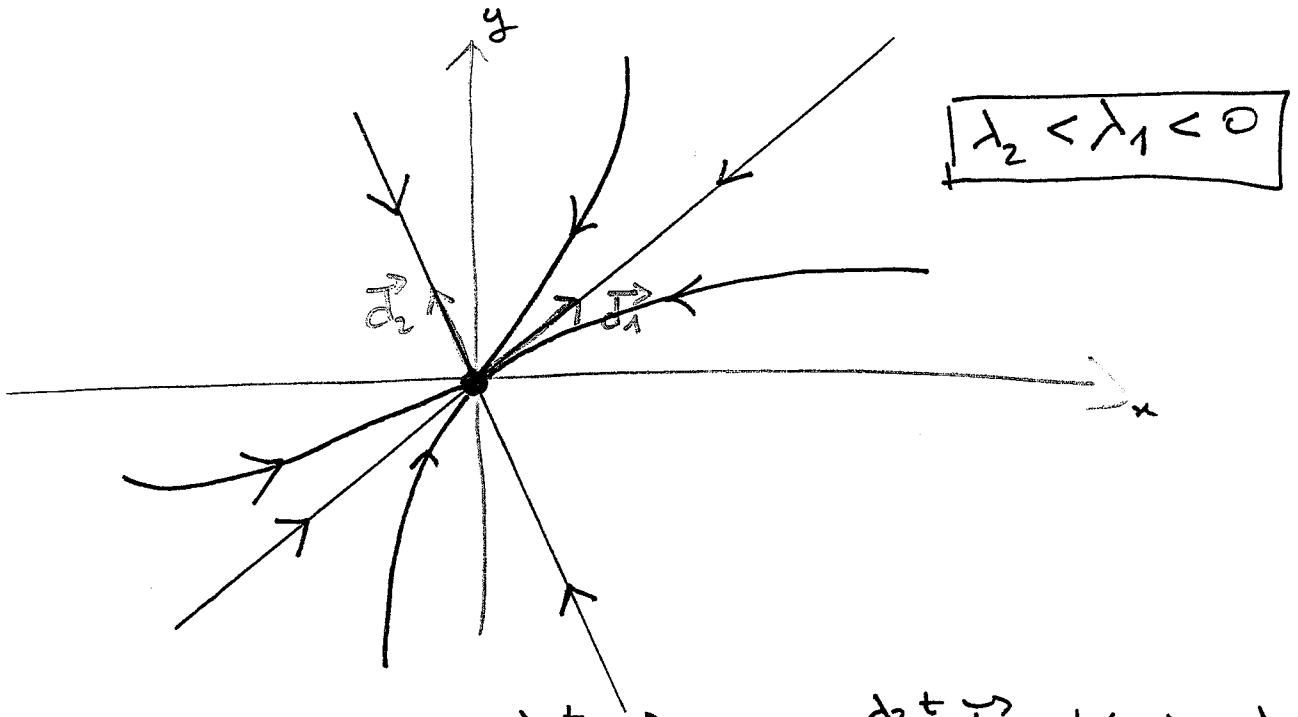


On observe une décroissance monotone vers $\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ le régime $\eta > 1$ est appelé amortissement surcritique

On observe les trajectoires suivantes dans l'espace des phases:

(9)



Les solutions $\vec{X}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{d}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{d}_2$ décroissent monotonement vers 0. Puisque $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ on a, quelques soient les cond. init. pour $t \gg 1$:

$$\vec{X}(t) \approx e^{\lambda_1 t} \vec{d}_1$$

ce qui montre que les trajectoires approchent le point stable $\vec{X}_s = \vec{0}$ de façon tangente à la direction stable la + lente $\vec{d}_1$, qui est associée à la v.p. de module le + petit (ici: λ_1).

On dira alors que X_s est un noeud stable.

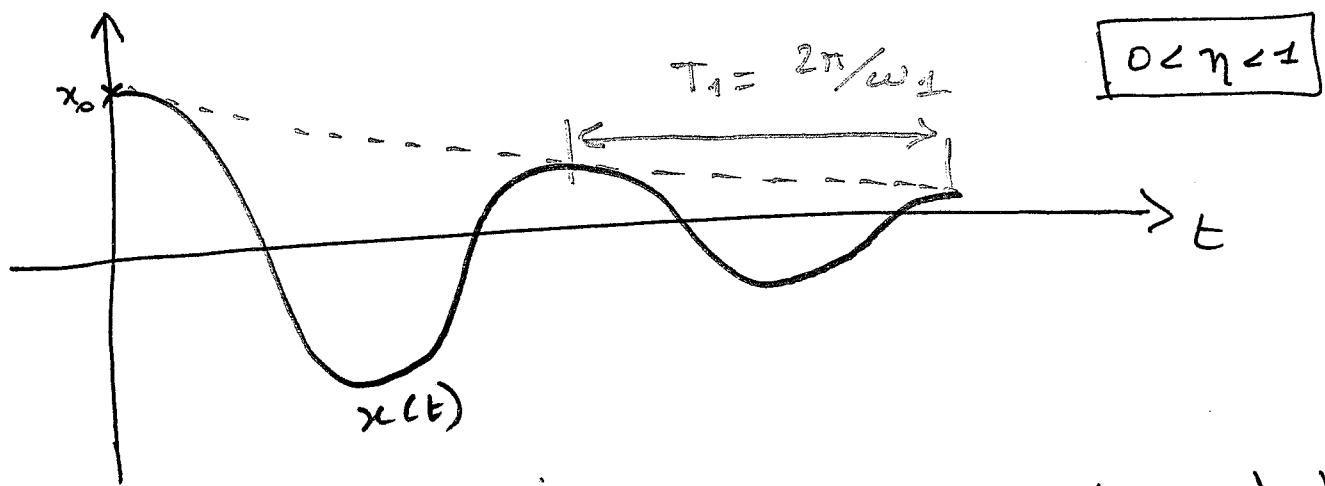
2^{ème} cas: $\eta < 1$: les v.p. ont complexés conjugués:

$$\lambda_1 = -\lambda + i\omega_1$$

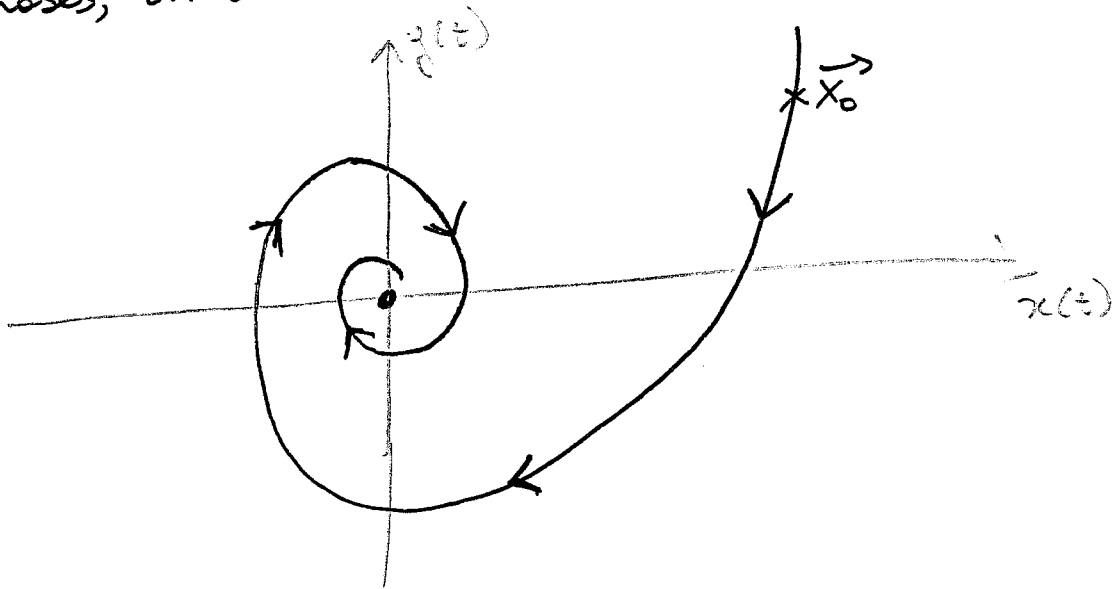
$$\lambda_2 = -\lambda - i\omega_1$$

$$\text{avec: } \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1-\eta^2}$$

la pseudo-pulsation



La solution s'amortit en oscillant autour du point stable
 $\vec{X}_* = \vec{0} \Rightarrow$ amortissement sous-critique. Dans l'espace
 des phases, on obtient :



Les trajectoires tendent vers $X_* = \vec{0}$ en spiraloant :
 on dit que X_* est un foyer stable.

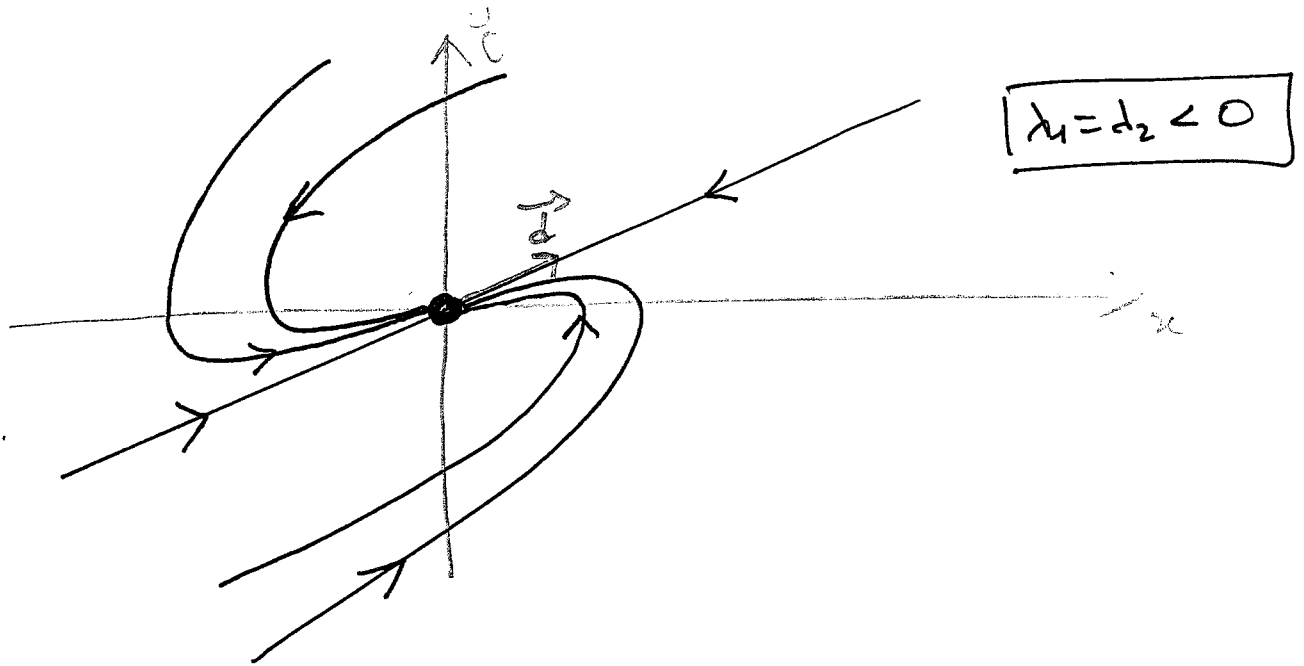
3^{ème} cas : $\eta = 1$ c'est un cas dégénéré où il y
 a une valeur propre double :

$$\lambda = -\omega_0 < 0$$

et, dans ce cas, une seule direction propre (théorème de Jordan)

c'est un cas particulier appelé amortissement critique.

Les trajectoires dans l'espace des phases ont une allure similaire au cas surcritique, sauf qu'il y a 1 seule direction privilégiée $\vec{d}$:



X_0 est un nœud dégénéré (stable).

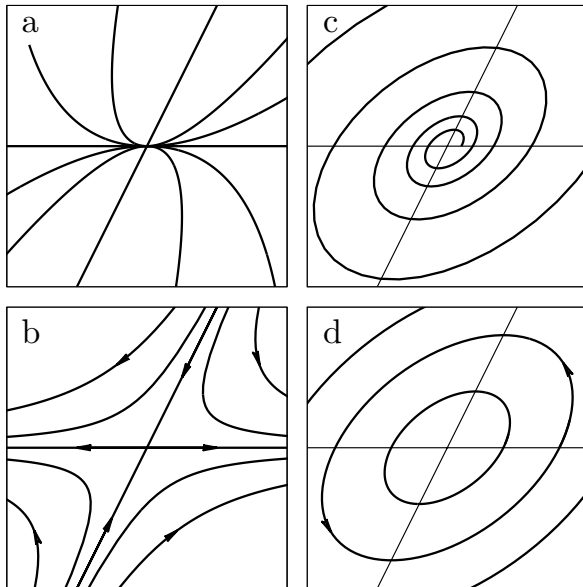
II-2-2) Stabilité des points fixes

Les $\neq$ types de portraits de phases que l'on observe pour des EDO linéaires de $\mathbb{R}^2$ sont représentés dans la slide N°45 (à compléter). Les définitions suivantes permettent de caractériser les $\neq$ points fixes. Elles sont valables $\forall$ systèmes d'EDO (linéaires ou non), en dimensions quelconques.

Cours II : Portrait de phase des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$ (2/2)



Valeurs propres distinctes : $\lambda_1 \neq \lambda_2$



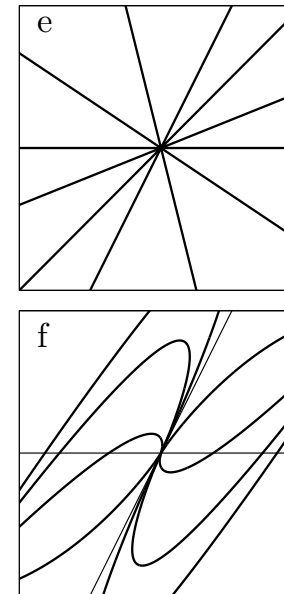
Cas réel : $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$



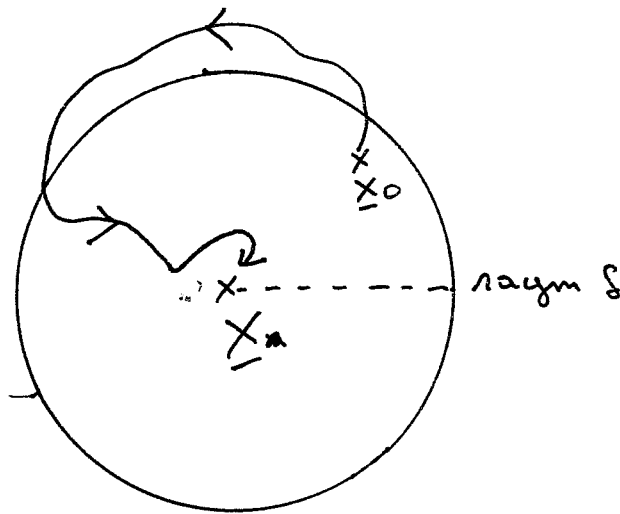
Cas complexe : $\lambda_R \pm i \lambda_I, \lambda_I \neq 0$



Valeurs propres égales : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

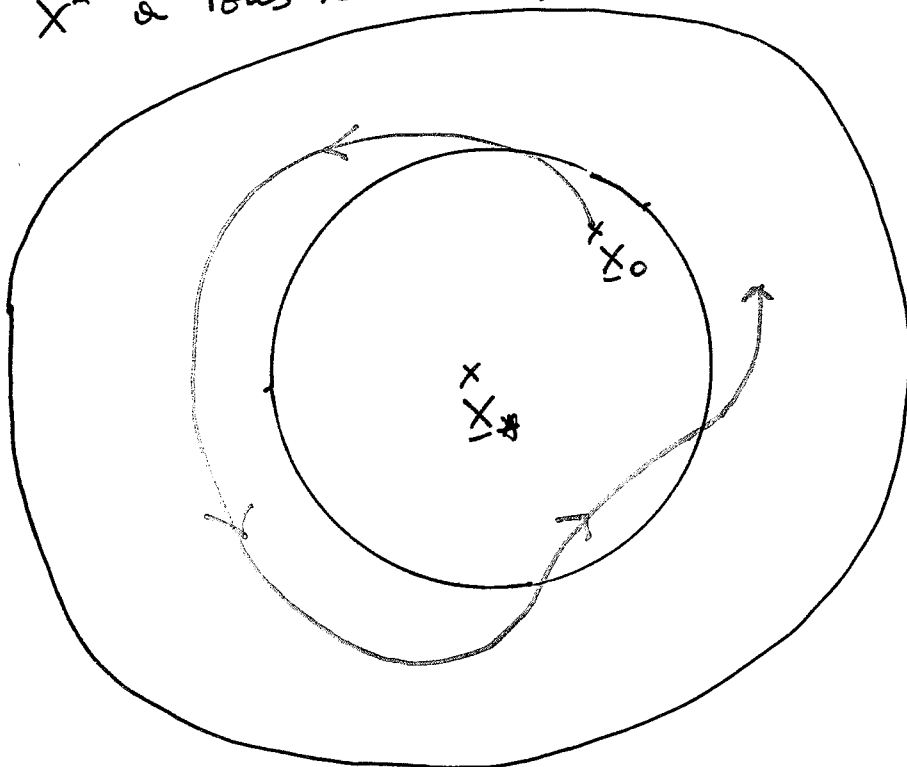


Déf 1: Un point fixe $\underline{x}^*$ est attrayant si,
 $\forall \underline{x}_0$ suffisamment proche de $\underline{x}^*$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{x}(t) = \underline{x}^*$.
 Si non, le point fixe est dit répulsif.



$\underline{x}^*$ est un point attrayant

Déf 2: Un point fixe est stable au sens de Lyapounov
 si $\forall \underline{x}_0$ suffisamment proche de $\underline{x}^*$, $\underline{x}(t)$ reste "proche"
 de $\underline{x}^*$ à tous les temps



$\underline{x}^*$ stable au sens de Lyapounov.

Ces 2 notions sont proches mais pas identiques, p. ex. j'😊
pour le slide n°8 :

* Fig d : Le centre x^* est Liapounov stable mais
pas attractif.

* Fig (a), (c), (e) et (f) : x^* est attractif (et aussi
Liapounov stable) si les $\lambda_i < 0$.

* Fig (b) : Le col est toujours répulsif.

On en déduit plus 2 définitions de la stabilité :
la + importante est la première.

Def 3 : (Stabilité asymptotique)

Si un point fixe est attractif et Liapounov stable

$\Rightarrow$ il est stable asymptotiquement (ou, plus simplement, il est stable)

Def 4 : (Stabilité neutre)

Si un point fixe est Liapounov stable mais pas attractif

$\Rightarrow$ il est stable neutrement

III) Systèmes non-linéaires

(14)

On considère maintenant le syst. dyn. du 2nd ordre:

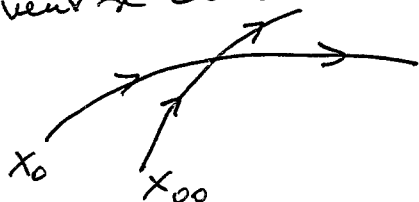
$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \quad (6a)$$

avec $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\underline{f}(u, y) = \begin{pmatrix} f_1(u, y) \\ f_2(u, y) \end{pmatrix} \quad (6b)$

III-1) Généralités sur les portraits de phases

On va apprendre maintenant à dessiner le portrait de phases d'un syst. dyn. 2D, dont les principales caractéristiques sont représentées sur la figure (slide N°6). Un portrait de phases typique est constitué de:

- Points fixes $\underline{x}^*$, comme A, B ou C, qui correspondent à des états d'équilibre du système: $\underline{f}(\underline{x}^*) = 0$.
- La stabilité des points fixes est obtenue en linéarisant le système (6a) autour de $\underline{x}^*$ et en appliquant les résultats du chap II.
- On retrouvera donc les mêmes objets que dans le cas linéaire (noeud attractif/répulsif, col, ...) mais aussi des cycles limites (p. ex. D sur la figure) qui n'existent pas dans les systèmes linéaires.
- On pourra aussi se pencher de l'étude de ces points fixes les trajectoires dans l'espace des phases. On rappelle le principe de consistance: 2 trajectoires ne peuvent se croiser dans l'espace des phases:



pas possible: il n'existe qu'un seul futur! C'est une propriété mathématique des EDO autonomes.

III-2) Analyse de stabilité linéaire

En 1D, si on considère une perturbation autour d'un point fixe x^* de la forme:

$$x(t) = x^* + \delta x(t)$$

alors la linéarisation de l'EDO $\dot{x} = f(x)$ conduirait à:

$$\dot{\delta x} = \lambda \delta x$$

et on pouvait conclure que:

- si $\lambda < 0$: x^* est stable
- si $\lambda > 0$: x^* est instable
- si $\lambda = 0$: l'analyse de stabilité linéaire ne permet pas de conclure.

Par analogie en n Dimensions, la linéarisation de l'EDO (6) conduit à :

$$\dot{\underline{\delta x}} = [\underline{\nabla f(x^*)}] \underline{\delta x}, \quad (7)$$

et l'analyse de stabilité est basée sur l'étude du signe des valeurs propres λ_i du Jacobien $\underline{\nabla f(x^*)}$.

On pourra conclure tant que les v.p. sont non nulles.

Définition (point fixe hyperbolique)

Un point fixe $\underline{x^*}$ est hyperbolique si les val. propres de $[\underline{\nabla f(x^*)}]$ sont telles que:

$$\forall i, \quad \operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0.$$

Si non, $\underline{x^*}$ est un point fixe dégénéré.

(16)

Pour $\underline{x}^*$ hyperbolique, le théorème de Hartman-Grobman (cf. Fig 7 et 8) énonce que, au voisinage de $\underline{x}^*$, le portrait de phase du système dynamique est topologiquement équivalent au portrait de phase du système linéarisé $\dot{\underline{x}} = [\nabla f(\underline{x}^*)] \underline{x}$. On peut alors dire que :

1) Cas hyperbolique:

- si $\forall i, \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$: $\underline{x}^*$ est stable.
- si $\exists i / \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$: $\underline{x}^*$ est instable.

En conséquence, les foyers, nœuds (attractifs ou répulsifs) sont dits structurellement stables, car leur topologie n'est pas changée par l'ajout de non-linéarités. De +, au voisinage de $\underline{x}^*$ on retrouve des trajectoires analogues au cas linéaire (cf. Fig. 8).

2) Cas particulier des centres (v.p. imaginaires pures $\lambda = \pm i\omega$)

Les centres ($\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$) ne sont pas hyperboliques et l'ajout de petites non-linéarités peut les transformer en foyers stables ou instables. Il faut faire une analyse + fine (non linéaire). Par centre, dans les cas particuliers (physiquement intéressants) où il existe un invariant ou système dynamique, plus l'analyse de stabilité linéaire permet de conclure : le centre est structurellement stable. Un exemple est donné par le pendule non-linéaire de TD 2.

3) Variétés invariantes (Variété: sous-espace de M^4 , non nécessairement plan) (17)

Une autre conséquence du théorème de H-G est l'existence (locale au moins) de variétés invariantes stable (W_{loc}^s) ou instable (W_{loc}^u) qui sont tangentes aux sous-espaces E^s et E^u engendrés par les valeurs propres (cf. chapitres et Fig. 8).

4) Cas dégénéré (cf. Cours de M2)

Lorsque le point est dégénéré, il existe une variété dite centrale, qui est tangente à l'espace E^0 engendré par la direction associée à la valeur propre nulle.

On peut alors se placer sur cette variété centrale pour faire une analyse non linéaire de la stabilité d'un point dégénéré (hors programme).

EDO et Syst. Dynamiques

Ch

Ch III: Syst. dynamique du second ordre.
Cycles limites - Bifurcations.

I) Rappel sur l'analyse de stabilité linéaire

Soit l'EDO non-linéaire du second-ordre:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$$

L'analyse de stabilité au point fixe $\underline{x}^*$ (t.q. $\underline{f}(\underline{x}^*) = 0$) se fait en 2 étapes:

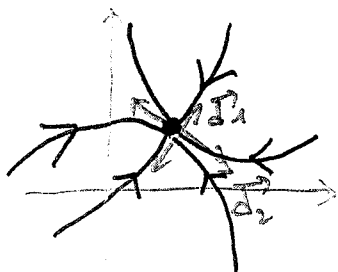
1) On calcule la matrice du système linéarisé

$$\underline{A} = \left[\underline{D} \underline{f}(\underline{x}^*) \right]$$

On calcule les val. propres. λ_1 et λ_2 de $\underline{A}$.

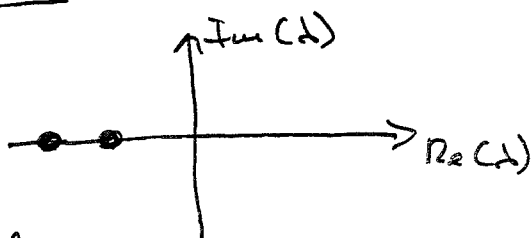
(rappel: $\det(\underline{A}) = \lambda_1 \lambda_2$, $\text{tr}(\underline{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$)

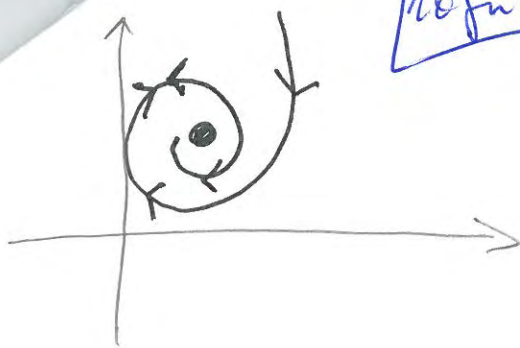
2) Si λ_1 et $\lambda_2 \neq 0$, alors $\underline{x}^*$ est hyperbolique et le théorème de Grobman - Hartman permet de conclure. En particulier, voilà les 2 cas stables:



Nœud attractif

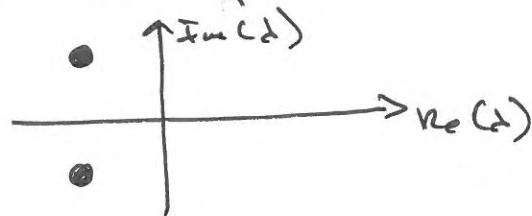
• cas réel: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.





Requis 10 Cas complexe $\text{Re}(\lambda_1) < \text{Re}(\lambda_2) < 0$

foyer attractif



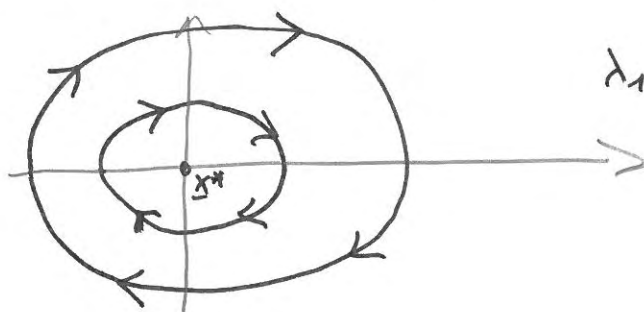
De plus, le théorème de Grobman Hartman dit que le portrait de phase du système ressemble à son linéarisé :

$$\underline{\dot{X}} = \underline{A} \underline{X}$$

$\Rightarrow$ on dit alors que un point hyperbolique est structurellement stable.

3) Si $\text{Re}(\lambda_i) = 0$, $\underline{X}^*$ est dégenéré et le portrait de phase n'est plus structurellement stable, sauf pour quelques cas particuliers importants qui viennent de la modélisation de systèmes physiques.

Le cas le plus important concerne les centres non-linéaires:



$$\lambda_1 = \lambda_2 = \pm i\omega$$

qui sont stables au sens de Liapounov. On dispose du théorème :

Thm Si $E(t)$ est une quantité conservée (ou constante temps) du système $\underline{\dot{X}} = f(\underline{X})$, et que $\underline{X}^*$ est un minimum (local) de E , alors $\underline{X}^*$ est un centre pour le système $\underline{\dot{X}} = f(\underline{X})$.

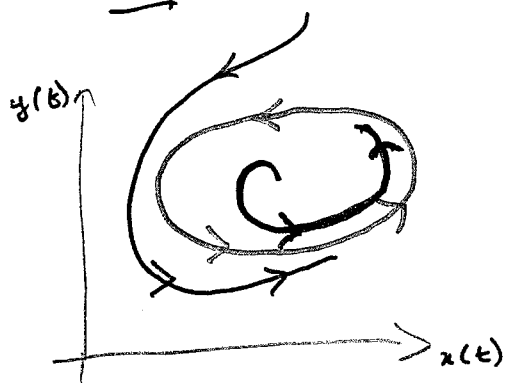
(3)

exemple: Pour un système mécanique, $E(t)$ représente habituellement l'énergie, ou l'Hamiltonien. Pour le pendule non-linéaire sans frottement, on montre que les points $X^* = \begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des centres dans le TD 2.

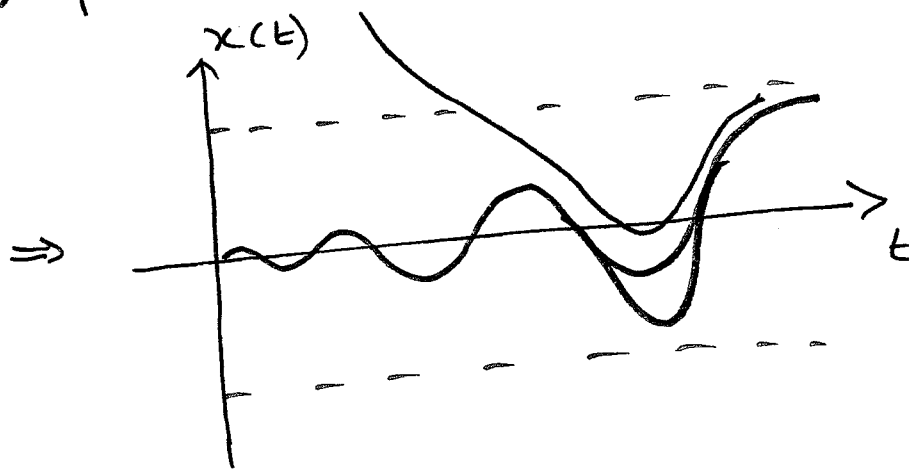
II) Les cycles limites

Dans les systèmes du 2nd ordre, il existe un autre type d'objets ^(attracteurs) ~~appelés~~ autres que les nœuds et foyers, qui attirent les trajectoires: les cycles limites, que l'on définit comme une trajectoire ~~isolée~~ fermée qui est isolée dans l'espace des phases.

ex: Un centre n'est pas un cycle limite.



cycle limite stable



très important en sciences:

- * C'est un phénomène uniquement présent dans les systèmes non-linéaires
- * Représente des systèmes présentant des oscillations entretenues, sans qu'il y ait un retour de force périodique.

(4)

exemples :

- Battements du cœur
- Vibrations dans les structures mécaniques (ponts, ailes d'avion, ...)
- Aléas de Von Kármán dans le sillage d'un cylindre pour $Re_D = \frac{U D}{\nu} \geq 50$.

Il n'existe pas de méthode générale pour détecter analytiquement un cycle limite, mais on peut l'observer expérimentalement ou numériquement. Si plus on pense en avoir détecté un, il faut :

* passer en polaire : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

* utiliser le théorème de Poincaré - Bendixson (cf + lun)

ou, si on pense qu'il n'y en a pas, essayer des techniques comme les fonctions de Lyapounov (cf cours de M2R).

III) Théorème de Poincaré - Bendixson

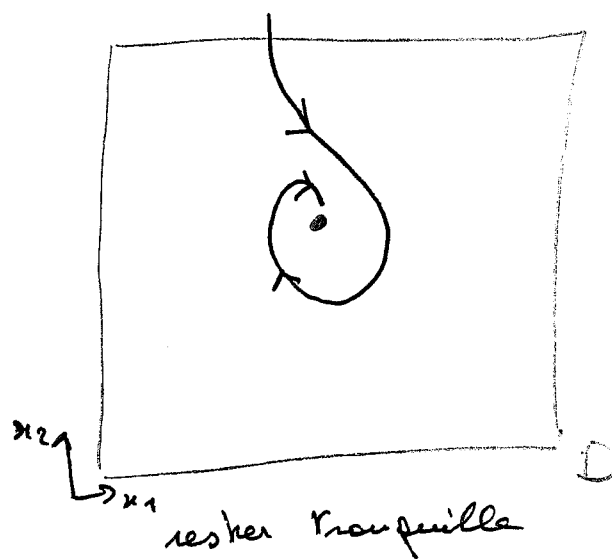
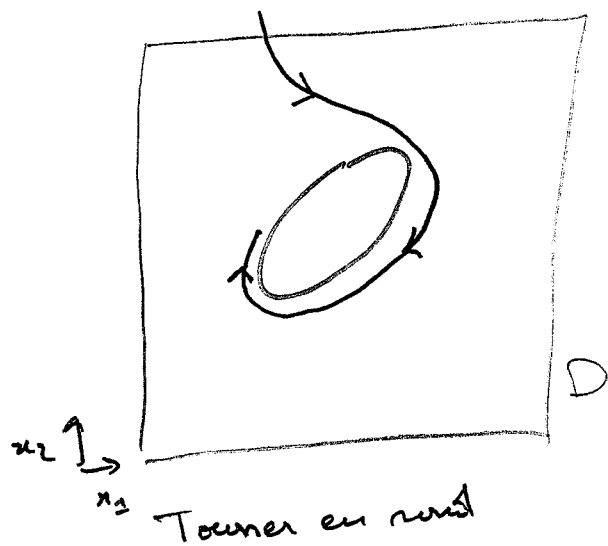
Ce théorème (démonstration difficile) est un résultat clé de la science du non-linéaire, car il implique que des trajectoires « compliquées » (ie : chaotiques) ne peuvent exister dans l'espace des phases plan.

Théorème (Poincaré-Bendixon)

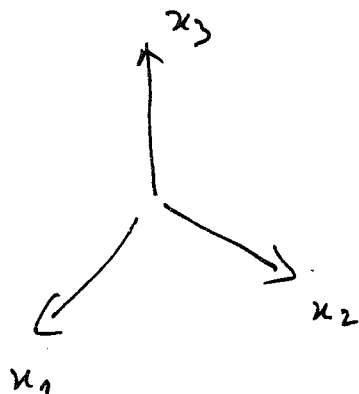
Une trajectoire qui reste confinée dans un domaine fermé $D \subset \mathbb{R}^2$ de l'espace des phases peut seulement, lorsque $t \rightarrow +\infty$:

- tourner en rond
- rester tranquille

rien de + compliqué ne peut arriver.

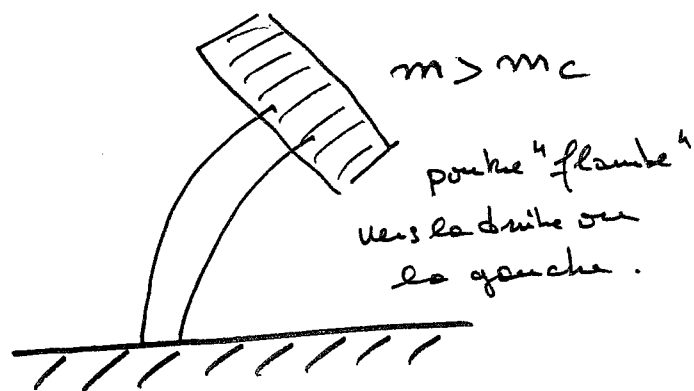
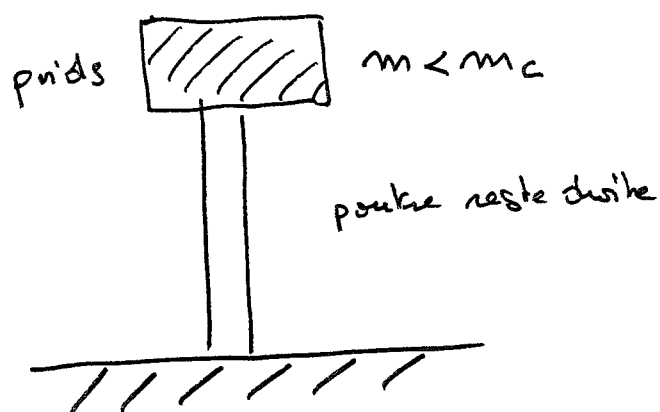


Pour avoir du chaos, il faut être dans l'espace des phases de dimension $n \geq 3$, il peut y avoir d'autres types d'attracteurs: les attracteurs étranges

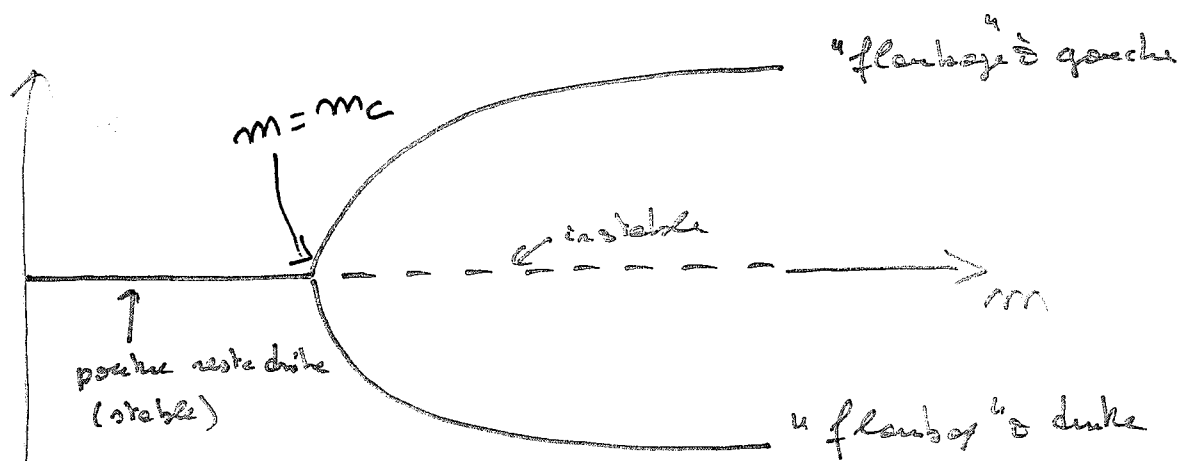


IV) (Le retour des) Bifurcations

Dans certains systèmes dynamiques, la solution observée a une forte dépendance à un paramètre $\mu \in \mathbb{R}$. Par exemple, dans le cas du flambement d'une poutre, ce paramètre est le poids m :



On peut modéliser ce problème par un système dynamique à 1 DDL en mécanique Lagrangienne. Ce flambage est dû à une bifurcation fourche sous-critique :



On va s'intéresser aux Bifurcations à un seul paramètre de contrôle μ :

19/04/06

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \mu), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

qui sont appelées bifurcations de codimension 1. On retrouvera les analogues aux 3 bifurcations de points fixes qui ont été vues au chap. I (pour $n=1$) :

- Nœud - col
- Transcritique
- Fourche (surcritique / sous-critique).

Ces bifurcations correspondent à des cas où les valeurs propres de $[Df(x^*)]$ sont réelles. Dans le cas où les val. propres sont complexes, on a une bifurcation qui n'existe pas dans le cas 1D :

- bifurcation de Hopf (surcritique / sous-critique)

qui apparaît lorsque un système physique se met à osciller spontanément lorsque $\mu > \mu_c$.

IV-1) Bifurcation Nœud-col

C'est le mécanisme de destruction / création de points fixes, dont la forme normale est :

06/12/06 : signale l'ener

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

● Recherche des points fixes:

(8)

• si $\mu < 0$: $\begin{cases} x_{+/-}^* = \mu \pm \sqrt{-\mu} \\ y_{+/-}^* = 0 \end{cases}$ 2 points fixes

• si $\mu = 0$: $\begin{cases} x^* = 0 \\ y^* = 0 \end{cases}$ 1 seul point fixe

• si $\mu > 0$: pas de point fixe

● Etude de la stabilité pour $\mu \leq 0$:

$$\nabla f(x_{+/-}^*, \mu) = \begin{bmatrix} 2x_{+/-}^* & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

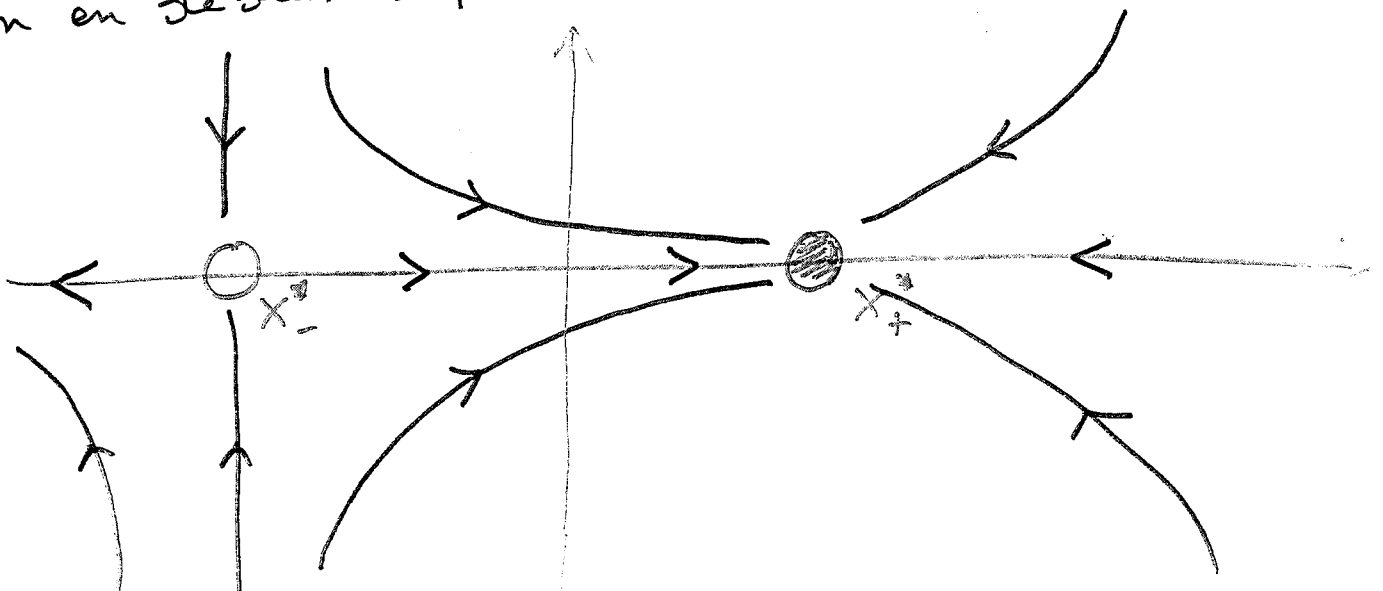
et $\lambda_1 \lambda_2 = \det \nabla f(x^*, \mu) = -2x^*$

Ce qui implique que:

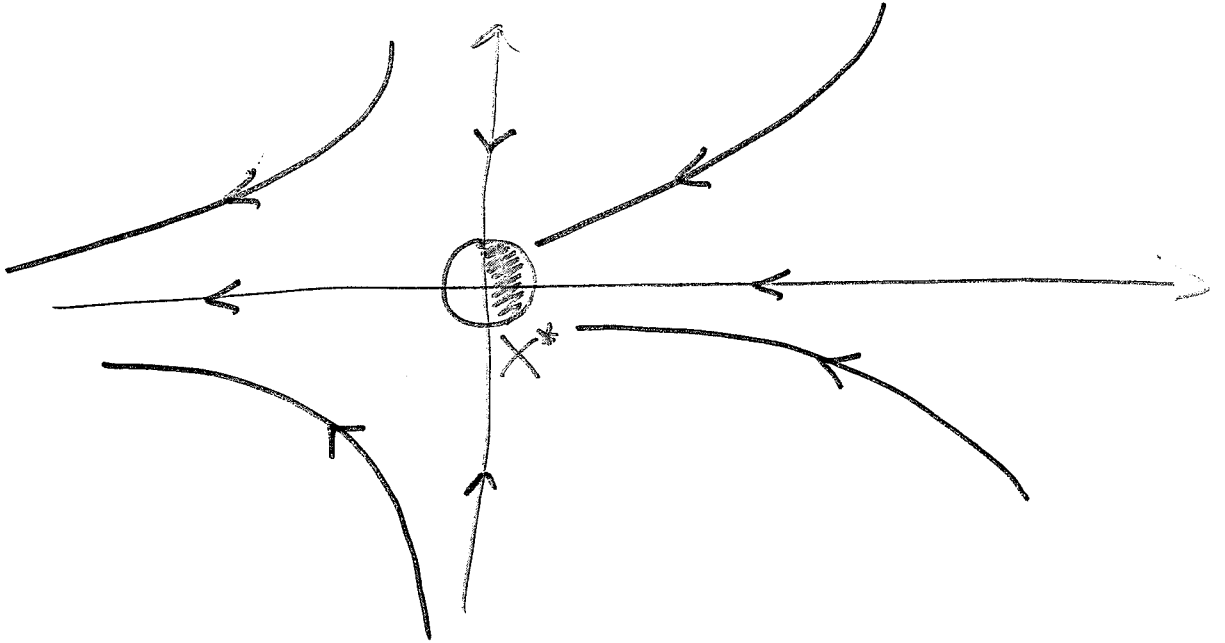
• Pour $\mu < 0$: $\begin{cases} x_+^* \text{ est un } \underline{\text{noeud}} \text{ attractif (stable)} \\ x_-^* \text{ est un } \underline{\text{col}} \text{ (instable)} \end{cases}$

• pour $\mu = 0$: cas dégénéré. ($\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$)

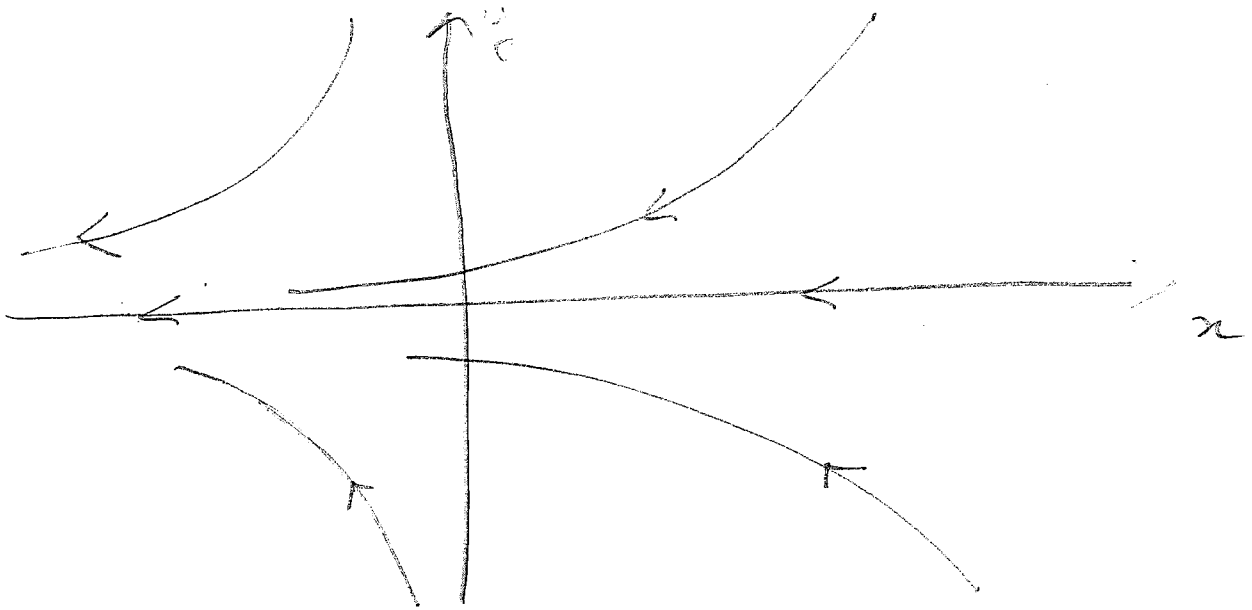
On en déduit les portraits de phase suivants pour $\mu \leq 0$:



puis, lorsque $\mu \nearrow 0^-$, le nœud et le col se rapprochent et fusionnent pour $\mu = 0$, donnant un portrait de phase très particulier: ⑨



Puis, pour $\mu > 0$ il n'y a plus de points fixes:



Rq: Comme dans le cas 1D, toute la dynamique se fait sur l'axe $y = 0$.

IV-2) Bifurcations transcritiques et fourches

(10)

D'une manière identique à précédemment, on peut écrire les formes normales 2D des autres bifurcations vues dans le chap I, soit:

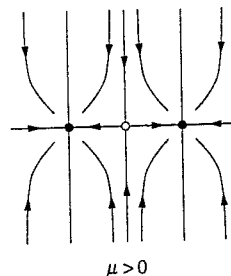
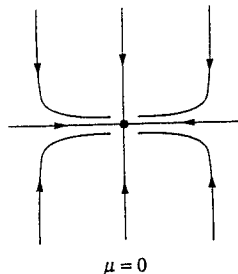
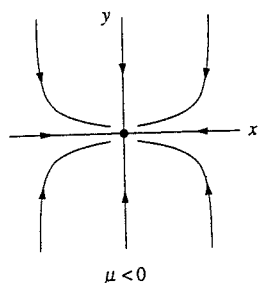
- Bifurcation transcritique:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

- Bifurcation fourche super-critique

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

donc les portraits de phases suivants ont été tracés en 2D :



- Bifurcation fourche sous-critique

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Remarque (Caractérisation d'une bifurcation) A la vue des bifurcations ci-dessus, une première caractérisation d'un point de bifurcation $(\vec{x}^*, \mu_c)$ est la suivante :

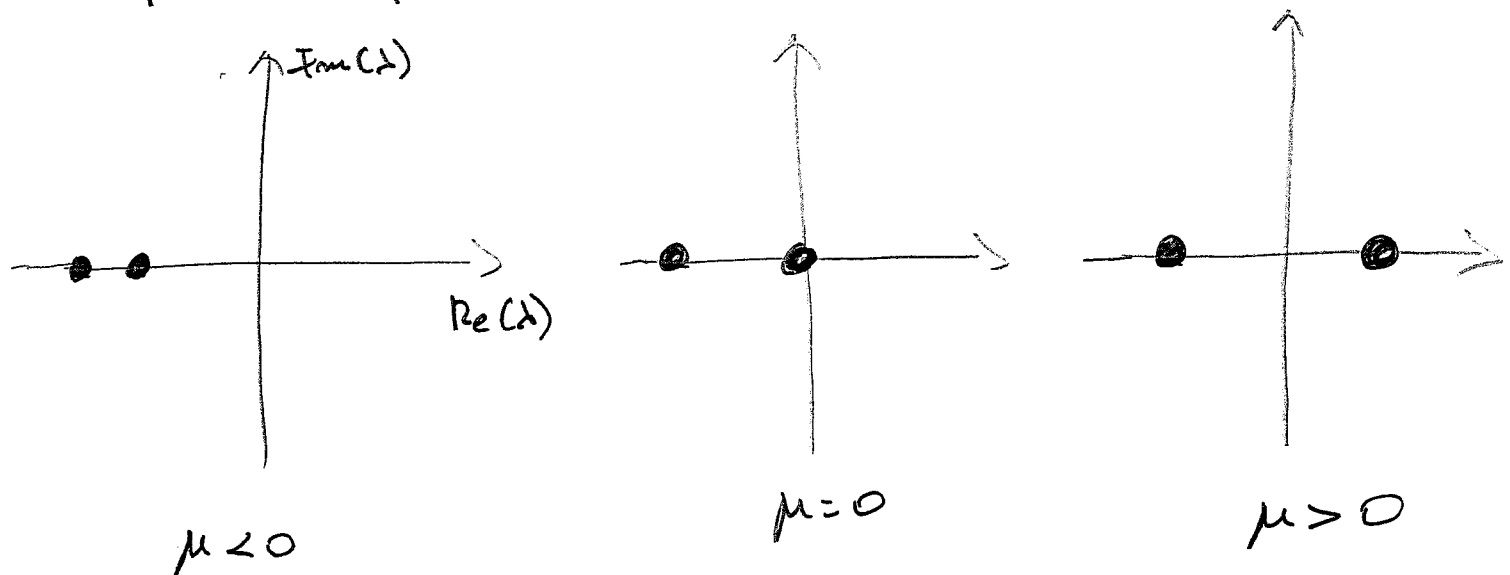
$$\det [\underline{\underline{\nabla f}}(x^*, \mu_c)] = 0$$

Néanmoins, cette def. n'est pas valable pour la prochaine bifurcation que nous allons voir: la bifurcation de Hopf.

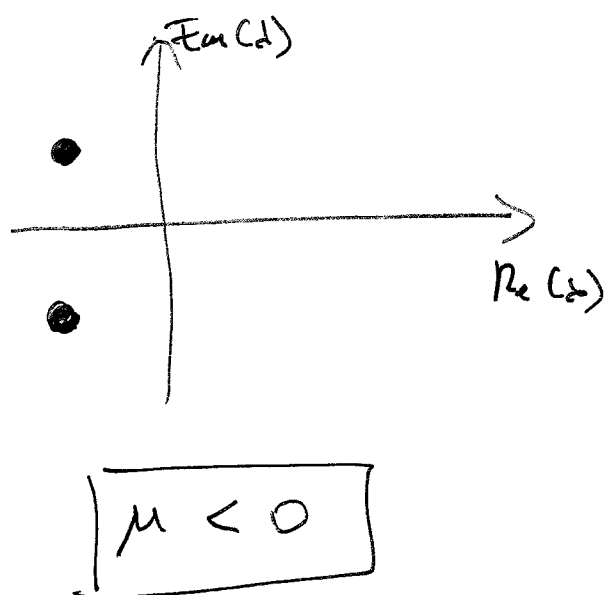
IV - 4) Bifurcation de Hopf

(11)

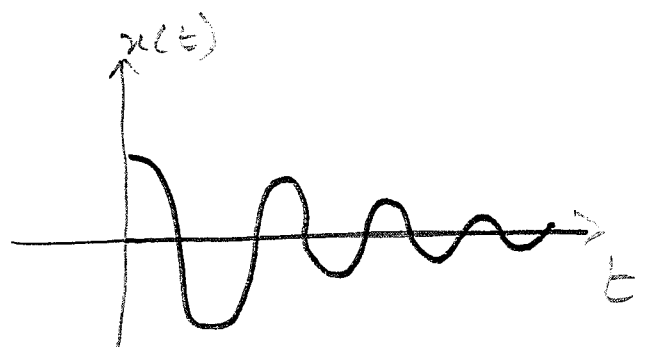
Les bifurcations que nous avons vues jusqu'à présent correspondent au cas où les valeurs propres des points fixes sont réelles: il y a bifurcation lorsqu'elles changent de signe. Par exemple, les v.p. du point fixe $\underline{x}^* = 0$ pour la bifurcation fourche nœudique sont telles que:



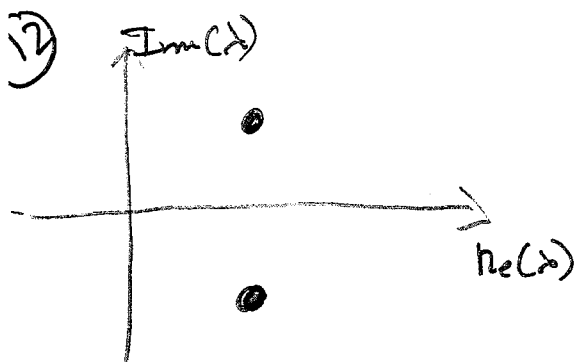
La bifurcation de Hopf correspond au cas où 2 v.p. complexes conjuguées traversent l'axe des λ :



On observe un amortissement des trajectoires vers le foyer stable $\underline{x}^* = 0$, p. ex.:

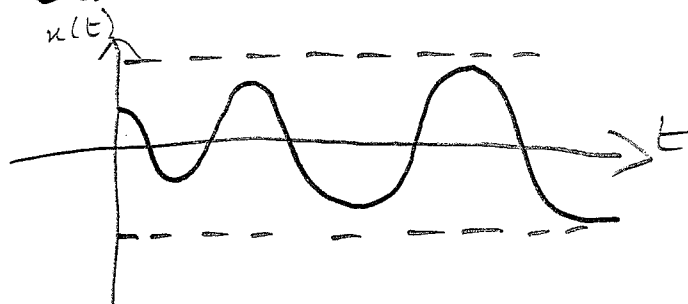


12)



$\mu > 0$

La même trajectoire est maintenant attirée vers un cycle limite $\Rightarrow$ apparition spontanée d'oscillations entretenues:



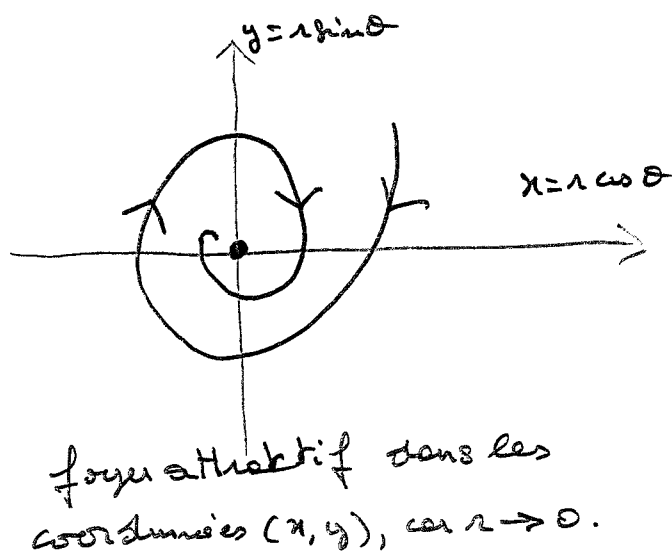
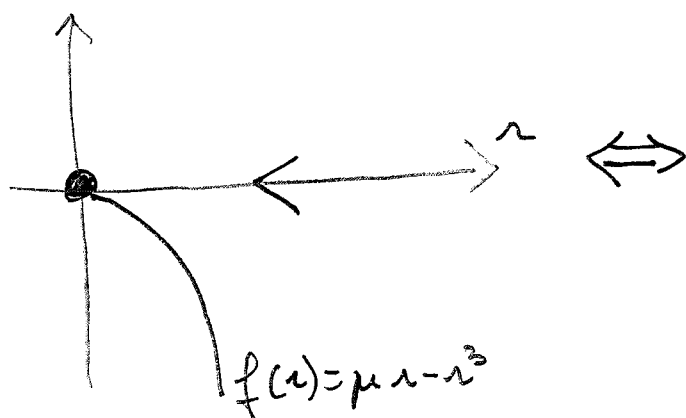
IV-4-2) Forme normale de la bifurcation de Hopf

Une forme générique de cette bifurcation est donnée en polaires par: $(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r > 0)$:

$$\begin{cases} \dot{r} = f(r) \equiv \mu r - r^3 & (1a) \\ \dot{\theta} = 1 & (1b) \end{cases}$$

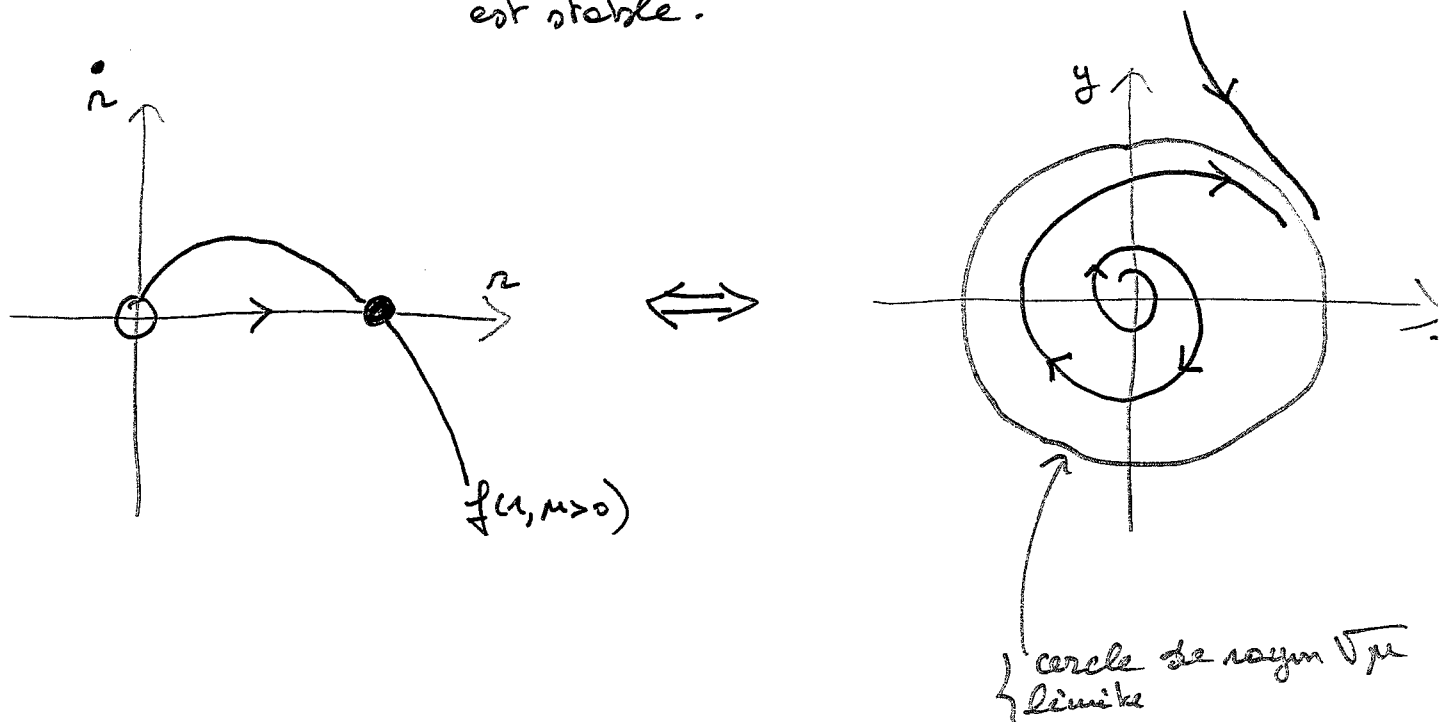
L'équation (1b) donne $\theta(t) = t$ et, puisque le système est découplé, on peut étudier qu'en 1D (Ch I, III-4-a), bifurcation fourche nœudique.

- Pour $\mu < 0$: $r_1^* = 0$ est l'unique point fixe (stable)



foyer attractif dans les coordonnées (x, y) , car $r \rightarrow 0$.

- Pour $\mu > 0$: Un deuxième point fixe apparaît, et $x_1^* = 0$ devient instable, tandis que $x_2^* = \sqrt{\mu}$ est stable.



Quel est le mécanisme de création de ce cercle limite ?

Pour le savoir, on passe en coordonnées cartésiennes et on dérive $x = r \cos \theta$ par rapport au temps :

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$$

$$= \underbrace{(\mu r - r^3)}_{\text{Eq. (1a)}} \cos \theta - r \times \underbrace{1 \times \sin \theta}_{\text{Eq. (1b)}}$$

$$= \mu x - y + \underbrace{(-x \sqrt{x^2 + y^2})}_{\text{H.O.T.}}$$

De même, à partir de $y = r \sin \theta$ on obtient :

$$\dot{y} = x + \mu y + \text{H.O.T.}$$

Pour analyser la stabilité du point fixe unique $x_1^* = 0$:

(14)

$$\nabla f(x_1^*) = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

ce qui conduit aux valeurs propres complexes conjuguées:

$$\lambda_1 = \mu \pm i$$

Lorsque $\mu = 0$, l'apparition du cercle limite correspond bien au franchissement de l'axe imaginaire de ces valeurs propres, une chance au début de ce paragraphe.

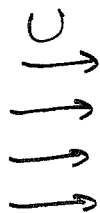
IV-4-3 Exemples

- Equation de Van der Pol (TD3)

$\Rightarrow$ oscillations non-linéaires sans les circuits RLC

- Allées de Van-Karman pour l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'un cylindre

$$Re_D = \frac{UD}{\nu} \geq 50$$



Equations Différentielles et Systèmes Dynamiques - M1 Mécanique

TD 1 - Systèmes du premier ordre - Bifurcations

Exercice 1. (*Etude du champ des directions*)

- 1) On considère le système (non-autonome)

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, x) = -tx.$$

En tirant à profit des symétries de f , esquissez le champ des directions du système. Tracez ensuite quelques trajectoires.

- 2) On étudie maintenant la dynamique du système $\dot{x} = x^2$.

- L'analyse linéaire fournit-elle des renseignements sur la stabilité de l'unique point fixe ?
- Etudiez graphiquement la stabilité du système en traçant le champ des directions. Déduisez-en le portrait de phase.
- Mêmes questions pour $\dot{x} = x^3$.

Exercice 2. (*Bifurcation fourche sous-critique*)

On considère la forme normale

$$\dot{x} = r x + x^3,$$

avec r un paramètre réel.

- Calculez les points fixes du système et étudiez leur stabilité.
- Esquissez les portraits de phase pour les valeurs caractéristiques de r et commentez les changements qualitatifs de la dynamique.
- Tracez le diagramme de la bifurcation et justifiez son nom.

Exercice 3. (*Formes normales et bifurcations I*)

On considère le système du premier ordre :

$$\dot{y} = y + \frac{\mu y}{1 + y^2}, \quad (1)$$

avec μ un paramètre réel.

- Montrez que le système est symétrique. Calculez les points fixes du système en fonction de la valeur de μ .
- Etudiez la stabilité du système pour $\mu = -3$, et tracez le portrait de phase.
- Déduire de la première question que si une bifurcation existe dans ce système, alors c'est une bifurcation fourche de seuil ($y_c = 0$, $\mu_c = -1$).

- 4) Effectuez un développement du système (1) autour du seuil en utilisant le changement de variables :

$$\begin{cases} y = y_c + y', & y' \ll 1, \\ \mu = \mu_c + r, & r \ll 1. \end{cases}$$

Montrez ensuite qu'on obtient l'équation :

$$\dot{x} = r x + x^3 + \mathcal{O}(x^5),$$

à l'aide du changement de variables $x = \alpha y'$, où α est une constante à déterminer. En déduire la dynamique du système (1).

Exercice 4. (*Formes normales et bifurcations II*)

On considère le système du premier ordre :

$$\dot{x} = r - x - \exp(-x),$$

avec r un paramètre réel.

- Calculez les points fixes du système en fonction de r^1 . Donnez la valeur du seuil (r_c , x_c) de la bifurcation.
- Etudiez la stabilité des points fixes, puis esquissez les portraits de phase pour les valeurs caractéristiques de r .
- Tracez le diagramme de la bifurcation.
- Par un développement limité autour du seuil de la bifurcation, retrouvez la forme normale de la bifurcation "blue sky" du cours².

¹Conseil: déterminer graphiquement les points d'intersection des courbes $y = r - x$ et $y = \exp(-x)$.

²Variante inversée de la bifurcation noeud-col.

Equations Différentielles et Systèmes Dynamiques - M1 MEPP

TD 2 - Systèmes du second ordre - portrait de phase

Exercice 1. (*Portrait de phase d'un système linéaire*)

On considère le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$$

- 1) Etudiez la stabilité du point fixe.
- 2) Calculez les directions invariantes du système.
- 3) Dessinez les sous-espaces invariants (E^s, E^u ou E^c) et tracez le portrait de phase.

Exercice 2. (*Portrait de phase d'un système non-linéaire*)

Dans cet exercice, on présentera une construction systématique du portrait de phase d'un système non-linéaire, en prenant comme exemple le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + e^{-y} \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$$

- 1) Calculez le point fixe du système et déterminez sa stabilité. Placez ce point dans l'espace des phases, et tracez les directions propres du système linéarisé.
- 2) Dans une seconde étape, on tracera le champ des directions du système. Cela se fait avec les étapes suivantes :
 - a) Tracez la courbe correspondant aux directions purement horizontale (telles que $\dot{y} = 0$), qu'on appelle *courbe isocline horizontale*. Tracez-la dans l'espace des phases.
 - b) Même question pour l'isocline verticale.
 - c) Ces isoclines délimitent 4 régions du plan où $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont de signe constant. Identifiez ces régions, et tracez dans chacune quelques vecteurs de direction.
- 3) Achevez le portrait de phases en traçant quelques trajectoires caractéristiques.

Problème 1. (*Portrait de phase des systèmes conservatifs et dissipatifs - application au pendule oscillant*)

Dans ce problème, on considère un système mécanique à un seul degré de liberté (ddl) x , de masse M , tel que son énergie cinétique est $T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$.

- I. Dans cette partie, on suppose que l'énergie potentielle V dépend uniquement de la position x , et que le mouvement s'effectue sans frottement (ie, la fonction de dissipation de Rayleigh D est nulle).

- 1) En posant $y = \dot{x}$, montrez que les équations d'Euler-Lagrange¹ conduisent au système dynamique du second ordre :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1a)$$

avec

$$\mathbf{f} = \left(y, -\frac{1}{M} \frac{dV}{dx} \right)^T. \quad (1b)$$

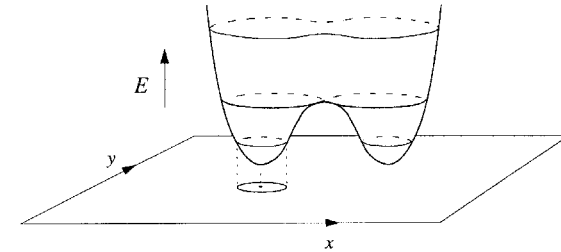


Figure 1: Si $E(\mathbf{x})$ est une quantité conservée par un système dynamique du second-ordre (par exemple une énergie mécanique, un Hamiltonien, ...), alors chaque ligne de niveau $E(x, y) = C^te$ correspond à une trajectoire dans l'espace des phases (x, y) .

- 2) En notant $E(\mathbf{x}) = T(y) + V(x) = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + V(x)$ l'énergie mécanique, montrez que $\frac{dE}{dt} = 0$.
- 3) En déduire que, en l'absence de frottement :
 - l'énergie mécanique E est conservée sur une trajectoire dans l'espace des phases (cf. Fig. 1),
 - Les extrema de E correspondent aux points fixes du système dynamique (1),
 - les foyers attractifs ne peuvent pas exister.
- 4) Plus généralement, un système dynamique de la forme (1a) est dit dissipatif si $\nabla \cdot \mathbf{f} < 0$ et conservatif si $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$. De quel type est le système (1a)-(1b) ?

II. On considère le pendule simple de la figure 2. Afin de reprendre les notations de la première partie, on remarquera que $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}My^2$ si on pose $M = ml^2$, x l'angle du pendule et y sa vitesse angulaire.

- 1) En posant $K = g/l$, calculez l'énergie potentielle V du système en considérant qu'elle est égale à zéro pour la position de repos de la masse. En déduire la forme du système dynamique (1) pour le pendule.

¹On rappelle les équations d'Euler-Lagrange : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = 0$ pour chaque ddl x_i , avec $L = T - V$ le lagrangien.

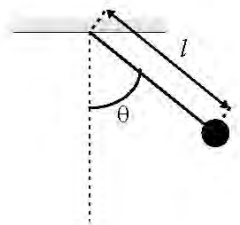


Figure 2: Le pendule oscillant (masse m , fil de longueur l). La position de la masse est repérée par l'angle θ , orienté dans le sens trigonométrique. L'origine $\theta = 0$ est fixée à la position de repos de la masse.

- 2) Calculez les points fixes du système. Donnez-leur une interprétation physique et classez-les en 2 types.
- 3) Déterminez la stabilité de chaque type de points fixes par l'analyse linéaire. Pouvez-vous conclure pour les deux ?
- 4) Calculez l'énergie mécanique E du système, et montrez qu'elle prend des valeurs entre 0 et $+\infty$. A quel type de points fixes correspond la ligne de niveau $E(x, y) = 0$? Même question pour $E(x, y) = 2MK$.
- 5) Par un développement limité, montrez que les lignes de niveau voisines de la ligne zéro sont de forme elliptique. En déduire le comportement des trajectoires autour de ces points fixes.
- 6) Ebauchez le portrait de phase du pendule en traçant le comportement des trajectoires autour des points fixes (prenez x dans $[-2\pi, 2\pi]$). Tracez ensuite les trajectoires hétéroclines, puis complétez le portrait en plaçant quelques trajectoires caractéristiques.
- 7) Effectuez une interprétation physique du portrait de phase, en associant à chaque trajectoire caractéristique de la figure 3 une ligne de niveau $E(x, y) = C$, avec C telle que :

- | | |
|-----------------|-------------|
| • $C = 0$ | • $C = 2MK$ |
| • $0 < C < 2MK$ | • $C > 2MK$ |

III. On reprend l'exemple du pendule simple de la partie II en ajoutant du frottement visqueux, modélisé par la fonction de dissipation $D = \frac{1}{2}\gamma\dot{\theta}^2$, avec $\gamma > 0$ le coefficient de frottement.

- 1) Ecrivez le système dynamique (1) du pendule amorti.
- 2) Montrez que :

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma y^2,$$

et déduisez que les trajectoires dans l'espace des phases ne sont plus portées par les lignes de niveau de l'énergie mécanique.

- 3) Etudiez la stabilité linéaire des points fixes, et comparez le portrait de phase du pendule amorti (figure 4) avec celui du pendule non amorti.

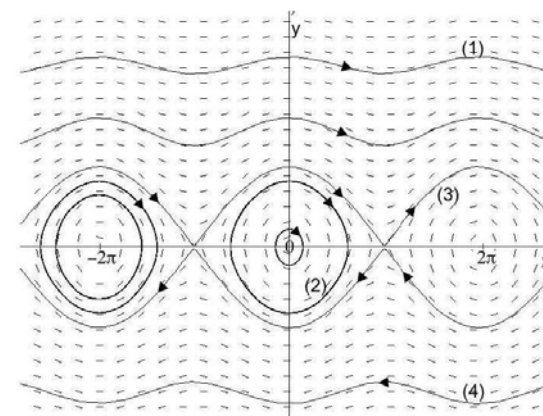


Figure 3: Portrait de phase du pendule oscillant. Quelques trajectoires caractéristiques sont repérées par (1)-(4).

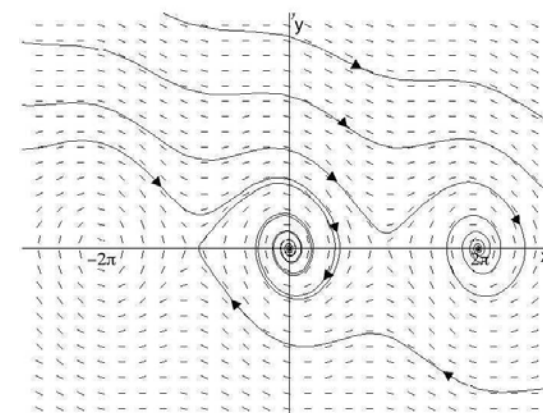


Figure 4: Portrait de phase du pendule amorti.

Equations Différentielles et Systèmes Dynamiques - M1 MEPP

TD 3 - Systèmes du second ordre - Bifurcations

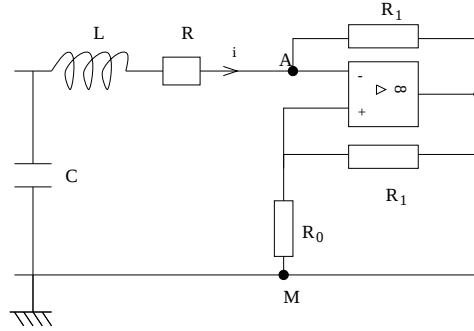


Figure 1: Avant l'invention du transistor, on trouvait dans les radios un tel circuit électrique, formé d'un condensateur de capacité C , d'une bobine d'inductance L , et d'un amplificateur opérationnel AM, dont la tension est notée V_{AM} . Lorsque l'intensité i est faible, le dipôle AM se comporte comme une résistance négative de valeur $-R_0$, ce qui conduit à la tension $V_{AM} = -R_0 i$. La puissance qu'il reçoit est $\mathcal{P} = V_{AM} i = -R_0 i^2$: il est générateur d'énergie. Par contre, pour de grandes intensités, on observe que l'amplificateur sature et dissipe l'énergie : $V_{AM} = R_1 i \pm V_{sat}$ pour $|i| \gg 1$. Pour les deux régimes de l'amplificateur, la tension est modélisée par la loi spline cubique $V_{AM} = f(i)$, tel que $f(i) = bi^3 - R_0 i$ avec $b = R_0(R_0 + R_1)^2/(3V_{sat}^2)$.

Exercice 1. (Oscillateur de van der Pol)

On considère le circuit RLC de la figure 1. Le dipôle AM fonctionne suivant les deux régimes de l'amplificateur opérationnel : pour de faibles intensités, il amplifie l'énergie, sinon il se comporte comme une résistance classique, dissipatrice d'énergie. Ce comportement non linéaire engendre dans le circuit RLC des oscillations électriques entretenues.

Pour établir l'EDO du circuit RLC, on a besoin de quelques rappels d'électricité : la tension $V(t)$ au travers du condensateur C s'écrit $dV/dt = -i/C$ ou $i(t)$ est l'intensité, et d'autre part on a $V = L di/dt + R i + f(i)$.

1) Montrez que l'EDO vérifiée par l'intensité s'écrit :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{f'(i) + R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0.$$

En déduire que, si l'amplificateur suit la loi linéaire $f(i) = -R_0 i$ avec $R_0 < R$, on retrouve la dynamique de l'oscillateur linéaire amorti. En déduire que le circuit RLC admet pour pseudo-période $2\pi\tau$ avec $\tau = \sqrt{LC}$. Vérifiez que τ a bien la dimension d'un temps.

2) On utilise maintenant la loi non linéaire¹ de la figure 1. Adimensionnez le système avec les variables $t^* = t/\tau$, $i^* = i/I$ où I est une grandeur caractéristique d'intensité à définir à partir des données du problème. Montrez alors que le seul paramètre adimensionnel du système est $\epsilon = \sqrt{C/L}(R_0 - R)$, et qu'en posant $x = i^*$ on obtient l'équation de van der Pol (1927) :

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

3) Déterminez l'unique point fixe du système. Faites une étude de la stabilité de ce point fixe en fonction de la valeur de ϵ (on distinguera les cas $|\epsilon| < 2$ et $|\epsilon| > 2$).

4) On se place dans le cas $\epsilon \simeq 0$. En écrivant les valeurs propres de la question précédente sous la forme :

$$\lambda_{\pm} = \frac{\epsilon}{2} \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}},$$

montrez que le système est susceptible de subir une bifurcation² de Hopf surcritique pour $\epsilon_c = 0$. Esquissez le portrait de phase pour les valeurs caractéristiques de ϵ .

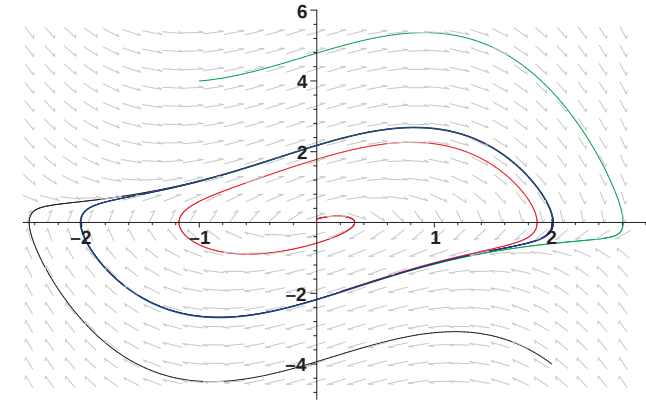


Figure 2: Portrait de phase de l'oscillateur de van der Pol pour $\epsilon = 1$.

¹On se place maintenant dans le cas $R_0 > R$, ce qui est nécessaire dans la pratique pour que des oscillations se déclenchent.

²Les expérimentations numériques du TP confirmeront cette analyse linéaire (cf. figure 2).

Equations Différentielles et Systèmes Dynamiques - M1 MEPP

TP 1 - Applications sur Matlab

Cet TD est consacré au tracé par *Matlab* du portrait de phase des systèmes dynamiques qui ont été étudiés (théoriquement) dans les TD précédents. Une introduction à l'étude des portraits de phase par *Matlab* est donné en annexe de cet énoncé. A l'issue du TD, vous devrez rendre un compte-rendu succinct qui contiendra les figures que vous aurez tracé avec *Matlab*.

Exercice 1. (Le pendule simple)

On considère l'équation du pendule écrite sous forme adimensionnelle :

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = 0,$$

avec les conditions initiales $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = v_0$, cf. TD2, problème 1.

- 1) On considère ici une étude du pendule sans frottement : c'est-à-dire qu'on se place dans le cadre du problème 1, partie II du TD2.
 - a) Tracez le portrait de phase en choisissant soigneusement des trajectoires caractéristiques de la dynamique du pendule, car vous réutiliserez ces trajectoires dans la suite de l'exercice (aidez-vous de la Fig. 3 du TD2). Comparez avec les résultats théoriques du TD2.
 - b) Pour les mêmes trajectoires que la question a), tracez l'évolution de $\theta(t)$ en fonction du temps.
 - c) Tracez les lignes de niveaux de la grandeur $E(\theta, \dot{\theta})$ conservée par le système¹, ainsi que ses lignes de niveaux². Comparez ce dernier graphe avec le portrait de phases de la question a).
- 2) Etude avec frottement : on se place dans le cadre de la partie III du problème 1.
 - a) Rajoutez un terme de frottement visqueux à l'équation du pendule. Tracez le portrait de phase du système pour les mêmes trajectoires que la question 1a). Comparez la stabilité des points fixes avec le cas non amorti.

Exercice 2. (Le système de van der Pol)

On considère l'équation de van der Pol (1927) :

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

avec ϵ un paramètre réel (cf. TD3, exercice 1).

- 1) Tracez le portrait de phases du système avant la bifurcation (choisissez la valeur de ϵ).

¹Utilisez la fonction *Matlab* `contour`, cf. polycopié *Matlab Primer* page 18.

²Utilisez la fonction `contour`.

- 2) Tracez le portrait de phases après la bifurcation. Observez l'apparition du cycle limite.
- 3) Pour les mêmes trajectoires que la question précédente, tracez l'évolution de $x(t)$ en fonction du temps.

Annexe 1. (Portrait de phases avec Matlab)

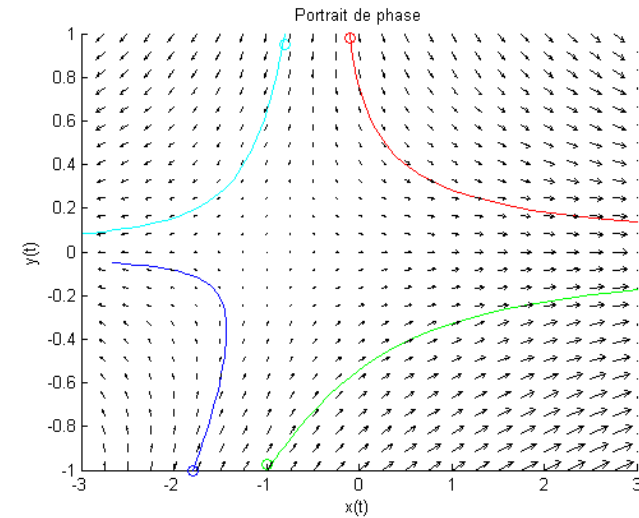


Figure 1: Portrait de phases de l'EDO (1). Les conditions initiales sont représentées par le symbole $\circ$.

Cette annexe vous apprendra à tracer le portrait de phases du système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + e^{-y} \\ \dot{y} &= -y \end{cases} \quad (1)$$

qui a été étudié dans le TD2. Pour cela, vous devez télécharger sur ARCHE (<http://arche.univ-lorraine.fr/course/view.php?id=6745>) l'archive "TP1_EDO_M1MEPP.rar" et l'extraire sur votre PC. Le programme '*Tp_matlab_EDO.m*' résout l'EDO (1) pour $t \in [-3, 3]$ à partir de la condition initiale $(x(-3) = -1.8, y(-3) = -1)$. Notez que le second-membre de l'EDO est défini dans la fonction '*fedo_annexe.m*'. Complétez le portrait de phases en traçant les trajectoires correspondant aux conditions initiales :

$$(x(-3) = -0.1, y(-3) = 1), \quad (x(-3) = -1, y(-3) = -1), \quad (x(-3) = -.8, y(-3) = 1),$$

afin de retrouver le portrait de phase de la figure 1. Comparez ce portrait de phases avec celui que vous avez tracé à la main dans le TD2 (rappel : $(-1, 0)$ est un point selle).

