

TD2 : étude d'écoulements classiques

Objectif #1

Effectuer un rappel sur les systèmes de coordonnées

Objectif #2

Appréhender les notations matricielles ou tensorielles dans différents repères

Objectif #3

Manipuler les opérateurs divergence, gradient, laplacien et rotationnel

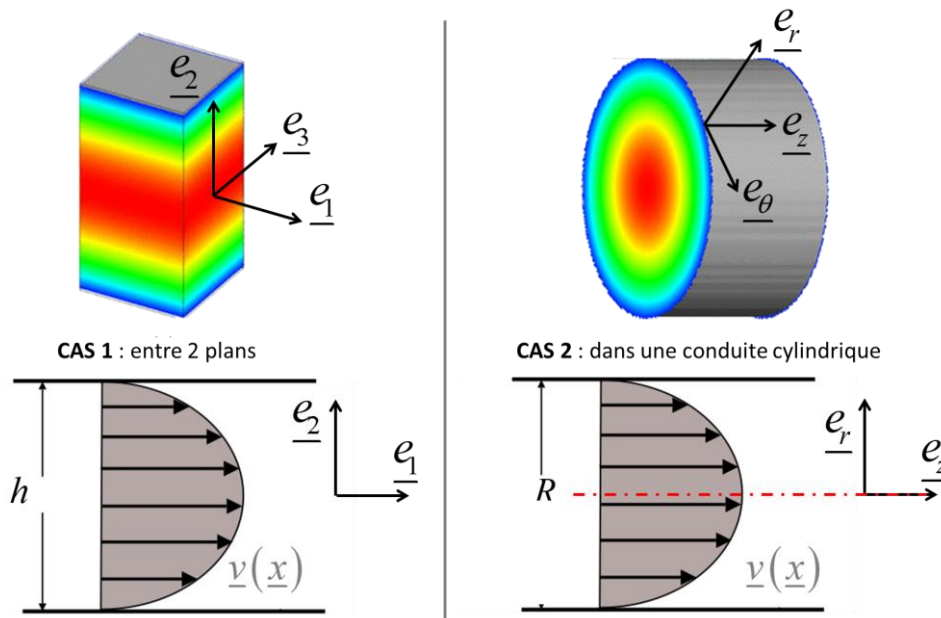
Objectif #4

Introduire de premières notions de mécanique des fluides

Enoncé du problème

Le cours de MMC fait intervenir de nouveaux outils mathématiques comme le calcul tensoriel ou l'analyse des champs : pour assimiler ces outils sous forme d'un exemple, on se propose d'analyser un écoulement et d'y appliquer les différents opérateurs qui seront utilisés dans toute la suite du cours. On considère pour cela un écoulement de **Poiseuille**, dans deux cas de figures différents :

- 1) un écoulement entre deux plans infinis et parallèles, espacés d'une distance h
- 2) un écoulement dans une conduite cylindrique de rayon R



Problème posé

Quelle est la forme du champ de vitesses au sein de cet écoulement, et comment appliquer les différents opérateurs différentiels à ce champ de vitesses ?

Hypothèses

- Dans une zone suffisamment loin des sections d'entrée et de sortie, on considère que l'écoulement est établi
- On s'intéresse à un écoulement incompressible (eau, huile, etc...)
- On considère une adhérence parfaite du fluide aux parois

Questions

Première partie : écoulement entre 2 plans infinis

- 1) Faire des hypothèses sur le champ de vecteurs vitesse lorsque l'écoulement est établi, pour arriver à une forme la plus réduite possible.
- 2) Nous verrons plus tard que pour un fluide incompressible, la divergence du champ de vitesses est nécessairement nulle : montrer alors que $\underline{v} = v_1(x_2)\underline{e}_1 + K\underline{e}_2$
- 3) On fait l'hypothèse que le frottement implique une vitesse nulle aux niveau des parois : traduire proprement cette condition.
- 4) On se propose d'adopter une forme parabolique pour le champ de vitesses : proposer une forme en fonction de $v_{\max}$, la vitesse maximale du fluide.
- 5) Nous verrons plus tard que l'écoulement d'un fluide visqueux entraîne un cisaillement au niveau de la paroi, proportionnel à la viscosité du fluide et au gradient du champ de vitesses. Calculer le gradient du champ de vitesses.
- 6) Les parties symétriques et antisymétriques de ce gradient correspondent aux vitesses de déformation et de rotation du fluide : calculer ces deux termes.
- 7) Montrer que l'information sur la rotation du fluide est également contenue dans le rotationnel du champ de vitesses.
- 8) L'équation de Navier-Stokes, que nous verrons à la fin du cours, régit l'écoulement du fluide et fait intervenir le laplacien du vecteur vitesse : calculer ce laplacien.
- 9) A partir du théorème de flux-divergence, retrouver la condition de conservation du débit volumique durant cet écoulement.

Seconde partie : écoulement dans une conduite cylindrique

- 10) Reprendre toutes les questions précédentes dans le cas d'une conduite cylindrique (en montrant notamment que $\underline{v} = v_z(r)\underline{e}_z$)