

TD4 : contraintes dans un réservoir sous pression

Objectif #1

Savoir écrire des conditions aux limites en pression.

Objectif #2

Comprendre la signification physique de différentes composantes du tenseur des contraintes.

Objectif #3

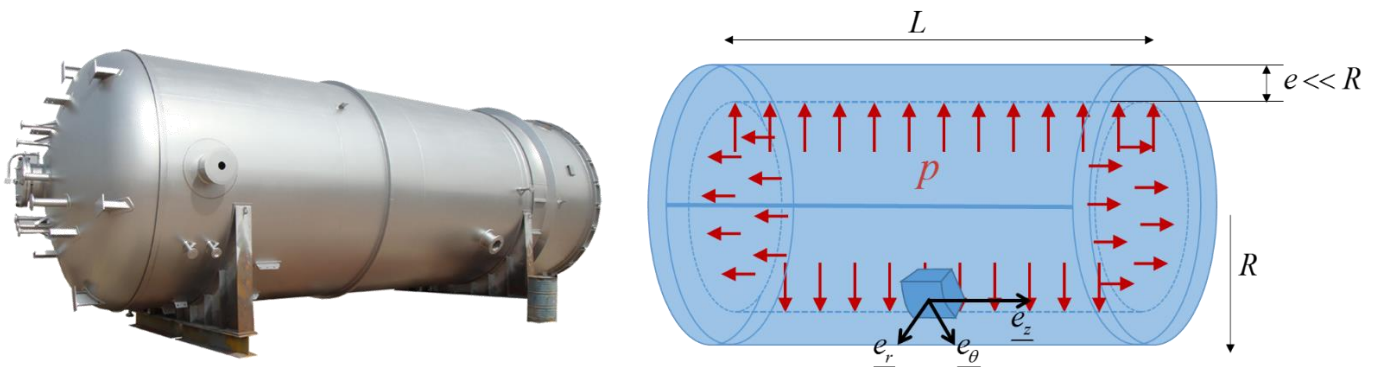
Ecrire l'équation d'équilibre.

Objectif #4

Comprendre la différence entre efforts intérieurs et extérieurs, et écrire leur équilibre.

Enoncé du problème

Une solution technique permettant de stocker l'énergie produite de façon intermittente consiste à mettre un gaz sous pression dans de gros réservoirs. Il s'agit alors de prédire quelle peut être la pression maximale dans un réservoir pour ne pas l'endommager, ce qui nécessite de connaître l'état de contraintes au sein du matériau qui le constitue.



On notera p la pression dans le réservoir de longueur L , d'épaisseur e et de rayon R .

Problème posé

On cherche à déterminer l'état de contraintes au sein de la paroi latérale du réservoir.

Hypothèses

- Le réservoir est considéré parfaitement cylindrique, sans soudures, sans ouvertures.
- On considère que l'épaisseur du réservoir est petite devant son rayon : $e \ll R$

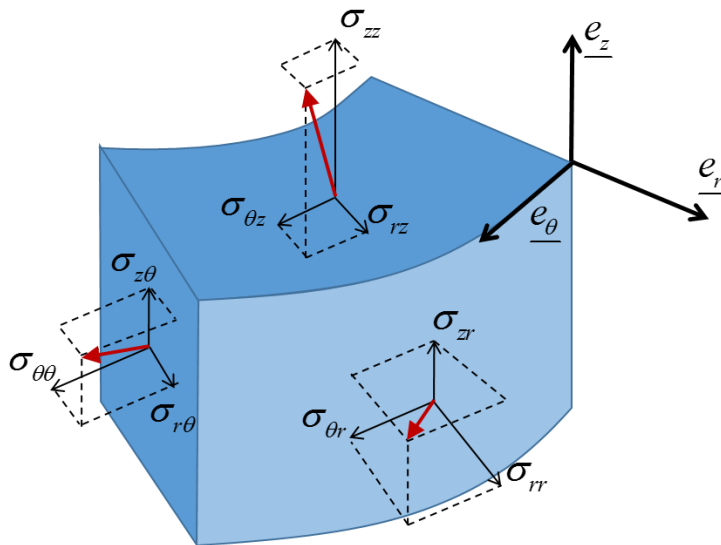
Questions

- 1) Ecrire les conditions aux limites concernant l'application de la pression à l'intérieur du réservoir.
- 2) Ecrire les conditions aux limites concernant l'extérieur du réservoir.
- 3) On considère que le tenseur des contraintes dans la paroi latérale est sous la forme $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}(r)$, et que la composante $\sigma_{rr}(r)$ y évolue linéairement. Déterminer son expression.
- 4) A partir des questions précédentes et de l'équation d'équilibre, déterminer la composante $\sigma_{\theta\theta}(r)$ en considérant qu'au sein de la paroi $r \approx R$.
- 5) Retrouver le même résultat en considérant l'équilibre d'un demi-cylindre sous pression coupé par une facette de normale $\underline{e}_\theta$, en considérant que le vecteur-contrainte est uniformément réparti dans la paroi.
- 6) En effectuant une démarche similaire pour une autre facette, déterminer complètement le tenseur des contraintes dans la paroi latérale. Discuter des différentes composantes.

Formules utiles

Définition du vecteur-contrainte : $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$

Composantes du tenseur des contraintes :



Equation d'équilibre en coordonnées cylindriques :

$$\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0}$$

$$\begin{cases} \rho(f_r^m - a_r) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \rho(f_\theta^m - a_\theta) + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \\ \rho(f_z^m - a_z) + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \end{cases}$$