

TD5 : essai de traction uniaxiale

Objectif #1

Découvrir le déroulement d'un essai de traction uniaxiale

Objectif #2

Analyser les déformations et les contraintes pour un état de sollicitation élémentaire

Objectif #3

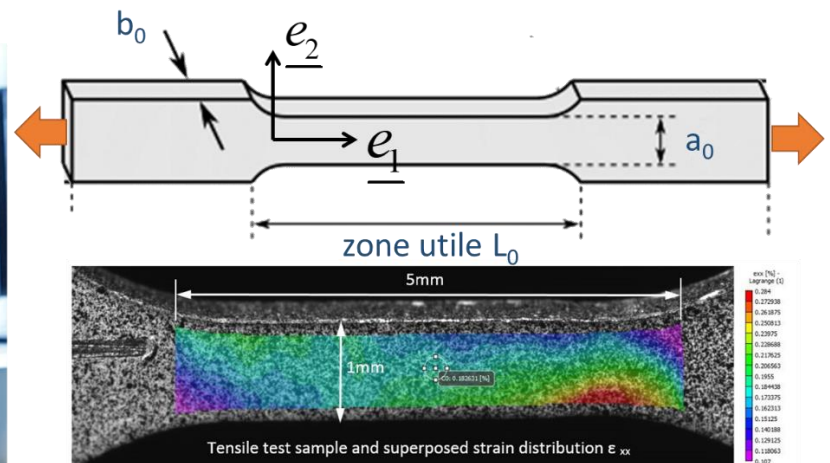
Interpréter les significations des différents paramètres d'un matériau élastique linéaire isotrope

Objectif #4

Comprendre la notion d'isotropie d'un matériau

Enoncé du problème

Afin d'étudier le comportement mécanique d'un matériau, on a généralement recours à des essais mécaniques parmi lesquels l'essai de traction est le plus courant. Il consiste à imposer un effort de traction sur une éprouvette calibrée, dont la partie utile est soumise à un champ de contraintes et de déformations homogènes (comme on va le découvrir ici).



Problème posé

Quel est l'état de contraintes et de déformations lors de l'essai de traction uniaxiale, et comment déterminer les propriétés élastiques du matériau à partir des données de cet essai ?

Hypothèses

- Le déplacement dans la direction de l'éprouvette (plate ou cylindrique) est nul à une des deux extrémités de la partie utile, de longueur initiale L_0
- Ce déplacement est imposé à l'autre extrémité et il est connu (mesuré par extensométrie) : on le nomme par exemple ΔL
- L'effort de traction mesuré est uniformément réparti sur la section de l'éprouvette.
- Chaque section rectangulaire de l'éprouvette reste rectangulaire lors de l'essai, et chaque section droite reste droite (perpendiculaire à la direction de traction)
- Pour de petites déformations (HPP), la section de l'éprouvette est constante dans toute la partie utile de l'éprouvette (mais pas constante dans le temps évidemment !)

Questions

Première partie : cas 1D

Dans un premier temps on ne s'intéresse qu'à la direction de l'essai de traction uniaxiale (problème 1D), sans se soucier de l'état de déformations ou de contraintes dans les directions transverses.

- 1) Ecrire le champ de déplacement au sein de la partie utile de l'éprouvette, en considérant qu'il évolue linéairement le long de l'éprouvette.
- 2) Comparer alors le champ de déformations de Green-Lagrange, et sa version linéarisée en HPP.
- 3) Comparer la déformation en HPP avec la dilatation.
- 4) Calculer la contrainte dans l'éprouvette, si l'on considère qu'elle est constituée d'un matériau linéaire élastique isotrope. En déduire une relation entre le module d'Young et les coefficients de Lamé.
- 5) Comment calcule-t-on la contrainte à partir de la mesure de l'effort ?
- 6) On fait maintenant l'hypothèse que le champ de déplacement évolue de façon quadratique dans la direction de traction : est-ce compatible avec l'équilibre du milieu ?

Deuxième partie : étude de l'éprouvette plate

On s'intéresse maintenant au cas 3D, pour lequel une traction dans la direction $\underline{e}_1$ sera associée à des variations de dimensions dans les directions transverses $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$.

- 7) Proposer une forme simple pour le champ de déplacements.
- 8) En déduire une expression pour le champ de déformations et de contraintes.
- 9) A partir de l'équilibre du milieu, montrer que toutes les composantes du tenseur des contraintes sont constantes dans la partie utile de l'éprouvette.
- 10) A partir des conditions de la surface libre et de l'hypothèse de distribution uniforme de l'effort de traction, déterminer complètement le champ de contraintes.
- 11) Retrouver la signification physique du coefficient de Poisson.
- 12) On mesure la largeur a de l'éprouvette en cours de transformation : écrire le lien auquel on doit s'attendre entre a , la largeur initiale a_0 , et la variation de longueur ΔL .

Formules utiles

Définition du vecteur-contrainte : $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$

Tenseur des déformations linéarisé : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u} + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T)$

Gradient d'un vecteur : $\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T} = T_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

$$\begin{aligned} \text{Equation d'équilibre: } \quad & \rho(f_1^m - a_1) + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ & \rho(f_2^m - a_2) + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ & \rho(f_3^m - a_3) + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{aligned}$$

Loi de Hooke: $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$ ou encore $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$