

TD6 : dimensionnement d'un arbre de transmission

Objectif #1

Comprendre et mettre en application le théorème de Saint-Venant.

Objectif #2

Résoudre un problème d'élasticité simple.

Objectif #3

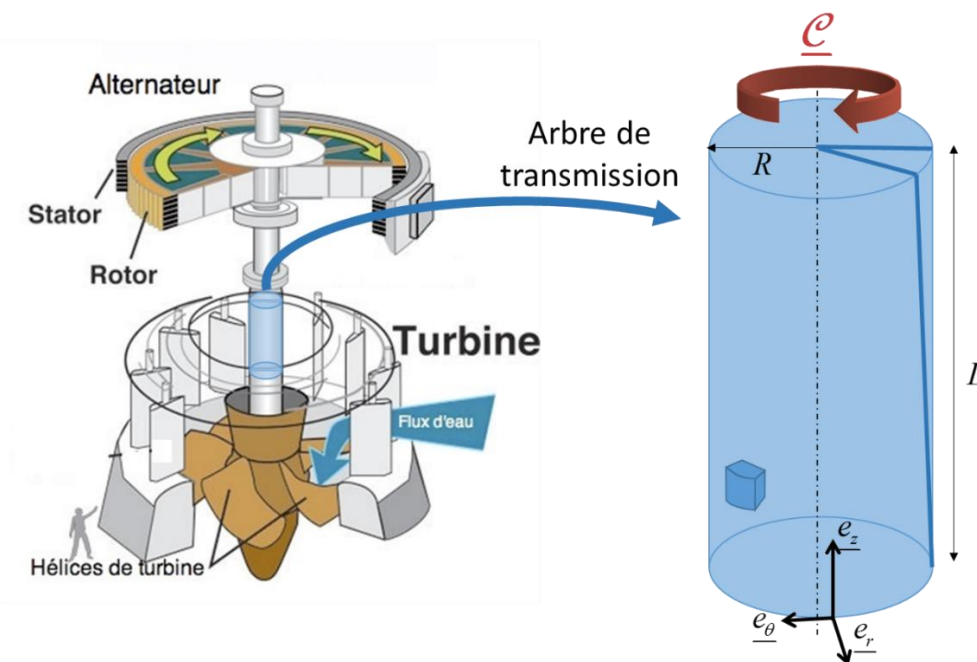
Comprendre la notion de base principale et de contraintes principales.

Objectif #4

Dimensionner une pièce mécanique à partir du critère de Von Mises.

Enoncé du problème

Dans la plupart des chaînes de production d'énergie, comme dans l'exemple ci-dessous permettant de récupérer l'énergie hydraulique par l'intermédiaire d'une turbine accouplée à un alternateur, l'énergie est transmise par le biais d'un *arbre de transmission*. Cet arbre constitue un élément critique de cette chaîne de conversion d'énergie, et ses dimensions doivent être proprement choisies.



On se place ici dans le cas d'un arbre élastique linéaire et isotrope de rayon R et de longueur L soumis à un couple de torsion $\underline{C}$ et encastré à l'autre extrémité.

Problème posé

Comment se traduit l'application du couple en termes de contraintes ?
 Pour un matériau et des dimensions d'arbre donnés, quel est le couple transmissible ?

Hypothèses

On se placera dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations. On considérera alors :

- que le rayon et la longueur de l'arbre resteront constants durant la transformation
- qu'une section droite transverse de l'arbre reste droite après déformation
- qu'une fibre droite en surface du matériau reste droite après déformation.

Questions

- 1) Montrer que, en raison des hypothèses formulées, on peut postuler un champ de déplacement de la forme : $\underline{u}(r, z) = u_\theta(r, z)\underline{e}_\theta$.
- 2) Calculer le champ de déformations correspondant à ce déplacement.
- 3) Calculer le champ de contraintes correspondant à ce champ de déformations.
- 4) On postule que le couple est appliqué en $z = L$ de façon linéaire en r , de telle sorte que $\sigma_{\theta z}(z = L) = Cste \times r$. Justifier cette hypothèse et déterminer cette constante.
- 5) En raison des hypothèses précédentes, on peut postuler que u_θ est linéaire en z . En déduire le champ de contraintes dans tout l'arbre de transmission.
- 6) Vérifier que la condition de surface libre est satisfaite en $r = R$.
- 7) Déterminer les contraintes principales et la base principale correspondante.
- 8) Calculer la contrainte équivalente de Von-Mises, en en déduire le couple maximal admissible pour un matériau et des dimensions données.

Formules utiles

Définition du vecteur-contrainte : $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$

Tenseur des déformations linéarisé : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$

Gradient d'un vecteur en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Grad}} \underline{T} = & \frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

Equation d'équilibre en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \rho(f_r^m - a_r) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \rho(f_\theta^m - a_\theta) + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \\ \rho(f_z^m - a_z) + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \end{cases}$$

Contrainte équivalente de Von Mises : $\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$